TEGNIESE WISKUNDE GRAAD 10

Ontwikkel en gefinansier as ’n voortgesette projek van die Sasol Inzalo Stigting, in samewerking met die Ukuqonda Instituut.

Gepubliseer deur The Ukuqonda Institute: http://www.ukuqonda.org.za

Nealestraat 9, Rietondale 0084; Geregistreer as Titel 21-maatskappy, reg.nr. 2006/026363/08;

Openbare Bevoordelingsorganisasie, PBO Nr. 930035134

ISBN: 978-1-431522-85-9

The FirstRand Empowerment Foundation het die kostes gedra vir die druk van hierdie boek.

Hierdie boek is ontwikkel in samewerking met die Departement van Basiese Onderwys van Suid-Afrika (DBO), met finansiering van die Sasol Inzalo Foundation (SaIF).

Bydraers van Ukuqonda Institute:
Paul van Koersveld, Nathi Makae, Andrew Hofmeyr, Yvonne Thiebaut, Herholdt Bezuidenhout, Enoch Masemola, Makgoshi Manyatshe, Willem van Schalkwyk, Piet Human, Martinette van der Westhuizen, Elene van Sandwyk, Irma van der Vyver, Hettie Vos

Bydraers van die Departement van Basiese Onderwys:
Leonard Gumani Mudau, Elliot Peter Simelane, Gift Mfiki Ndaba, Andrew Nkwana, Glentone Williams, Anna M Orsmond-Pieterse

Illustrasies en grafika:
Leonora van Staden, Martin van Niekerk, Melany Pietersen

Omslagfoto: Kim Stevens

Teks ontwerp: Mike Schramm

Uitleg en setwerk: Ink Design

Gedruk deur: [printer name and address]

Lys inhoud

HOOFSTUK 1 Inleiding

	Aanhef	1
1.1	Algebraïese taal	2
1.2	Woorde wat ons in Algebra gebruik	2
1.3	Wiskundige konvensies en uitdrukkings	3
1.4	Kwantiteite	3
1.5	Verwantskap tussen kwantiteite	5
1.6	Eienskappe van bewerkings	5
1.7	Faktorisering en uitbreiding	6
1.8	Die verskuilde patroon van die distributiewe eienskap	7
1.9	Nog 'n verskuilde patroon van die distributiewe eienskap	8
1.10	Bewerking eienskappe van heelgetalle	9
1.11	Ekwivalensie	11
1.12	Vereenvoudiging van uitdrukkings	13
1.13	Van numeriese berekeninge tot algebraïese berekeninge	14
1.14	Modellering van situasies	15
1.15	Oplossing, uitdrukking, vergelyking, identiteit, en onmoontlikheid	15
1.16	Die wetenskaplike sakrekenaar	17

HOOFSTUK 2 Getallestelsels

	Aanhef	23
2.1	Reëele getalle	24
2.2	Meer oor hoe om versamelings en intervalle voor te stel	29
2.3	Afronding en beduidende syfers	32
2.4	Rasionale getalle in meer detail	34
2.5	Irrasionale getalle in meer detail	37
2.6	Binêre getalle	42
2.7	Komplekse getalle	55
2.8	Opsomming	56
2.9	Konsolideringsoefeninge	57

HOOFSTUK 3 Eksponente

	Aanhef	59
3.1	Inleiding tot herhaalde vermenigvuldiging	60
3.2	Notasie vir herhaalde vermenigvuldiging en deling	61
3.3	Die algebra van eksponente	65

3.4 Vereenvoudiging 66
3.5 Eksponensiële vergelykings 71
3.6 Wetenskaplike notasie en beduidende syfers 74
3.7 Kilo-, nano-, mega-, mikro-, en meer 79
3.8 Omskakeling tussen eenhede 80
3.9 Opsomming 84
3.10 Konsolideringsoefeninge 85

HOOFSTUK 4 Algebraïese Uitdrukkings

Aanhef 89
4.1 Hersiening: Notasie vir voorstelling van versamelings 90
4.2 Gebruik algebraïese uitdrukkings 92
4.3 Optel en aftrek van algebraïese terme 94
4.4 Vermenigvuldiging van veelterme 97
4.5 Faktoriseer uitdrukkings van die vorm $ab \pm ac$ 100
4.6 Faktoriseer uitdrukkings van die vorm $ax^2 \pm bx \pm c$ 102
4.7 Faktoriseer die verskil van twee kwadrate 109
4.8 Faktorisering: die optel of aftrek van twee derdemagte 112
4.9 Faktorisering: ’n paar gemengde voorbeelde 114
4.10 Vereenvoudig algebraïese breuke (kwosiënt-uitdrukkings) 114
4.11 Kleinste gemene veelvoude (KGV) en grootste gemene factor (GGF) 116
4.12 Optel en aftrek van algebraïese breuke 116
4.13 Vermenigvuldig algebraïese breuke 122
4.13 Deling van algebraïese breuke 124
4.14 Opsomming 126
4.16 Konsolideringsoefeninge 127

HOOFSTUK 5 Vergelykings en ongelykhede

Aanhef 129
5.1 Maak gereed om te leer 130
5.2 Werk met vergelykings 130
5.3 Gelyktydige vergelykings 133
5.4 Liniêre ongelykhede 136
5.5 Oplos van liniêre ongelykhede 140
5.6 Oplossing van kwadratiese vergelykings deur faktorisering 142
5.7 Onderwerp van die formule 143
5.8 Woordprobleme 144
5.9 Opsomming 146
5.10 Konsolideringsoefeninge 147

HOOFSTUK 6 Trigonometrie

	Aanhef	149
6.1	Bekendstelling van twee situasies	150
6.2	Hersiening van hoeke, lengtes, lengteverhoudings en gelykvormigheid	151
6.3	Oorskakeling tussen hellingshoeke en verskillende daklengteverhoudings met die sinus-, kosinus- en tangensfunksies	157
6.4	Reghoekige driehoeke	164
6.5	Definieer die trigonometriese funksies	166
6.6	Insethoeke van 0° en 90°	171
6.7	Die Cartesiese ruitenet: kyk na die tangensfunksie op ’n ander manier	172
6.8	Nog toepassings van trigonometriese funksies in die Cartesiese vlak	176
6.9	Oplossing van vergelykings wat trigonometriese funksies vir hoeke tussen 0° en 90° behels	192
6.10	Oplossing van probleme wat reghoekige driehoeke behels	194
6.11	Die grafieke van die basiese trigonometriese funksies	201
6.12	Opsomming	227
6.13	Vasleggingsoefeninge	230
	Aanhangsel 1	234

HOOFSTUK 7 Funksies en grafieke

	Aanhef	237
7.1	Funksienotasie	238
7.2	Hersiening van liniêre funksies	238
7.3	Kwadratiese funksie $y = ax^2$	241
7.4	Kwadratiese funksie: $y = ax^2 + q$	243
7.5	Eksponensiële grafiek $y = ab^x$	248
7.6	Die hiperbool	250
7.7	Lees van grafieke af	252
7.8	Opsomming	253
7.9	Konsolideringsoefeninge	254

HOOFSTUK 8 Meetkunde

	Aanhef	257
8.1	Hersien hoeke wat met parallelle lyne verband hou	258
8.2	Hersien die hoeke van driehoeke	265
8.3	Kongruensie van driehoeke	274
8.4	Gelykvormigheid van driehoeke	285
8.5	Ondersoek vierhoeke	290

8.6 Die stelling van Pythagoras 305
8.7 Opsomming 309
8.8 Konsolidasie-oefeninge 310
Addendum 314

HOOFSTUK 9 Analitiese meetkunde

Aanhef 315
9.1 Gebruik die Cartesiese vlak om posisies van punte te bepaal 316
9.2 Afstand tussen twee punte 317
9.3 Middelpunt koördinate van ’n lynsegment wat twee punte verbind 322
9.4 Gradiënt van lynsegment 324
9.5 Vergelyking van ’n reguit lyn wat deur twee punte loop 329
9.6 Opsomming 330
9.7 Konsolidasie oefeninge 331

HOOFSTUK 10 Sirkels, hoeke, en hoekbeweging

Aanhef 333
10.1 Maak gereed om te leer 334
10.2 Hersiening van *pi* (π) 335
10.3 Meting van hoeke: Grade (°) 337
10.4 Omskakeling van grade na radiale 343
10.5 Opsomming 346
10.6 Konsolideringsoefeninge 347

HOOFSTUK 11 Finansies en groei

Aanhef 349
11.1 Belegging deur enkelvoudige rente 350
11.2 Belegging deur saamgestelde rente 355
11.3 Huurkoop 360
11.4 Inflasie 363
11.5 Wisselkoers 367
11.7 Opsomming 369
11.8 Konsolideringsoefeninge 370

WOORDELYS **373**

ANTWOORDE **377**

1 Inleiding

In hierdie hoofstuk gaan jy:

- van die konsepte wat ons in algebra gebruik, hersien
- sekere wiskundige konvensies hersien
- jouself oriënteer t.o.v. jou sakrekenaar sowel as om dit as hulpmiddel tot leer te gebruik
- basiese kwantiteite wat ons in wetenskaptegnologie in ons daaglikse lewe gebruik, hersien.
- die volgorde van bewerkings hersien
- die eienskappe van bewerkings hersien
- berekeningseienskappe van heelgetalle hersien
- die konsep van ekwivalensie hersien
- algebraïese uitdrukkings vereenvoudig
- sommige situasies modelleer
- gesprek voer oor uitdrukkings, vergelykings en identiteite

1.1 Algebraïese taal

Oefening

1 Onthou jy nog wat die volgende wiskundige terme beteken? Kopieer en voltooi die tabel hieronder.

		Verduideliking/betekenis	Voorbeeld
(a)	Produk		
(b)	Kwosiënt		
(c)	Som		
(d)	Verskil		
(e)	Faktor		
(f)	Optellingsinverse		
(g)	Vermenigvuldigingsinverse		
(h)	Optelling identiteit		
(i)	Vermenigvuldiging identiteit		
(j)	Koëffisiënt		
(k)	Oplossing		
(l)	Omgekeerdes		
(m)	Inset veranderlike		
(n)	Uitset veranderlike		

1.2 Woorde wat ons in Algebra gebruik

Wanneer ons getalle bymekaar sit of getalle bymekaar tel soos $5x + 3x$ noem ons dit **optel.**

Aftrekking is die proses om een getal van ’n ander af te trek of te verminder, bv. $13y - 12y$.

Die verkorte proses om getalle ’n aantal kere bymekaar te tel, word **vermenigvuldiging** genoem, soos $2 \times 3y \times 6x$.

Wanneer ons die proses van **deling** gebruik om ’n getal in dele te deel, wil ons eintlik wys hoeveel keer een getal in ’n ander vervat is.

’n **Eenterm** soos $6x^2$ is ’n uitdrukking wat net een term bevat.

’n **Tweeterm** is wanneer ’n uitdrukking die som van twee terme is, soos $-3x + 7$**.**

’n **Drieterm** is wanneer ’n uitdrukking die som van drie terme is, soos $100x^3 + 45x^2 - 50x$.

Die simbool x word dikwels gebruik om die **veranderlike** in ’n algebraïese uitdrukking aan te dui, maar ander simbole mag ook gebruik word.

In die eenterm $-15x^3$, is -15 die koëffisiënt van x^3.

In die tweeterm $17x - 3$, en die tweeterm $33x^2 + 14$, word die getalle -3 en 14 **konstantes** genoem.

Oefening

2 Voltooi die tabel; die eerste ry is as voorbeeld vir jou gedoen:

	Uitdrukking	Tipe uitdrukking	Simbool wat die veranderlike verteenwoordig	Konstante	Koëffisiënt van
(a)	$3x^2 - 7x + 9$	Drieterm	x	9	x is -7
(b)	$5s^3 - 11$				s^3 is
(c)	$-1{,}2t + \pi$				t is
(d)	$105k$			0	k *is*
(e)	$11 - p + p^3$				P^3 is

1.3 Wiskundige konvensies en uitdrukkings

Wiskundiges het op sekere dinge besluit wat wiskundige werk makliker sal maak indien alle mense hierdie ooreenkomste navolg.

- **Vermenigvuldigingsteken:** Die vermenigvuldigingsteken word dikwels in algebraïese uitdrukkings weggelaat. $5 \times p$ word geskryf as $5.p$, ook as $5p$, en ons skryf $-3(a + 4)$ in plaas van $-3 \times (a + 4)$.
- **Om 'n produk te skryf wat 'n getal en 'n lettersimbool bevat:** Dit is algemene praktyk om eers die bekende getal (konstante) in 'n produk te skryf; bv. $11a$ in plaas van $a11$.
- **Wanneer die getal voor die letter simbool 1 is:** Dit is algemene praktyk om die koëffisiënt 1 in 'n getal soos $1a$ weg te laat en in plaas daarvan slegs a te skryf, of in die geval van $-1a$ skryf ons net $-a$.

1.4 Kwantiteite

Ingenieurs, landmeters, wetenskaplikes, en gewone burgers kom almal met verskillende kwantiteite in aanraking, en werk daarmee. 'n **Kwantiteit** is enige iets wat ons kan meet of tel. Jou lengte is 'n kwantiteit – ons kan dit meet. Indien jy 1,8 m lank is, is 1,8 'n getal en meter is 'n eenheid van meting.

Oefening

3 Verskaf jou eie voorbeelde van kwantiteite en hul eenhede van meting. Jy kan jou inligting in 'n tabel soos die een hieronder organiseer.

Kwantiteit	Eenheid van Meting

Daar bestaan 'n aanvaarde internasionale stelsel van eenhede wat bekend staan as die Internasionale Stelsel van Maateenhede, afgekort as **SI**. Daar is sewe basiese kwantiteite waarop die SI gebaseer is. Jy het alreeds met sommige van hierdie kwantiteite in jou studies gewerk.

Oefeninge

4 Kopieer en voltooi die tabel hieronder.

Basis Kwantiteit	SI (Internasionale Sisteem van maateenhede) basiseenhede	
	Naam	Simbool
termodinamiese temperatuur	kelvin	K
substansie hoeveelhede	mole	mol
liggewende intensiteit	candela	cd
lengte		
massa		
tyd		
elektriese stroom		

5 Benoem die geskikte eenhede vir meting:

(a) Die hoeveelheid sement wat 'n sak kan bevat.

(b) Die hoeveelheid sand wat in 'n bakkie vervoer kan word.

(c) Die hoogte van 'n skoolgebou.

(d) Die afstand tussen Johannesburg en Kaapstad.

(e) Die kapasiteit van brandstof in 'n motor.

6 Noem 'n item wat gebruik kan word om die volgende metrieke eenhede te skat:

(a) 'n sentimeter

(b) 'n meter

(c) 'n liter

(d) 'n kilometer

(e) 'n kilogram

1.5 Verwantskap tussen kwantiteite

Oefening

7 Bepaal watter pare kwantiteite hieronder aan mekaar verwant is. Indien dit so is, verduidelik of die waarde van die gegewe kwantiteit (regs) vermeerder of verminder indien die waarde van die ooreenstemmende kwantiteit op die linkerkant vermeerder.

(a)	Aantal minute wat verloop terwyl die motor teen 120 kilometer per uur ry.	Hoeveelheid petrol in die petrol tenk.
(b)	Aantal lekkers geëet.	Aantal kalorieë ingeneem.
(c)	Omtrek van ’n vierkant.	Oppervlakte van die vierkant.
(d)	Aantal minute wat verloop het terwyl die motor teen 120 kilometer per uur ry.	Hoeveelheid petrol deur die motor verbruik.
(e)	Die basis van ’n driehoek.	Die oppervlakte van ’n driehoek.
(f)	Die radius van die sirkel.	Die omtrek van die sirkel.

1.6 Eienskappe van bewerkings

Bewerkings met getalle het die volgende eienskappe:

Die distributiewe eienskap

Die **distributiewe eienskap** beteken eenvoudig dat wanneer ’n getal in verskillende dele opgebreek word en elke deel word vermenigvuldig, is die antwoord dieselfde as wanneer die getal in sy geheel vermenigvuldig word.

Voorbeeld: $5 \times 27 = 5 \times 20 + 5 \times 7$ (Ons het 27 opgebreek in 20 en 7.)

Ons kan die distributiewe eienskap op ’n algemene wiskundige wyse uitdruk deur te sê dat indien a, b, en c drie getalle is, dan is $a(b + c) = ab + ac$.

Ons sê ook dat vermenigvuldiging voorkeur verkry bo optelling.

Oefeninge

8 Sonder om jou sakrekenaar te gebruik, bereken die waarde van die volgende. Dit is belangrik om al jou bewerking te wys.

(a) $181{,}5 \times 3 + 181{,}5 \times 7$ (b) $703 \times 8 + 703 \times 2$ (c) $17 \times 43 + 17 \times 57$

9 Ondersoek of die volgende uitdrukkings dieselfde antwoord sal hê.
Gee ’n rede vir jou antwoord.

(a) 35×112 en $35 \times 100 + 35 \times 12$ (b) $2(x + y)$ en $2x + y$

10 Ondersoek of die volgende uitdrukkings dieselfde antwoord sal hê.
Gee ’n rede vir jou antwoord.

(a) $70 \times 17 - 70 \times 7$ en 70×10 (b) $53 \times 22 - 53 \times 2$ en 53×20

Die kommutatiewe eienskap van vermenigvuldiging en optelling

Die **kommutatiewe eienskap** van vermenigvuldiging beteken bloot dat die antwoord nie verander wanneer jy die volgorde van faktore in vermenigvuldiging verander nie.
Byvoorbeeld: $15 \times 11 = 11 \times 15$

Ons merk ook dat: $15 + 11 = 11 + 15$

Kommutatiewe eienskap vir optel beteken dat wanneer die volgorde waarin getalle bymekaar getel word verander, dit nie die antwoord verander nie.

In die algemeen, as x en y enige getalle is, dan is $xy = yx$ en $x + y = y + x$.

Die assosiatiewe eienskap van vermenigvuldiging en optelling

Die **assosiatiewe eienskap** vir vermenigvuldiging beteken eenvoudig dat die volgorde waarin jy die getalle vermenigvuldig, nie die antwoord verander nie.

Die assosiatiewe eienskap vir optel beteken dat die volgorde waarin jy die getalle bymekaar tel, nie die antwoord verander nie.

In die algemeen, as x, y en z getalle is, dan is die volgende altyd waar:

$xyz = xzy = yzx$ en $x + y + z = x + z + y = y + z + x$

1.7 Faktorisering en uitbreiding

Die uitdruk van getalle of algebraïese uitdrukkings as produkte van hulle faktore, word **faktorisering** genoem.

Ons kan ’n getal as ’n produk van sy faktore skryf. Byvoorbeeld: 35 kan geskryf word as 7×5,

$35 = 7 \times 5$ of $35 = 5 \times 7$ (a.g.v. die kommutatiewe eienskap van vermenigvuldiging).

Ons kan ’n algebraïese uitdrukking soos $xy + xz$ as ’n produk van sy faktore skryf, $x(y + z)$.

Ons kan $xy - xz$ ook uitdruk as ’n produkuitdrukking $x(y - z)$.

Oefeninge

11 Skryf die volgende getalle as produkte van hul faktore. (Daar mag moontlik meer as een manier wees.)

(a) 12 (b) –24 (c) 17

12 Skryf elk van die uitdrukkings hieronder as ’n produkuitdrukking.

(a) $ax + bx$ (b) $6x - 3$ (c) $4 + 16x$
(d) $7x^2 - x$ (e) $5x - 15$ (f) $14 - 7x^2$
(g) $3x - 3$ (h) $15x - 6$

1.8 Die verskuilde patroon van die distributiewe eienskap

Dit lyk asof somuitdrukkings soos $x^2 + 2xy + y^2$ nie pas by $xy + xz$ nie, maar wanneer ons die uitdrukking $x^2 + 2xy + y^2$ ontleed, kry ons:

$x.x + xy + xy + y.y$

$= (x.x + xy) + (xy + y.y)$

$= x(x + y) + y(x + y)$

$= (x + y)(x + y)$

Op hierdie manier, deur die distributiewe eienskap te gebruik, kan ons $x^2 + 5x + 6$ as volg faktoriseer:

$x^2 + 5x + 6$

$= x.x + 2x + 3x + 6$

$= x(x + 2) + 3(x + 2)$

$= (x + 2)(x + 3)$

Oefening

13 Faktoriseer elk van die uitdrukkings hieronder.

(a) $a^2 + 4a + 3$ (b) $4x^2 + 8x + 2$ (c) $x^2 + 2x + 1$
(d) $ac + bc + ad + bd$ (e) $x(a + b) + (a + b)$ (f) $15x^2 - 6x$

Uitbreiding

Wanneer ons ’n produkuitdrukking as ’n somuitdrukking skryf, sê ons dat ons die gegewe uitdrukking **uitgebrei** het.

Brei uit $(x + 1)(x + 3)$

$= x(x + 3) + 1(x + 3)$

$= x^2 + 3x + 1x + 3$

$= x^2 + 4x + 3$

Oefeninge

14 Brei elk van die uitdrukkings hieronder uit:

(a) $(a-b)(a+b)$

(b) $(a+b)(a+b)$

(c) $(a-b)(a-b)$

(d) $(p+q)(p+q)$

(e) $(p-q)(p-q)$

(f) $(p+q)(p-q)$

(g) $(a+b)(c+d)$

(h) $(a+b)(c-d)$

(i) $(x+3)(x+3)$

(j) $(x+3)(x-3)$

(k) $(x-3)(x-3)$

1.9 Nog 'n verskuilde patroon van die distributiewe eienskap

Dit kan ook van 'n uitdrukking soos $x^2 - 9$ gesê word dat dit nie lyk asof dit $xy + xz$ pas nie. Ons kan egter die uitdrukking $x^2 - 9$ as volg ontleed soos hieronder gewys word:

$x^2 - 9$

$= x^2 + 0x - 9$ (deur $0x$ by die uitdrukking $x^2 - 9$ by te tel, verander nie sy waarde nie)

$= x^2 + 3x - 3x - 9$ ($+ 3x - 3x = 0$; $+ 3x$ en $-3x$ is optellingsinverse)

$= x.x + 3x - 3x + 3.3$

$= x(x+3) - 3(x+3)$

$= (x+3)(x-3)$

Oefeninge

15 Faktoriseer nou elk van die volgende uitdrukkings:

(a) $x^2 - 4$

(b) $9 - x^2$

(c) $x^2 - 121$

(d) $121 - x^2$

(e) $169 - x^2$

(f) $x^2 - 169$

(g) $25 - x^2$

(h) $x^2 - 25$

(i) $p^2 - 1$

(j) $1 - p^2$

16 Bereken die kwadraat van elk van die volgende getalle sonder om jou sakrekenaar te gebruik:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25

17 Bereken die waarde van elk van die volgende sonder die gebruik van jou sakrekenaar. Wat let jy op? Probeer om die verwantskap tussen die twee stelle berekeninge te verduidelik.

(a) $11^2 – 9^2$ en $20 × 2$

(b) $12^2 – 8^2$ en $20 × 4$

(c) $13^2 – 7^2$ en $20 × 6$

(d) $14^2 – 6^2$ en $20 × 8$

(e) $15^2 – 5^2$ en $20 × 10$

18 Pas nou die kennis toe wat jy opgedoen het deur oefening 17 hierbo, om die volgende te bereken:

(a) $2\,341^2 – 2\,336^2$

(b) $100^2 – 99^2$

(c) $1\,000^2 – 999^2$

1.10 Bewerking eienskappe van heelgetalle

Teken die tabel oor en voltooi die laaste kolom.

Bewerking eienskap	Voorbeeld	Jou eie voorbeeld
Om ’n groter getal van ’n kleiner getal af te trek, veroorsaak ’n negatiewe getal.	$10 – 30 = –20$	
Om ’n heelgetal by te tel, het dieselfde effek as om sy optellingsinverse by te tel.	$3 + (–10)$ kan bereken word deur $3 – 10 = –7$ te doen	
Om ’n heelgetal af te trek, het dieselfde effek as om sy optellingsinverse by te tel.	$3 – (–10)$ kan bereken word deur $3 + 10 = 13$ te doen	
’n Negatiewe getal wat by sy ooreenstemmende positiewe getal getel word, gee vir ons 0.	$3 + (–3) = 0$	
Die produk van ’n negatiewe getal en ’n positiewe getal, is ’n negatiewe getal.	$(–15) × 6 = –90$	
Die produk van ’n negatiewe getal en nog ’n negatiewe getal, is ’n positiewe getal.	$(–15) × (–6) = 90$	

2154 TechMaths Afr G10 LB.indb 9 2015/11/25 4:12 PM

Oefening (geen sakrekenaar mag vir hierdie oefening gebruik word nie)

19 Verwys na die tabel van bewerkingseienskappe van heelgetalle hierbo om die oefening hieronder te doen. Kopieer en voltooi bewerkingstabelle 1 en 2 op die volgende bladsy. (Jou onderwyser sal moontlik vir jou ’n kopie van die tabel gee wat jy moet voltooi en in jou oefeningboek plak.)

Op jou sakrekenaar kom hierdie sleutels voor: (–) en –.
Die eerste sleutel word gebruik om negatiewe getalle in te voer en die tweede sleutel word slegs vir aftrek gebruik.

Bewerkingstabel 1

+	–50	–40	–30	–20	–10	0	10	20	30	40	50
–50											0
–40										0	
–30									0		
–20								0			
–10							0				
0						0					
10					0						
20				0							
30			0								
40		0									
50	0										

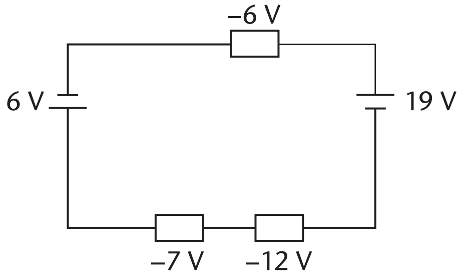
Bewerkingstabel 2

×	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5
–50						0					
–40						0					
–30						0					
–20						0					
–10						0					
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10						0					
20						0					
30						0					
40						0					
50						0					

2154 TechMaths Afr G10 LB.indb 10 2015/11/25 4:12 PM

20 Indien jy enige stroombaan met baie lusse het, is die algebraïese som van die stroomspanninge in die stroombaan nul: dit staan bekend as Kirchoff se Wet op Stroomspanning.

’n Geslote stroombaan word in die volgende figuur aangedui. Maak seker of die stroomspanning in die figuur hieronder staaf wat Kirchoff se Wet op Stroomspanning beweer.



1.11 Ekwivalensie

Numeriese uitdrukkings

Algebraïese uitdrukkings wat dieselfde numeriese waardes (antwoord) het, word **ekwivalente numeriese uitdrukkings** genoem.

Oefening

21 Sê of die volgende pare uitdrukkings ekwivalente uitdrukkings is, of nie:

(a) $20 + (30 + 70)$ en $20 + 30 + 70$

(b) $20 + (30 – 70)$ en $20 + 30 – 70$

(c) $20 – (30 + 70)$ en $20 – 30 – 70$

(d) $20 – (30 – 70)$ en $20 – 30 + 70$

Algebraïese uitdrukkings

Algebraïese uitdrukkings wat dieselfde numeriese waardes het vir alle waardes van die getalle wat deur letters verteenwoordig word, word **ekwivalente uitdrukkings** genoem. Twee algebraïese uitdrukkings $2x+ 3x$ en $5x$ is ekwivalent, omdat hulle dieselfde waardes vir enige insetveranderlike x het. Ons kan dit skryf deur wiskundige taal en konvensie te gebruik as $2x + 3x = 5x$ vir alle waardes van x.

Oorweeg die volgende tabel as ’n toets. Hou in gedagte dat ons nie alle moontlike waardes van die insetveranderlike x skryf om te sien of die antwoord altyd dieselfde sal wees of nie.

x	–17	–9	–4	–1	0	7	11	20	45
$2x + 3x$	–85	–45	–20	–5	0	35	55	100	225
$5x$	–85	–45	–20	–5	0	35	55	100	225

Uitgewerkte voorbeeld

Is die volgende algebraïese uitdrukkings ekwivalent?

$(b + 2) - (b - 5)$ en $(b + 2) - b + 5$

Thandeka vervang die getal b met 8 in die uitdrukkings soos in die tabel hierbo gedoen is, om te toets:

$(b + 2) - (b - 5)$	en	$(b + 2) - b + 5$
$= (8 + 2) - (8 - 5)$		$= (8 + 2) - 8 + 5$
$= 10 - 3$		$= 10 - 8 + 5$
$= 7$		$= 7$

Throshini sê vir Thandeka dat sy kan wys dat die twee uitdrukkings ekwivalent is sonder om b met getalle te vervang. Hoe dink jy sal Throshini vir Thandeka wys dat die twee uitdrukkings ekwivalent is?

Oefening

22 Gebruik Throshini se metode en sê of die volgende uitdrukkingspare ekwivalent is of nie:

(a) $20x + (30x + 70)$ en $20x + 30x + 70$

(b) $20x + (30x - 70)$ en $20x + 30x - 70$

(c) $20x - (30x - 70)$ en $20x - 30x + 70$

(d) $20x - (30x + 70)$ en $20x - 30x - 70$

(e) $a - (150 + 205)$ en $a - 150 - 205$

(f) $1200 - (500 + a)$ en $1200 - 500 - a$

(g) $708 - (a + b)$ en $708 - a + b$

(h) $b + 419 - a$ en $b + (419 - a)$

Die konsep van ekwivalensie is bruikbaar in sover dit ons toelaat om een uitdrukking met ’n ander te vervang, omdat die ekwivalente uitdrukkings dieselfde getal verteenwoordig, of ons sê dat hulle dieselfde waarde het.

Vir enige getalle x, y en z:
- $x + (y + z) = x + y + z$
- $x + (y - z) = x + y - z$
- $x - (y + z) = x - y - z$
- $x - (y - z) = x - y + z$

Ons kan dus uitdrukkings aan die linkerkant vervang met die uitdrukkings aan die regterkant en omgekeerd.

1.12 Vereenvoudiging van uitdrukkings

Wanneer ons 'n uitdrukking op 'n gerieflike manier skryf, sê ons dat ons dit **vereenvoudig** het. Ons vereenvoudig 'n uitdrukking deur:

- Die kombinasie van gelyksoortige terme, $26x + 4x$ kan met 'n eenvoudiger uitdrukking $30x$ vervang word, omdat hulle dieselfde resultaat vir enige waarde van x sal gee. Ons sê $26x$ en $4x$ is gelyksoortige terme.
- Herrangskik die terme van die uitdrukking, omdat die volgorde waarin die getalle bygevoeg word, nie die antwoord beïnvloed nie. Byvoorbeeld:
  $(-3x + 14) + (5x + 26) = -3x + 14 + 5x + 26 = -3x + 5x + 14 + 26 = 2x + 40$

Let op dat die nie-gelyksoortige terme $2x + 40$ nie deur $42x$ vervang kan word nie. Ons sê $2x$ en 40 is nie-gelyksoortige terme.

Uitgewerkte voorbeeld

Die uitdrukking $x(x + 2) - 7x$ vereenvoudig tot $x^2 - 5x$ soos hieronder aangedui:

$x(x + 2) - 7x$

$= x^2 + 2x - 7x$

$= x^2 - 5x$

Oefeninge

23 Wat is die waarde van elke uitdrukking as $x = 23{,}45$ en $y = 13{,}92$?

(a) $25x - (7x + 5)$

(b) $13x + 5 - (10x - 4)$

(c) $12x + (4y - 5x) + 7x - 2y$

(d) $(3{,}3x + 2{,}1y) - (1{,}4y - 1{,}7x) - (4x + 0{,}7y)$

24 Bepaal die waarde van die volgende uitdrukkings as $x = 7{,}3$. Jy mag nie jou sakrekenaar gebruik nie.

(a) $4x + 3 + 6x + 2$

(b) $2(5x + 3)$

(c) $(2 + 17x) - (7x + 5)$

(d) $1{,}3x + 3{,}7x + 2{,}6x + 2{,}4x$

25 Hoeveel sal $3x(6x + 10) - 9x(2x + 3)$ wees as $x = \frac{3}{2}$?

2154 TechMaths Afr G10 LB.indb 13 2015/11/25 4:12 PM

1.13 Van numeriese berekeninge tot algebraïese berekeninge

Die getal 5 432 in uitgebreide vorm, kan as 5 000 + 400 + 30 + 2 geskryf word, en dit kan verder uitgebrei word as 5 × 1 000 + 4 × 400 + 3 × 10 + 2.

Verder, getalle kan in uitgebreide vorm geskryf word deur eksponente te gebruik en dan verder in veelterm vorm geskryf word:

$5\,432 = 5 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 3 \times 10 + 2$

'n Veelterm vorm vir 5 432 is $5x^3 + 4x^2 + 3x + 2$ ($x = 10$)

Oefeninge

26 Skryf elk van die volgende getalle eers in 'n uitgebreide vorm deur van eksponente gebruik te maak, en gee dan die voorgestelde veelterm.

(a) 9 876 (b) 357

(c) 2 468 (d) 123

27 Gebruik die numeriese berekening om na te dink oor die algebraïese berekening. Gee die antwoord tot die algebraïese berekening.

(a)
$$\begin{array}{r} 7x^3 + 6x^2 + 5x + 4 \\ + \; 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1 \\ \hline \\ \hline \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{r} 9x^2 + 8x + 7 \\ + \; 3x + 2 \\ \hline \\ \hline \end{array}$$

(c)
$$\begin{array}{r} 9x^2 + 8x + 7 \\ + \; 4x + 3 \\ \hline \\ \hline \end{array}$$

(d)
$$\begin{array}{r} 9x^2 + 8x + 7 \\ - \; 4x^2 - 3 \\ \hline \\ \hline \end{array}$$

(e)
$$\begin{array}{r} 9x^2 + 8x + 7 \\ - \; 3x^2 - 2 \\ \hline \\ \hline \end{array}$$

28 Bereken die som en die produk van die veelterm in elke deel.

(a) $x + 2$ en $x - 3$ (b) $-x + 1$ en $x + 1$

(c) $1{,}2x$ en $10x + 3$ (d) $0{,}7x + 4$ en $0{,}3x + 6$

(e) $2x + 1$ en $x - 1$

1.14 Modellering van situasies

In algebra gebruik ons letters van die alfabet om kwantiteite en verwantskappe tussen kwantiteite voor te stel.

Oefeninge

29 Skryf 'n formule om die verwantskap tussen elk van die kwantiteite hieronder te beskryf.

(a) Daar is sewe dae in 'n week.

(b) Daar is sestig minute in 'n uur.

(c) By een skool is daar 25 keer meer leerders as onderwysers.

(d) Verduidelik waarvoor elke letter wat jy gebruik het in elk van die formules in (a) – (c) hierbo, staan.

(e) Toets elke formule deur die tabelle hieronder te voltooi.

29 (a)	Aantal weke	1	2	3	4	5	12	24	33	52
	Aantal dae									

29 (b)	Aantal ure	1	2	3	6	18	24	36	48	60	72
	Aantal minute										

29 (c)	Aantal leerders	100	200	300	350	405	600	660	809	1 000	1 800
	Aantal onderwysers										

1.15 Oplossing, uitdrukking, vergelyking, identiteit, en onmoontlikheid

In die vorige afdelings het ons gepraat oor die vereenvoudiging van algebraïese uitdrukkings. 'n Algebraïese uitdrukking soos $5x + 3$ is gelyk aan enige getal, afhangende van die waarde van x.

Oefeninge

30 Kopieer en voltooi die tabel hieronder vir die gegewe waarde(s) van x.

x	–10	–5	–1	0	8	14	20	23	50
$5x + 3$									

31 Bestudeer jou voltooide tabel in oefening 30 en gebruik dit om die vrae hieronder te antwoord.

(a) Vir watter waarde van x is $5x + 3 = 103$?

(b) Vir watter waarde van x is $5x + 3 = 3$?

(c) Vir watter waarde van x is $5x + 3 = -2$?

(d) Vir watter waarde van x is $5x + 3 = -47$?

’n Wiskundige uitdrukking soos $5x + 3 = 103$ kan waar wees of dit kan vals wees, afhangende van die waarde van x wat ons gekies het. Die uitdrukking $5x + 3 = 103$ is slegs waar indien $x = 20$. Enige ander waarde van x maak die uitdrukking vals.

32 Wat noem ons ’n algebraïese uitdrukking wat waar is vir sommige waardes van ’n insetveranderlike?

Oplossings

Die **oplossing** van ’n vergelyking is die waarde(s) van die insetveranderlike wat die vergelyking ’n ware wiskundige uitdrukking maak. Soos ons opgemerk het, het die vergelyking $5x + 3 = 103$ slegs een oplossing, naamlik $x = 20$. ’n Vergelyking sal of een oplossing, geen oplossing, of vele oplossings hê. ’n Algebraïese uitdrukking soos $2x + 3x = 5x$, wat waar is vir alle waardes van die insetveranderlikes, word ’n **algebraïese identiteit** genoem.

’n Algebraïese uitdrukking soos $x + 10 = x$ word ’n **algebraïese onmoontlikheid** genoem; daar is geen waarde(s) van x wat die uitdrukking ’n ware wiskundige uitdrukking kan maak nie.

Oefeninge

Oorweeg die algebraïese uitdrukkings hieronder:

33 $4x + 12$ en $7x + 3$

(a) Is hierdie twee uitdrukkings ekwivalent? Verduidelik.

(b) Is $4x + 12 = 7x + 3$ ’n algebraïese identiteit? Verduidelik.

(c) Wat gebeur wanneer $x = 3$?

34 $10x + 40 = 10x + 50$

(a) Is $10x + 40 = 10x + 50$ ’n algebraïese identiteit?

(b) Is dit moontlik om enige waarde vir x te vind waarvoor $10x + 40 = 10x + 50$?

35 Gee ’n voorbeeld vir elk van die onderstaande uitdrukkings: sê vir watter waarde(s) van x (indien enige) elk van die uitdrukkings waar is deur in die regte kolom met ’n kruisie te merk.

	Uitdrukking	Waar vir enige waarde van x	Nooit waar vir enige waarde van x nie	Waar vir sommige waarde(s) van x (noem die waarde(s) van x waarvoor die uitdrukking waar is)
(a)	$2x + 6 = 24$			
(b)	$2x + 6 = 2(x + 3)$			
(c)	$2x + 6 = 2x + 3$			
(d)	$2x + 6 = 3x + 1$			

1.16 Die wetenskaplike sakrekenaar

Daar word geen spesiale wetenskaplike sakrekenaar vir hierdie vak voorgeskryf nie. Enige wetenskaplike, nie-programmeerbare sakrekenaar is geskik vir jou studies. Verskillende wetenskaplike sakrekenaars het verskillende funksies en dit is jou verantwoordelikheid om jou sakrekenaar en sy werking te leer ken.

Die meeste wetenskaplike sakrekenaars het algebraïese logika; die bewerkings in ’n uitdrukking kan in die sakrekenaar ingevoer word, waar die uitdrukking gelees kan word (links na regs). Die sakrekenaar volg die konvensionele volgorde van bewerkings outomaties.

Instelling van die sakrekenaar

Jy kan jou sakrekenaar instel om óf in natuurlike uitleg óf liniêre uitleg te werk. Natuurlike uitleg veroorsaak dat breuke, irrasionale getalle, uitdrukkings, en sekere funksies die uitleg is soos wat jy dit op papier sal sien. Liniêre uitleg stel breuke en ander uitdrukkings in ’n lyn voor. (Bestudeer jou sakrekenaar se handleiding hiervoor.)

Volgorde van bewerkings

Dit maak ’n verskil hoe ons kies watter bewerkings om eerste te doen wanneer ons ’n uitdrukking soos $7 + 3 \div 10 \times 1$ teenkom.

Oefeninge

36 Bereken die waarde van die uitdrukking $7 + 3 \div 10 \times 1$ sonder om jou sakrekenaar te gebruik.

37 Bereken nou die waarde van die uitdrukking met behulp van ’n sakrekenaar.

38 Het jy dieselfde antwoord gekry as die sakrekenaar?

39 Dink bietjie na oor die volgorde waarin jy die verskillende bewerkings gedoen het. Volg die sakrekenaar jou volgorde?

Wetenskaplike sakrekenaars is geprogrammeer om voorafgestelde wiskundige reëls te volg. Wanneer ons die knoppies in ’n sekere volgorde druk, doen die sakrekenaar die bewerkings volgens die reëls waarmee dit geprogrammeer is. Gebruik nou ’n wetenskaplike sakrekenaar in die oefening hieronder.

Oefeninge

40 Teken die volgende tabel in jou oefeningboek oor. Bereken eers die waarde van die getal uitdrukking in die tabel op jou eie metode. Gebruik dan ’n wetenskaplike sakrekenaar om die waarde van die uitdrukking te bereken.

	Getal uitdrukking	Jou eie metode van berekening en antwoord	Wetenskaplike sakrekenaar se antwoord	Verduidelik die verskil in antwoorde, indien enige
(a)	$40 + 50 \times 10$			
(b)	$12 \times 5 + 7$			
(c)	$20 \times 5 + 3 \times 10$			
(d)	$11 + 9 \times 2 + 1$			
(e)	$34 + 3 \times 11 \times 2$			
(f)	$2 \times 50 \times 301$			
(g)	$2 + 50 + 301$			
(h)	$107 \times (1\,293 - 981)$			
(i)	$(27 + 73) \times (4\,659 - 3\,659)$			
(j)	$2\,028 \div 169 - 12$			
(k)	$12 \div 2 \times 6$			
(l)	$12 \times 6 \div 2$			
(m)	$50 + 2 - 30$			
(n)	$50 - 30 + 2$			
(o)	$1 + 3^2$			
(p)	$(1 + 3)^2$			
(q)	$1^2 + 3^2$			
(r)	$1^2 + 2 \times 3 + 3^2$			
(s)	$5 + 3(1 + 9)^2 - 2^3$			
(t)	$(\sqrt{64} + 2)3 + 20 \times 5 - 5$			

41 Vervang elk van die asterisks (*) met die korrekte rekenkundige bewerkingsteken om die volgende waar te maak. Moenie hakies gebruik nie.

(a) 12 * 5 * 2 * 1 = 3

(b) 18 * 12 * 3 * 2 = 12

(c) 24 * 4 * 2 * 3 = 7

(d) 12 * 4 * 6 * 2 = 11

(e) 60 * 20 * 50 = 30

42 Plaas hakies en die bewerkingstekens +, –, ×, ÷, in die korrekte plekke om die volgende uitdrukkings waar te maak.

(a) 12 * 3 * 1 = 5

(b) 20 * 5 * 2 * 3 = 5

(c) 24 * 6 * 2 * 2 * 4 = 2

(d) 8 * 3 * 8 * 3 = 8 * 8 * 3 * 3

Berekening met ’n konstante

Jy kan jou sakrekenaar programmeer om ’n herhaling van bewerkings met dieselde getal te bespoedig.

Volg die volgende sleutel volgorde op jou sakrekenaar:

Sleutel volgorde 1: 3 + 3 =

Sleutel volgorde 2: + 3 =

Sleutel volgorde 3: = = = = = =

Het jou sakrekenaar die volgorde 3; 6; 9; 12; 15; 18... gegenereer?

Oefeninge

43 Kies ’n sleutel volgorde op jou sakrekenaar om ’n $\longrightarrow \boxed{+11} \longrightarrow$ masjien soos volg te maak:

Skryf die eerste 5 getalle van die volgorde wat jou sakrekenaar gegenereer het neer; begin by 11.

44 Voltooi die onderstaande tabel. Moenie ’n sakrekenaar vir hierdie oefening gebruik nie.

Term posisie	1	2	3	4	5	10	17	23	35	100
Term	3	6	9	12	15					

45 Kies ’n sleutel volgorde op jou sakrekenaar om ’n $\longrightarrow \boxed{-10} \longrightarrow$ masjien te maak:

Begin by 50 en skryf die volgende 5 terme in die patroon neer.

(a) Watter term neem die 12de posisie in die patroon in?

(b) Watter term neem die 24ste posisie in die patroon in?

(c) Watter term neem die 43ste posisie in die patroon in?

46 Kies ’n sleutel volgorde op jou sakrekenaar om ’n $\longrightarrow \boxed{\times 3} \longrightarrow$ masjien te maak:

(a) Sleutel volgorde 1: Druk 2

(b) Sleutel volgorde 2: × 3

(c) Sleutel volgorde 3: =

(d) Sleutel volgorde 4: × 3

(e) Sleutel volgorde 5: = = = = =

47 (a) Skryf die eerste drie terme van die volgorde wat jy op oefening 46 hierbo gegenereer het, neer.

(b) Voltooi nou die tabel hieronder. Jy mag jou sakrekenaar gebruik.

Term posisie	1	2	3	13	25	46	57	88	91
Term	2	6	18						

48 Vir elk van die volgende, kies ’n sleutel volgorde op jou sakrekenaar om die gegewe volgorde van getalle te genereer.

(a) 30; 60; 90; 120; ...

(b) 3; 10; 17; 24; ...

(c) 1; 3; 9; 27; ...

(d) 1; 2; 4; 8; ...

(e) 1 000; 900; 800; ...

(f) 1 000; 500; 250; ...

Magte

In die uitdrukking y^x, verteenwoordig die letter y die grondtal en die letter x verteenwoordig die eksponent of indeks. Die uitdrukking y^x word derhalwe die mag genoem. Ons sê die grondtal y word verhef tot die eksponent x.

Oefening

49 Gebruik jou sakrekenaar om die volgende te vereenvoudig:

(a) 5^3

(b) 3^5

(c) $1{,}5^{2{,}1}$

(d) $1{,}5^2$

(e) -3^2

(f) (-3^2)

(g) $(-3)^2$

(h) $-(3)^2$

Die vierkant en die vierkantswortel sleutels

Indien $x^2 = 25$, word die oplossing van hierdie vergelyking die vierkantswortel van 25 genoem. Die getal 25 het twee vierkantswortels, naamlik 5 en –5. Ons noem 5 die hoof-vierkantswortel of positiewe vierkantswortel van 25. Die simbool $\sqrt{}$ word vir die hoof-vierkantswortel gebruik. Jou sakrekenaar sal dus vir jou die antwoord vir $\sqrt{25}$ gee as 5 en nie as –5 nie.

Oefening

50 Vind 'n volgorde van sleutels wat jy sal druk in elk van die gevalle hieronder. Teken die tabel oor en voltooi:

	Berekening om te doen	Jou antwoord	Sakrekenaar se antwoord	Verduidelik die verskil indien enige
(a)	3^2			
(b)	$9 + 4^2$			
(c)	$(9 + 4)^2$			
(d)	$\sqrt{(9 + 4)^2}$			
(e)	$\sqrt{9^2 + 4^2}$			
(f)	$\sqrt{9 + 4}$			
(g)	$\sqrt{3^2}$			
(h)	$9 + \sqrt{4^2}$			
(i)	$\sqrt{9} + \sqrt{4^2}$			

Berekeninge met breuke

Ons het alreeds genoem dat 'n sakrekenaar met algebraïese logika ons toelaat om die uitdrukking in die sakrekenaar in te voer soos dit gelees word. Sulke berekeninge word kettingberekeninge genoem. Wanneer ons met breuke werk, is dit nodig om die betekenis van breuk notasie te bespreek.

Uitgewerkte voorbeeld

Bereken $\dfrac{8{,}74 + 9{,}48}{5{,}6 \times 3{,}4}$ sonder om die breuk-sleutel op jou sakrekenaar te gebruik.

Deling notatasie: $(8{,}74 + 9{,}48) \div (5{,}6 \times 3{,}4)$

Sleutel volgorde 1: $(8{,}74 + 9{,}48) \div (5{,}6 \times 3{,}4) =$

Sleutel volgorde 2: $8{,}74 + 9{,}48 = \div 5{,}6 \div 3{,}4 =$

Het jy dieselde antwoord in die twee verskillende sleutel volgordes gekry?

Oefeninge

51 Bepaal elk van die volgende om seker te maak dat die drie notasies in elke geval ekwivalent is. Albei verdelingsnotasies in afdeling A is kettingberekeninge wat as sakrekenaar sleutel volgordes vir berekeninge met breuke gebruik kan word.

In afdeling B sal jy meer leer omtrent jou sakrekenaar deur van die natuurlike uitleg of van die liniêre uitleg gebruik te maak.

Afdeling A			Afdeling B	
Breuk notasie	Deel notasie met hakies	Deel notasie sonder hakies	Volgorde van sleutels om te druk	
			Natuurlike uitleg	Liniêre uitleg
$\frac{5}{6}$	–	$5 \div 6$		
$7\frac{3}{4}$	$(7 \times 4 + 3) \div 4$	$7 + 3 \div 4$		
$\frac{12}{4 \times 3}$	$12 \div (4 \times 3)$	$12 \div 4 \div 3$		
$\frac{15}{7+8}$	$15 \div (7 + 8)$	–		
$\frac{7+8}{15}$	$(7 + 8) \div 15$	–		
$\frac{9+6}{3+12}$	$(9 + 6) \div (3 + 12)$	–		
$\frac{5}{7} + \frac{2}{7}$	$(5 \div 7) + (2 \div 7)$	$5 \div 7 + 2 \div 7$		
$\frac{7}{8} \times \frac{3}{5}$	$(7 \div 8) \times (3 \div 5)$	$7 \div 8 \times 3 \div 5$		
$8 \div \frac{2}{3}$	$8 \div (2 \div 3)$	$8 \div 2 \times 3$		

52 Indien *a*, *b,* en *c* getalle verteenwoordig, skryf die sleutel volgordes neer (soos in die voorbeeld wat in die inleiding, berekening met breuke, gegee is) vir elk van die volgende uitdrukkings. Jy kan waar nodig toets deur getalle te gebruik wat dit vir jou maklik maak.

(*a*) $\frac{a+b}{c}$ (b) $a + \frac{b}{c}$ (c) $\frac{a+b}{a+c}$ (d) $a + \frac{b}{a+c}$

(e) $a + \frac{b}{a} + c$ (f) $\frac{a}{bc}$ (g) $\frac{a}{b} + \frac{a}{c}$ (h) $\frac{a}{b+a+c}$

Die x^{-1} sleutel

Die x^{-1} sleutel word gebruik om die wederkerigheid of vermenigvuldigingsinverse van 'n getal in die sakrekenaar in te sleutel. Kyk of jy die volgende op jou sakrekenaar kan vind:

Uitdrukking	Sleutel volgorde
$\frac{2}{5}$	$2 \times 5x =$
$3 + \frac{1}{5}$	$2 + 5x^{-1} =$

2154 TechMaths Afr G10 LB.indb 22 2015/11/25 4:12 PM

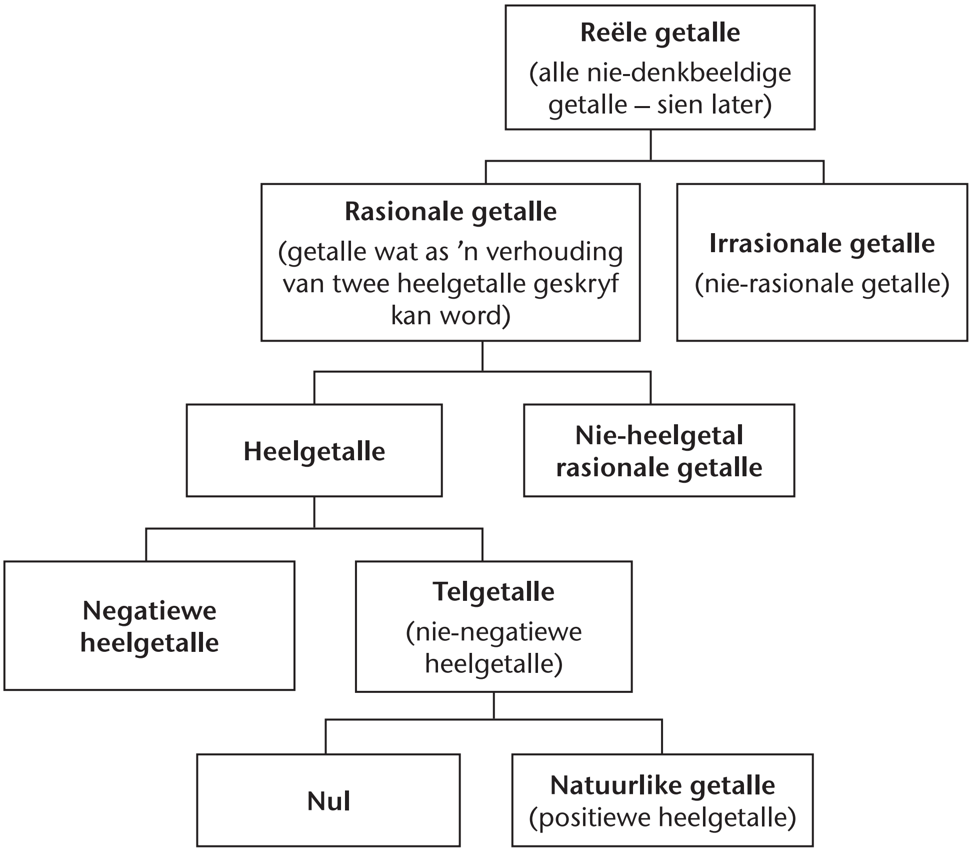
2 Getallestelsels

In hierdie hoofstuk, gaan jy:

- reële getalle in versamelings klassifiseer en die simbole van verskillende versamelings leer ken
- getalversamelings op die getallelyn voorstel as versameling punte
- getalversamelings voorstel in intervalnotasie en versamelingskeurdernotasie
- afronding hersien
- jou begrip van die verwantskap tussen rasionale getalle en irrasionale getalle verbeter,
- leer hoe om heelgetalle in binêre vorm uit te druk en hoe om wiskunde met binêre getalle te doen, en
- blootgestel word aan denkbeeldige getalle; hierdie getalle is nie reële getalle nie, maar hulle is nou-verwant aan reële getalle.

2.1 Reële getalle

Reële getalle is getalle waarmee ons elke dag werk. Soos jy moontlik in die verlede agtergekom het, klassifiseer ons hulle op ’n georganiseerde manier soos volg:



Ons noem elk van die ‘groepe’ van getalle ’n **versameling**. Die versameling wat aan die versameling bokant hulle gekoppel is, word **subversamelings** genoem. Wanneer ’n getal tot ’n versameling behoort, word dit ’n **element** van die versameling genoem. Hierdie rangskikking word ’n **hiërargie** of ’n hiërargiese struktuur genoem. Hoe om die diagram te verstaan:

- die verbindingslyne wys watter versamelings direk aan mekaar gekoppel is
- die getalle in enige versameling kom ook in al die versamelings bokant hulle voor soos wat jy die verbindingslyn volg

Jou klas kan byvoorbeeld as ’n versameling beskou word. Jy en die leerders in jou klas word dus as elemente van daardie versameling beskou.

Nog ’n voorbeeld: jy is ook ’n element van jou skool, wat ’n versameling van jou en al jou skoolmaats is. Jou klas is ’n subversameling van die skool.

Voorbeeld Hoe die versamelings met mekaar verband hou

- Die versameling van heelgetalle is ’n subversameling van rasionale getalle.
- Die versameling van rasionale getalle is ’n subversameling van die versameling van reële getalle.
- Dit beteken dat die versameling van heelgetalle ook ’n subversameling is van die versameling van reële getalle.
- Die getal 0,56 is ’n nie-heelgetal rasionale getal en ook ’n reële getal, maar dit is nie ’n heelgetal nie. Die telgetal 7 is duidelik ’n heelgetal, maar 7 is ook ’n rasionale getal en ’n reële getal.
- ’n Telgetal is óf nul óf ’n positiewe heelgetal, bv. 7 is ’n positiewe heelgetal en ook nie nul nie. Die versameling waaraan slegs 0 behoort, het slegs een getal daarin!
- Die getal *pi* = 3,141 592 653 589 ... is irrasionale. Dit beteken dat *pi* slegs tot twee versamelings in die hiërargie behoort: die versameling van irrasionale getalle en ook die versameling van reële getalle.

Ons het spesiale simbole vir die meeste van hierdie versamelings. Dus, in plaas daarvan om te skryf die *versameling van reële getalle*, kan ons byvoorbeeld slegs $\mathbb{R}$ skryf. Hieronder is ’n volledige lys van die simbole vir elk van die versamelings:

die versameling van reële getalle	$\mathbb{R}$
die versameling van rasionale getalle	$\mathbb{Q}$
die versameling van irrasionale getalle	$\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ of $\mathbb{Q}'$
die versameling van heelgetalle	$\mathbb{Z}$
die versameling van nie-heelgetal rasionale getalle	$\mathbb{Q} - \mathbb{Z}$
die versameling van telgetalle (nie-negatiewe heelgetalle)	$\mathbb{N}_0$
die versameling van positiewe heelgetalle (natuurlike getalle)	$\mathbb{Z}^+$ of $\mathbb{N}$
die versameling van negatiewe heelgetalle	$\mathbb{Z}^-$ of $\mathbb{Z} - \mathbb{N}_0$
die versameling wat slegs nul bevat	$\{0\}$

Om $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ te skryf is ’n formele manier om te sê ‘*al die reële getalle uitsluitend die rasionale getalle*’. Ons kan dit ‘versameling-aftrekking’ noem solank ons verstaan dat dit nie dieselfde is as die aftrek wat ons met getalle doen nie.

Versameling-aftrekking het ten doel om sommige elemente van ’n reeks uit te sluit. In $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ het ons al die rasionale getalle van die versameling van reële getalle uitgesluit, en slegs die irrasionale getalle behou.

Hierdie ‘versameling-aftrekking’ staan normaalweg bekend onder ’n meer formele naam; ‘die komplement van versameling $\mathbb{Q}$ in versameling $\mathbb{R}$’. Baie wiskundiges verkies om $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ as $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ te skryf, wat lees, ‘versameling $\mathbb{R}$ uitsluitend versameling $\mathbb{Q}$’. Jy mag ook so maak indien jy dit so verkies.

2154 TechMaths Afr G10 LB.indb 25 2015/11/25 4:12 PM

Voorbeeld Klassifisering van getalle

A. 2 is ’n natuurlike getal, ’n telgetal, ’n rasionale getal, en ’n reële getal. Dit is *nie* ’n negatiewe heelgetal of ’n irrasionale getal nie.

B. 0,5785 is ’n rasionale getal (omdat 0,578 5 as die breuk $\frac{5\,785}{10\,000}$, of as die verhouding 5 785:10 000 geskryf kan word) ’n nie-heelgetal rasionale getal en ’n reële getal. Dit is *nie* ’n heelgetal (of enige iets laer in die hiërargie) of ’n irrasionale getal nie.

C. $\sqrt{3}$ is ’n irrasionale getal (ons sal later verduidelik waarom) en ’n reële getal. Dit is *nie* ’n rasionale getal (of enige iets laer in die hiërargie) nie.

D. Getalle soos $\sqrt{2}$ word onmeetbare getalle of wortelgetalle genoem. Eg onmeetbare getalle is nooit rasionaal nie. Onmeetbare getalle wat rasionaal is, is die waar die getal onder die wortelteken bv. perfekte vierkante, perfekte kubusse ens. is. Byvoorbeeld, $\sqrt{1{,}21} = 1{,}1$ is rasionaal omdat 1, 21 ’n perfekte vierkant is $(1{,}1 \times 1{,}1 = 1{,}21)$ maar $\sqrt[3]{1{,}21}$ is irrasionale omdat 1,21 nie ’n perfekte kubus is nie; $\sqrt[3]{27}$ is rasionaal, maar $\sqrt[3]{9}$ en $\sqrt[3]{3}$ is irrasionale.

E. $\sqrt{-1}$ is ’n nie-reële getal (ons sal hierna kyk aan die einde van die hoofstuk) en daarom pas dit nêrens in die hiërargie wat ons tans het, in nie. $\sqrt{-1}$ word ’n denkbeeldige getal genoem. Dit is omdat daar geen reële getal is waarvan jy die vierkantswortel kan bepaal en –1 kry nie. Denkbeeldige getalle tesame met reële getalle, bv. $3 + 2 \times \sqrt{-1}$, word komplekse getalle genoem (kompleks omdat hulle ’n kompleks van reële en denkbeeldige getalle is – dink aan ’n behuisingskompleks wat uit verskillende eenhede bestaan).

Nog meer simbole

Dit is baie langdradig om die volgende te sê en te skryf:

- Die versameling van heelgetalle is ’n subversameling van die rasionale getalle
- 49 is ’n element van die versameling van telgetalle

Ons kan dit verkort deur die volgende simbole vir die versameling te skryf:
- $\mathbb{Z}$ is ’n subversameling van $\mathbb{Q}$
- 49 is ’n element van $\mathbb{N}_0$

Ons kan dit selfs verder verkort met die simbool $\subseteq$ vir ‘is ’n subversameling van’ en die simbool $\in$ vir ‘is ’n element van’:
- $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$
- $49 \in \mathbb{N}_0$

Somtyds is dit nodig om te sê dat ’n getal *nie* ’n element van ’n spesifieke versameling is nie. Ons gebruik dan die simbool $\notin$ hiervoor: $4{,}9 \notin \mathbb{Z}$.

Oefeninge

1. Herskryf al die stellings wat in die vorige twee voorbeelde gelys is in verkorte vorm deur gebruik te maak van die simbole vir versamelings en die simbole $\subseteq$, $\in$ en $\notin$.
2. Klassifiseer die volgende getalle:

(a) $-12\ 584$ (b) $-36{,}36$ (c) $\sqrt{\frac{4}{5}}$

(d) 1,111 1... (herhalend) (e) $4 \div 3$ (f) $4 \times \sqrt{3}$

(g) $\sqrt{4 \times 3}$ (h) $\sqrt{4}$ (i) $1 + \frac{2}{3}$

(j) $\sqrt{169}$ (k) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$ (l) $\sqrt{7} \times \sqrt{7}$

(m) $\sqrt{7} + \sqrt{7}$ (n) $\sqrt[3]{-1}$ (o) *pi*

(p) Omtrek van 'n sirkel met radius 5

(q) die oppervlakte van 'n vierkant met sye $\sqrt{13}$

(r) die volume van 'n kubus met sye $\sqrt{13}$

Skryf al jou klassifikasies volledig uit in woorde, en dan in verkorte vorm deur die simbole wat ons ontwikkel het, te gebruik.

Reële getallelyn: die reële getalle as 'n versameling punte

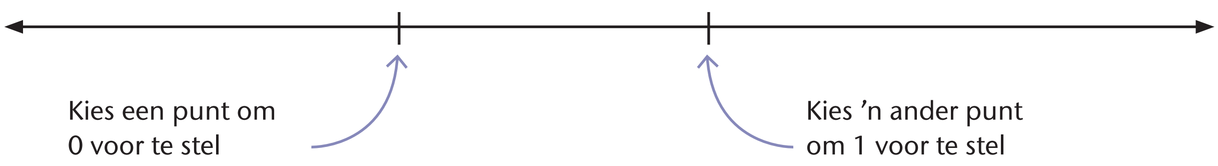
Om reële getalle as 'n versameling te beskryf, is nuttig, maar dit is nie baie bruikbaar nie. Ons het 'n manier nodig om die versameling van al die reële getalle as 'n **geordende versameling** voor te stel omdat, indien ons enige twee getalle met mekaar vergelyk, die een altyd groter sal wees as die ander een.

Jou klas kan as 'n geordende versameling geklassifiseer word deur al die leerders alfabeties te rangskik. Dit kan ook anders gedoen word, bv. deur datum en tyd van geboorte, deur skoengrootte, ens. Getalversamelings word gewoonlik slegs georden volgens hul waardes.

Ons doen dit deur onsself te verbeel dat elke enkele reële getal 'n *punt* op 'n lyn is, die **getallelyn**. Ons dui die volgorde van getalle aan deur kleiner getalle links van die groteres te sit. Presies soos jou liniaal werk.

Jy behoort hierdie voorstelling van reële getalle baie goed te ken, maar hier is dit weer:

Ons kan sê dat 'n kontinue lyn maar net baie, baie punte is wat baie, baie naby mekaar lê. Ons kan punte uitsoek om getalle voor te stel. Ons dui altyd die posisie van ten minste twee getalle aan, gewoonlik 0 en 1. Dit laat ons toe om onsself daarvolgens te oriënteer en dui vir ons die skaal aan.



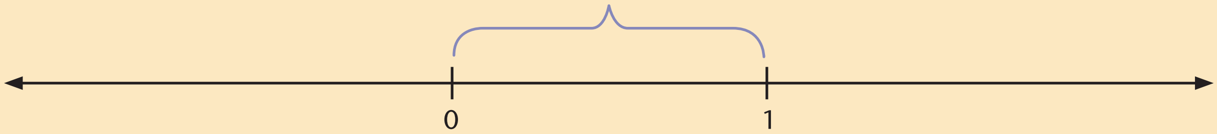
Ons kan nou soveel punte as wat ons wil op die lyn uitkies om ander getalle voor te stel. Ons moet versigtig te werk gaan wanneer ons 'n getallelyn *konstrueer*. Dit is nodig om te meet waar die punt wat ons wil hê, moet wees.

Voorbeeld Stel die getal $\frac{4}{5}$ op 'n getallelyn wat geskaleer is, voor

As ons die getal $\frac{4}{5}$, of vier-vyfdes op 'n getallelyn wil voorstel, sal ons $\frac{4}{5}$ of 0,8 van die afstand tussen 0 en 1 op ons getallelyn moet meet

Stap 1:

meet hierdie afstand met 'n liniaal, so presies as wat jy kan

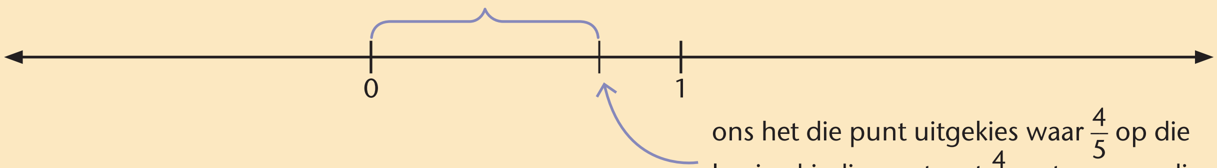


Stap 2: Vermenigvuldig die afstand met $\frac{4}{5}$ (of 0,8).

Stap 3: Meet die afstand wat jy in Stap 2 kry, vanaf nul.

Dit sal vir jou die posisie van $\frac{4}{5}$ gee. Om die waarheid te sê, eintlik baie na aan die korrekte posisie, hoe naby, hang af van hoe presies jy met jou metings is:

meet hierdie afstand so presies as wat jy kan



ons het die punt uitgekies waar $\frac{4}{5}$ op die lyn is, d.i. die punt wat $\frac{4}{5}$ verteenwoordig

Oefeninge

3 Jy gaan nou 'n getallelyn konstrueer. Kies 'n skaal wat maklik is om te gebruik, soos bv. op jou liniaal.

(a) Trek 'n lyn, kies 'n skaal, en dui al die heelgetalle tussen –10 en 10 aan.

(b) Dui die volgende getalle op jou getallelyn aan:

3,75	*pi*	$-\frac{33}{7}$	1,1
$\sqrt[3]{90}$	$8\frac{1}{9}$	4,48	1,01

Belangrik: Rond jou mates af tot die naaste millimeter.

4 Besluit tot watter versameling die volgende waardes sal behoort. Noem al die moontlike versamelings volgens die reeks-hiërargie:

(a) die lengte van jou en al jou klasmaats gemeet tot die naaste half sentimeter

(b) die getal broodrolletjies in 'n sak

2154 TechMaths Afr G10 LB.indb 28 2015/11/25 4:12 PM

(c) die lengte van die diagonaal van ’n vierkant met 1 m sye, tot die naaste millimeter

(d) die lengte van die diagonaal van ’n vierkant met sye *presies* 1 m lank, bereken sonder om jou sakrekenaar te gebruik volgens Pythagoras se Teorie.

Wenk: In (c) rond jy ’n irrasionale getal tot drie desimale plekke af, maar in (d) word jy gevra om die presiese wiskundige waarde van die lengte van die diagonaal te gee/beskryf.

(e) die oppervlakte van alle vierkante met sye wat positiewe heelgetal lengtes het

(f) die oppervlakte van alle vierkante wat lengtes het wat ’n heelgetal en ’n half is: bv. sylengte = 1,5 eenhede, 2,5 eenhede, 3,5 eenhede

(g) die derdemagswortel van ’n negatiewe volkome derdemag

(h) die lengte van die sye van ’n kubus met ’n volume van 10 kubieke eenhede.

2.2 Meer oor hoe om versamelings en intervalle voor te stel

Somtyds is dit nodig dat ons ander versamelings van getalle wys en nie net daardie in die hiërargie nie, bv. om ’n lys van getalle voor te stel.

Notasie: om ’n versameling getalle te wys, lys ons hulle in stygende volgorde in krulhakies: { en }.

Voorbeeld Die versameling van moontlike resultate wanneer jy ’n dobbelsteen gooi

Wanneer jy ’n dobbelsteen gooi het jy een van ses moontlike resultate. Ons kan dit voorstel as die volgende versameling $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. Dit is een manier om die versameling, opgemaak uit die getalle van 1 tot 6, voor te stel. Ons kan dit soos volg verkort: $\{1; 2; 3; \ldots; 6\}$. Die ‘...’ in die versameling beteken ‘volg die patroon’.

Alhoewel dit nie so bruikbaar is vir slegs ses getalle nie, kan jy sien dat dit baie nuttig is wanneer daar baie getalle sou wees.

Definisies en meer versamelingnotasies

Versameling: ’n Versameling van getalle; elke getal word ’n element van die versameling genoem:

$\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$; $\{-1; 0; 1\}$, $\{1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}\}$ ens. is almal versamelings.

Element: Enige een van die getalle in ’n versameling; ons wys dat ’n getal ’n element van ’n versameling is deur dit te skryf as $2 \in \mathbb{Z}$ en indien dit nie is nie, te skryf as $\sqrt{2} \notin \mathbb{Z}$ (ons sê 2 ‘is ’n element van die heelgetalle’ en dat $\sqrt{2}$ nie ’n element van die heelgetalle’ is nie).

Kardinaliteit: die getal van elemente in ’n versameling; al die versamelings in ons hiërargie het ’n oneindige kardinaliteit, behalwe die versameling vir nul, wat ons kan voorstel as $\{0\}$ en wat ’n kardinaliteit van 1 het; die versamelings in ons voorbeeld hierbo het ’n kardinaliteit van 6. Die versameling van rasionale getalle tussen 0 en 1 is oneindig omdat daar geen beperking is op hoeveel jy kan tel nie.

Subversameling: 'n versameling wat sommige van die elemente van 'n ander versameling in hom het, bv. die heelgetalle, is 'n subversameling van die rasionale getalle en die versameling in ons voorbeeld is 'n subversameling van die natuurlike getalle. Ons het gesien dat ons hulle kan skryf as $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ en $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\} \subseteq \mathbb{N}$.

Interval: 'n subversameling van al die getalle tussen twee gegewe getalle word die eindpunte genoem. Die versameling in ons voorbeeld is 'n interval in die heelgetalle.

Daar is spesiale notasie vir intervalle: $\{x \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq x \leq 6\}$.

Hierdie word gelees as: {......} bedoelende 'die versameling van ...'

$x \in \mathbb{Z}$ bedoelende '... alle elemente x in die versameling van heelgetalle ...'

$|$ bedoelende '...sodat...'

$1 \leq x \leq 6$bedoelende '... x is tussen en insluitend 1 tot 6'

Die versameling in ons voorbeeld kan ook geskryf word as $\{x \in \mathbb{Z} \mid 0 < x < 7\}$ waar $0 < x < 7$ beteken al die getalle tussen maar *nie* insluitend 0 en 7 nie.

Interval-notasie: die verkorte weergawe hiervan is om te skryf $x \in [1; 6]$ vir die eerste en $x \in (0;7)$ vir die tweede voorstelling. [en] beteken sluit die eindpunte van die interval in, terwyl (en) beteken sluit die eindpunte uit.

Getalversamelingnotasie en voorstelling van getalversamelings op 'n getallelyn

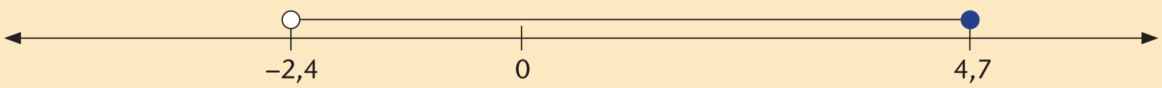
Voorbeeld Stel die reeks van alle reële getalle tussen –2,4 en 4,7 voor, sluit 4,7 in

As 'n interval: $-2{,}4 < x \leq 4{,}7$, waar $x \in \mathbb{R}$.

In versamelingnotasie: $\{x \in \mathbb{R} \mid -2{,}4 < x \leq 4{,}7\}$

In intervalnotasie: $(-2{,}4; 4{,}7]$ met reële elemente

Op getallelyne



Voorbeeld Stel al die heelgetalle minder as 100 maar groter as of gelyk aan 5 voor

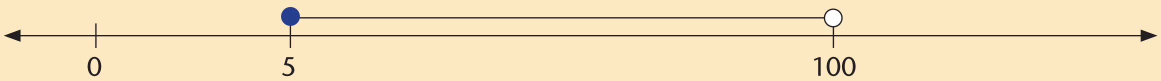
As 'n interval: $5 \leq x < 100$ of $5 \leq x \leq 99$ waar $x \in \mathbb{Z}$

In versamelingnotasie: $\{x \in \mathbb{Z} \mid 5 \leq x < 100\}$ of $\{x \in \mathbb{Z} \mid 5 \leq x \leq 99\}$

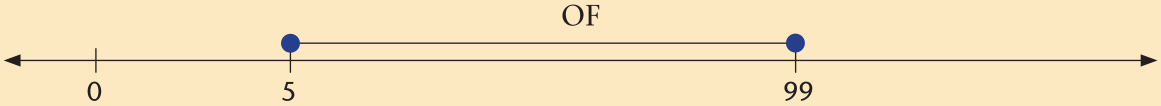
In intervalnotasie: $[5; 100)$ of $[5; 99]$ met elemente in $\mathbb{Z}$

Ons sou ook hier kon skryf $\{5; 6; ...; 99\}$ omdat ons in staat sal wees om al die elemente te lys as ons dit sou wou doen. Ons kan dit egter nie in die vorige of die volgende voorbeeld doen nie!

Op getallelyne (let op dat ons hier met heelgetalle te doen het):



OF



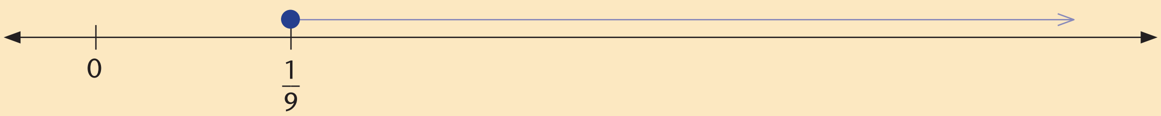
Voorbeeld Stel al die rasionale getalle groter as of gelyk aan een negende voor

As 'n interval: $x \geq \frac{1}{9}$ waar $x \in \mathbb{Q}$

In versamelingnotasie: $\{x \in \mathbb{Q}\, x \mid \geq \frac{1}{9}\}$

In intervalnotasie: $[\frac{1}{9}; \infty)$ met elemente in $\mathbb{Q}$

Op getallelyne (let op dat ons hier met rasionale getalle te doen het):



Die simbool ∞ staan vir **oneindigheid**; daar is geen grootste reële getal nie, dus moet ons wys dat die interval voortgaan na regs sonder om 'n afsnypunt te bereik. Let op dat) gebruik word en nie] nie. Die rede hiervoor is dat oneindigheid normaalweg nie as 'n getal beskou word nie. Ons wys dit deur dit uit die interval uit te sluit.

Ons wys nie die boonste eindpunt op die getallelyn in die laaste voorbeeld nie, omdat daar geen boonste eindpunt is nie (al die rasionale getalle groter as een negende).

In al drie van die voorbeelde is die getallelyn aanduidings nie volgens skaal nie. Hulle word gebruik om die intervalle voor te stel sonder om te probeer presies wees omtrent die posisies van die punte op die lyn wat 0 verteenwoordig, en die eindpunte van die intervalle.

Oefeninge

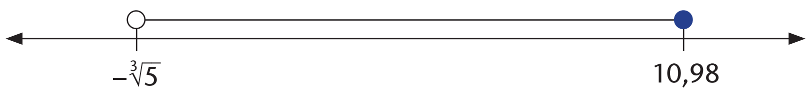
5 Verduidelik in woorde wat die volgende beteken:

(a) $\{1,1; 1,2; \ldots; 1,7\}$

(b) $x \in \mathbb{Z}\ \{-2 \leq x < 11\}$

(c) $y \in \left(\frac{1}{3};\frac{4}{3}\right) \subseteq \mathbb{Q}$

(d) die reële getallelyn:



(e) $\{x \in \mathbb{N}_0 \mid x \in [500; 550]\}$

6 Dui die volgende versamelings as versamelingnotasie aan:

(a) alle reële getalle tussen –10 en –5

(b) alle reële getalle tussen –10 en –5, insluitend –5

(c) alle reële getalle tussen en insluitend –10 en –5

(d) alle heelgetalle kleiner as 7

(e) alle natuurlike getalle kleiner as 7

7 (a) Herhaal vraag 6, maar gebruik intervalnotasie.

(b) Herhaal vraag 6, maar dui dit aan op die getallelyn, nie volgens skaal nie.

8 Gee die kardinaliteit van elk van die versamelings in vraag 5 en 6.

2.3 Afronding en beduidende syfers

Let wel: Kyk vorentoe na die afdeling oor beduidende syfers in Hoofstuk 3 paragraaf 3.6

Hierdie afdeling is ’n kort hersiening van afronding. Werk vinnig hierdeur, en slegs indien jy dit nodig ag!

Wanneer ons afrond, doen ons die volgende:
- druk die getal in desimale breuk vorm uit
- skat die waarde deur enige desimale getalle na 'n sekere desimale syfer af te sny
- maak seker dat die laaste syfer van jou afrondingswaarde die mees akkurate weergawe van die waardes verskaf wat jy afgesny het

Afronding tot 'n bepaalde aantal desimale plekke

Bepaal die afgeronde syfer van 'n desimale getal deur die desimale getal af te rond.

Drie desimale plekke	Afgerond tot twee desimale plekke
1,224	1,22
1,225	1,23
1,226	1,23
1,229	1,23
1,230	1,23
1,234	1,23
1,235	1,24
1,236	1,24

Voorbeeld

Afronding van 17,984 364 501 tot verskillende aantal desimale plekke

Aantal desimale plekke	Syfer om afronding te bepaal – groen; syfer wat afgerond word – blou	Afgeronde waarde; die afgeronde syfer is in blou
Agt	17,984 364 501	17,984 364 50
Sewe	17,984 364 501	17,984 364 5
Ses	17,984 364 501	17,984 365
Vyf	17,984 364 501	17,984 36
Vier	17,984 364 501	17,984 4
Drie	17,984 364 501	17,984
Twee	17,984 364 501	17,98
Een	17,984 364 501	18,0
Zero	17,984 364 501	18

Wanneer jy elkeen van hierdie syfers nagaan, *verwys altyd na die oorspronklike getal*. Jy kan nie altyd een afgeronde weergawe van die getal gebruik om die volgende afgeronde weergawe te kry nie – kyk na die afronding tot vyf desimale plekke, aangedui in vetdruk, om te sien hoe dit verkeerd kan gaan.

Wanneer ons afrond tot 'n sekere aantal desimale plekke, kyk ons na die syfer onmiddellik na die een waarnatoe ons afrond. As jy byvoorbeeld nodig het om tot ses desimale plekke af te rond, kyk ons na die syfer in die sewende desimale plek *en niks anders nie*. Indien die sewende syfer 0, 1, 2, 3, of 4 is, hou ons die sesde syfer soos dit is. Indien die sewende syfer 'n 5, 6, 7, 8, of 9 is, dan vermeerder die sesde syfer met 1.

Oefeninge

9 Rond af tot die volgende desimale plekke:

(a) 22,891 452 784

(i) agt (ii) sewe (iii) ses (iv) vyf

(b) 21,115 745 912

(i) vier (ii) drie (iii) twee (iv) een

(c) 58,453 451 671

(i) sewe (ii) twee (iii) een (iv) nul

(**Wenk:** om tot nul desimale plekke af te rond, is dieselfde as om tot die naaste heelgetal af te rond.)

2.4 Rasionale getalle in meer detail

Rasionale getalle is nuttig omdat hulle altyd as egte breuke geskryf kan word.

Kom ons kyk na 'n getal in desimale vorm, soos 26,24.

Duidelik is dit 2 624 ÷ 100. Ons kan dit dus as 'n verhouding skryf, d.i. 'n breuk van twee heelgetalle:

2 624:100 of $\frac{2\,624}{100}$. Dit is dus 'n rasionale getal.

Ons noem breuke wat 'n beperkte aantal desimale syfers het, 'n **eindige breuk**.

Om te termineer beteken om iets te eindig. 'n Werkskontrak termineer wanneer vakmanskap swak is of wanneer daar baie vertragings is.

Enige desimale getal wat termineer, d.i. eindig na 'n sekere aantal desimale syfers, is rasionaal; selfs iets so onooglik soos 1,245 723 105 447 200 598 3, is rasionaal.

Metings en rasionale getalle

Ons rond af wanneer 'n eindige rasionale breuk te lank is of meer inligting bevat as wat ons nodig het. Ons verkort 'n bestaande rasionale desimale breuk asof ons besig is om 'n skatting te maak oor 'n irrasionale getal deur van desimale breuke gebruik te maak.

Voorbeeld Aankoop van houtplanke

Veronderstel dat jy houtplanke nodig het wat 3,58 m lank is. Wanneer jy die planke bestel, sê jy nie aan die verskaffer om die planke 3,58 m lank te sny nie. Jy vra eerder dat die planke langer gesny word, tot 3,6 m of selfs 3,7 m of 3,8 m om veilig te wees. 3,6 m is die waarde opwaarts afgerond en 3,7 m of 3,8 m is die waarde afgerond plus 'n ekstra lengte net om seker te wees dat die plank lank genoeg is. Jy sny self die eindpunte af sodat die lengte presies 3,58 m is.

Voorbeeld Meting van die stroom in 'n stroombaan

Wanneer jy 'n ammeter in 'n stroombaan koppel, sal dit jou slegs toelaat om die stroom af te lees tot 'n sekere mate van presisie, bv. 0,1 A, of, op 'n meer presiese instrument, tot 0,01 A. Oor die algemeen sal enige meting wat jy wil maak, 'n afrondingswaarde hê en outomaties ook 'n rasionale getal, selfs as die getal wat jy meet irrasionale is. Sien Oefening 4 (c) en (d).

Metings is altyd rasionaal

Al die getalle wat jy in werklikheid sal meet en gebruik in enige van die tegniese velde, sal rasionaal moet wees. Jy moet net besluit hoeveel desimale plekke of beduidende syfers jy benodig om te verseker dat jou rasionale getalle nie te veel afgerond word nie.

Jou sakrekenaar en verwisseling tussen desimale en rasionale vorms van getalle

Jou sakrekenaar kan ingestel word om antwoorde in rasionale vorm te gee wanneer moontlik of om hulle in desimale vorm te gee. Lees jou sakrekenaar se instruksies of vra jou onderwyser om jou te help.

Herhalende of nie-eindige desimale breuke

'n **Herhalende breuk** is een waar 'n reeks syfers hulself oor en oor herhaal sonder einde. Alle herhalende desimale breuke is rasionaal. Dit is nie moeilik om so 'n desimale breuk as 'n rasionale breuk uit te druk nie.

Uitgewerkte voorbeeld

Die desimale breuk 12,146 146 … herhalend as 'n rasionale breuk

Herhalende desimale soos hierdie word altyd geskryf as $12,\dot{1}4\dot{6}$. Die punte dui die deel wat herhaal aan.

Ons kan wys dat sulke getalle rasionaal is deur 'n slim stukkie rekenkunde.

Let op dat $12,\dot{1}4\dot{6} \times 1\,000 = 12146,\dot{1}4\dot{6}$

Dus $12,\dot{1}4\dot{6} \times 1\,000 - 12,\dot{1}4\dot{6} = 12146,\dot{1}4\dot{6} - 12,\dot{1}4\dot{6}$

Dus $12,146 \times 999 = 12\,134$ [herhalende deel kanselleer]

Daarom $12,146 = \dfrac{12\,134}{999}$

Ons noem 'n desimale breuk wat 'n oneindige aantal syfers in sy breukdeel het, **nie-terminerende**, d.i. nie-eindige breuk. Een-derde is 'n eenvoudige voorbeeld hiervan omdat sy desimale vorm 0,333 … herhalend is. Vier-negendes 0,444… herhalend. Een-elfde is 0,090 9… herhalend, ens.

Eienskap: enige getal met 'n herhalende (en nie-eindige) desimale deel, is 'n rasionale getal. Selfs iets so kompleks soos 1, 294 875 537 487 553 748 755 374...herhalend $=1{,}294\dot{8}75537\dot{4}$, is 'n rasionale getal omdat die deel 8755374 oor en oor na die 294 deel herhaal.

Eienskap: as 'n breuk nie-eindige en nie-herhalend is, is dit 'n irrasionale getal, omdat dit nie as 'n verhouding van twee heelgetalle geskryf kan word nie.

Oefeninge

10 Skryf desimale breuke as rasionale breuke (gebruik die voorafgaande benaderings).

(a) 0,16

(b) $0{,}1\dot{6}$

(c) $0{,}\dot{1}$

(d) 0,125

(e) $0{,}\dot{2}$

(f) 0,062 5

(g) $0{,}\dot{7}$

(h) 5,125

(i) 0,235 235 ...herhalend

(j) 7,947 384 738 473 847 384 ... herhalend

Ons kan ook enige rasionale breuk as 'n desimale breuk skryf. Die desimale uitdrukking sal óf termineer óf herhaal en nie eindig nie.

Uitgewerkte voorbeeld

Probleem: Skryf van $\frac{323}{12}$ as 'n desimale breuk

Oplossing 1: Groepering (of verdeling)

$$\begin{aligned}
\frac{323}{12} &= \frac{312}{12} + \frac{11}{12} \\
&= 26 + \frac{11}{12} \\
&= 26 + \frac{108}{120} + \frac{2}{120} \\
&= 26 + 0{,}9 + \frac{12}{1\,200} + \frac{8}{1\,200} \\
&= 26{,}9 + 0{,}01 + \frac{72}{12\,000} + \frac{8}{12\,000} \\
&= 26{,}91 + 0{,}006 + 0{,}000\,6 + \ldots
\end{aligned}$$

312 is die grootste veelvoud van 12 wat kleiner is as 323; 11 is die res

$\frac{11}{12} = \frac{110}{120}$ en 108 is die grootste veelvoud van 12 wat minder is as 110; 2 is die res

$\frac{2}{120} = \frac{20}{1\,200}$ en 12 is die grootste veelvoud van 12 wat minder is as 20; 8 is die res

8 is weereens die res, dus 6 moet herhaal

Dit gee ons 26,916 666 ... herhalend

Oplossing 2: Deur lang deling

$$
\begin{array}{rr|ccccccc}
 & & & 2 & 6, & 9 & 1 & 6 & 6\ldots \\
\cline{3-9}
1 & 2 & 3 & 1 & 2 & & & & \\
\cline{1-2}
 & & 2 & 4 & 0 & & & & \\
\cline{3-5}
 & & & 8 & 3 & & & & \\
 & & & 7 & 2 & & & & \\
\cline{4-5}
 & & & 1 & 1, & 0 & & & \\
 & & & 1 & 0, & 8 & & & \\
\cline{4-6}
 & & & & 0, & 2 & 0 & & \\
 & & & & 0, & 1 & 2 & & \\
\cline{5-7}
 & & & & 0, & 0 & 8 & 0 & \\
 & & & & 0, & 0 & 7 & 2 & \\
\cline{5-8}
 & & & & 0, & 0 & 0 & 8 & 0 \\
 & & & & 0, & 0 & 0 & 7 & 2\ldots \\
\cline{5-9}
\end{array}
$$

Oefening

11 Skryf rasionale breuke as desimale breuke.

(a) $\frac{3}{9}$

(b) $4\frac{7}{8}$

(c) $\frac{2}{7}$

(d) $7\frac{8}{13}$

(e) $\frac{11}{16}$

(f) $\frac{452}{15}$

(g) $\frac{861}{11}$

(h) $9\frac{11}{12}$

(i) $\frac{1\,560}{33}$

(j) $\frac{23}{12}$

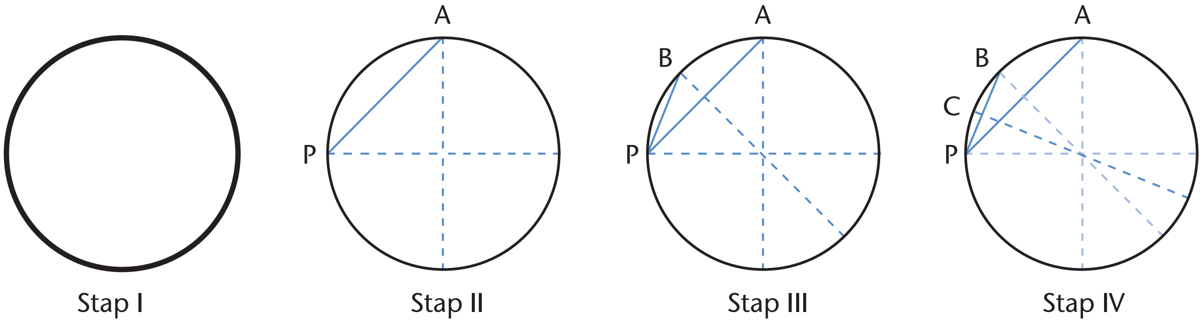
2.5 Irrasionale getalle in meer detail

Irrasionale getalle kan nie as 'n verhouding van *heel* getalle geskryf word nie. Daar is drie belangrike plekke waar irrasionale getalle voorkom in die Wiskunde wat jy bestudeer:

- in sirkels: *pi* is 'n irrasionale getal
- in wortelgetalle
- in trigonometrie: kyk na Hoofstuk 6; trigonometriese funksies skakel gewoonlik rasionale insetwaardes om na irrasionale uitsetwaardes.

Oefening

12 Hiervoor het jy ’n kompas en liniaal nodig.



(a) Doen die volgende (elke stap soos hierbo):

(I) Trek ’n sirkel met radius 10 cm.

(II) Konstrueer ’n paar reghoekige deursneë. Verbind P en A.

(III) Verdeel PA. Konstrueer die deursnee wat deur die middelpunt van PA loop tot die sirkel by B. Verbind P en B.

(IV) Herhaal Stap III vir segment PB om by segment PC te kom.

(b) PA, PB en PC is die sye van gewone veelhoeke. Hoeveel sye het die drie veelhoeke? Benoem hulle waar moontlik.

(c) Teken die volgende tabel oor in jou oefeningboek en voltooi dan die tabel. Deursnee van die sirkel: D = 20 cm

Lynsegment wat een sy van die veelhoek vorm	Veelhoek sylengtes (in cm)	Aantal sye van veelhoek N	Totale omtrek van veelhoek C = s × N (in cm)	$\frac{C}{D}$
PA				
PB				
PC				

(d) Veronderstel dat jy hierdie proses kon herhaal. Stem jy met die volgende stelling saam?

‘Hierdie verhouding is dieselfde ongeag hoe groot of hoe klein die sirkel is. Alle sirkels is soortgelyk aan mekaar. Dus is π ’n konstante.’

2154 TechMaths Afr G10 LB.indb 38 2015/11/25 4:12 PM

Wat kom ons agter?

In Oefening 12 het jy drie benaderings van π vasgestel.

- In Stap I (PA), het jy π rofweg geskat deur gebruik te maak van 'n vierkant (jou antwoord behoort $\frac{C}{D} = 2{,}83$ te gewees het).
- In Stap II (PB) het jy π nie so sleg geskat nie, deur gebruik te maak van 'n aghoek (jy moes $\frac{C}{D} = 3{,}06$ gekry het).
- In Stap III (PC) behoort jy jou beste skatting van π te kry (jou antwoord behoort $\frac{C}{D} = 3{,}12$ te wees).

Moenie bekommer indien jou verhoudings nie na is aan dié hierbo nie. As jy baie versigtig in jou konstruksies en meetings was, moes jy naby genoeg daaraan gekom het. Wat nog belangriker is, is die idée wat daaruit te voorskyn kom.

Hoe meer sye die veelhoek het, hoe meer lyk dit na 'n sirkel. Dit beteken dat die verhouding van C:D vir 'n veelhoek met 32 sye, 64 sye, ens. nader en nader sal beweeg aan die verhouding C:D van die sirkel.

Jy kan hierdie verhouding's bereken deur Pythagoras se stelling te gebruik. Dit is 'n bietjie lastig, maar indien jy voel dat jy 'n uitdaging kan hanteer, moet jy probeer. Ons skatting van π word al beter en beter wanneer ons die sye van die veelhoeke met meer en meer sye konstrueer.

Jy moet vertrou dat twee dinge te voorskyn sal kom:
- Elke skatting het meer desimale syfers as voorheen. Dit beteken dat π 'n nie-eindige desimale breuk is.
- Daar is geen herhalende patroon in die desimale syfers nie. Dus is π 'n nie-herhalende desimale breuk.

Gevolgtrekking: Dit beteken dat π 'n irrasionale getal moet wees.

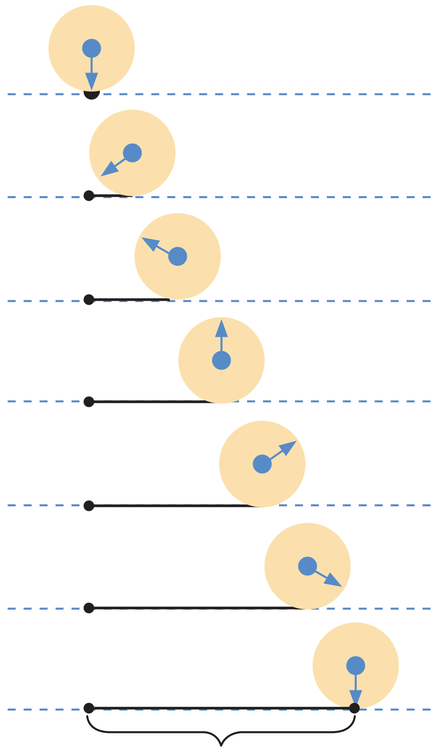
Definisie van *pi*

Pi of π word gedefinieer as die verhouding van die omtrek van 'n sirkel tot sy deursnee. Met ander woorde, $C = \pi \times D$ waar C die omtrek voorstel en D die deursnee van die sirkel verteenwoordig.

Let wel: Ons kan enige twee reële getalle as 'n verhouding skryf. Dat *pi* 'n verhouding is, beteken nie dat dit rasionaal moet wees nie. Die punt is dat, ongeag hoe hard ons probeer, $C \div D$ is 'n irrasionale getal. Ons sal nooit vind dat C en D albei rasionaal is nie, al kan ons hulle met perfekte akkuraatheid meet.

Nog 'n manier om 'n skatting te maak van *pi*

Hier is 'n maklike manier om *pi* met 'n skyf, byvoorbeeld 'n ou kompakskyf, te skat:



Jy moet baie versigtig wees dat die skyf nie gly wanneer jy dit rol nie. Meet die uitgerolde omtrek en deursnee baie versigtig tot die naaste millimeter, dan behoort jy in staat te wees om 'n baie getroue waarde vir *pi* te bereken, korrek tot ten minste twee desimale plekke.

Let wel: Hierdie benadering wys nie vir ons noodwendig dat *pi* irrasionale is nie, maar dit gee vir ons 'n maklike manier om sy waarde so goed as wat ons kan te bepaal. Die akkuraatheid verbeter wanneer ons 'n baie groot skyf gebruik en verseker dat die oppervlakte absoluut plat is.

Egte wortelgetalle is irrasionale getalle

Uitgewerkte voorbeeld

Probleem: Skatting van $\sqrt{2}$

In hierdie oefening, MAG jy NIE jou sakrekenaar gebruik om $\sqrt{2}$ te bereken nie.

Oplossing:

$\sqrt{2}$ lê tussen 1 en 2 omdat $1^2 = 1$ en $2^2 = 4$ en 2 is tussen 1 en 4.

$\sqrt{2}$ lê tussen 1,4 en 1,5 omdat $1{,}4^2 = 1{,}96$ en $1{,}5^2 = 2{,}25$

$\sqrt{2}$ lê tussen 1,41 en 1,42 omdat $1{,}41^2 = 1{,}988\ 1$ en $1{,}42^2 = 2{,}016\ 4$ ... ensovoorts ....

Oefening

13 Gebruik nou dieselfde benadering om die volgende te doen:

(a) Wys dat $\sqrt{2}$ tussen 1,414 en 1,415 lê.

(b) Tussen watter twee desimale, afgerond tot vier desimale plekke, lê $\sqrt{2}$?

(c) Dieselfde as in (b) maar twee getalle afgerond tot vyf desimale plekke.

(d) Kan jy so aangaan? Jou sakrekenaar sal miskien nie kan byhou nie!

(e) Kan jy enige patroon sien in die desimale syfers? Dink jy die desimale vorm van $\sqrt{2}$ sal termineer (eindig) by dieselfde punt?

(f) Dink jy die desimale syfers van $\sqrt{2}$ sal 'n herhalende patroon hê?

Twee dinge sal uit hierdie ondersoek voortspruit

- Elke skattingspaar het meer desimale syfers as voorheen. Dit beteken dat $\sqrt{2}$ 'n nie-eindige desimale breuk is.
- Daar is geen herhalende patroon in die desimale syfers van die skattingspare nie, dus is $\sqrt{2}$ 'n nie-herhalende desimale breuk.

Gevolgtrekking: Dit beteken dat $\sqrt{2}$ 'n irrasionale getal moet wees.

Let wel: Weereens, jy moet hierdie twee stellings in vertroue aanvaar. As jy saamstem dat hulle geloofwaardig is, dan sal jy dit makliker vind om te aanvaar dat hulle, in der waarheid, waar is.

Eienskap: Enige egte wortelgetal is irrasionale, met ander woorde $\sqrt[n]{x}$ sal irrasionale wees wanneer x nie 'n perfekte n^{de} mag is nie.

Rasionale skattings van irrasionale getalle

Wanneer ons 'n irrasionale getal soos π of $\sqrt{2}$ skryf, is ons besig om 'n simbool neer te skryf wat 'n getal verteenwoordig, net soos die simbool '5' vyf verteenwoordig. As jy probeer om die desimale waarde van irrasionale getalle neer te skryf, raak dit moeiliker omdat hulle nie-eindige, nie-herhalende getalle is. Daar is geen herhalende patroon in die desimale breukdeel van 'n irrasionale getal nie. Die beste wat ons kan doen, is om die afgeronde waarde neer te skryf.

Oefeninge

14 Gebruik jou sakrekenaar om die volgende te beantwoord:

(a) Skryf neer die waarde van π.

(b) Bereken die waarde van $\frac{22}{7}$ en skryf presies wat op jou sakrekenaarskerm vertoon, word.

(c) Is die waardes in (a) en (b) dieselfde? Verduidelik.

(d) Watter van die waardes in (a) en (b) is beter om dinge soos die omtrek en oppervlakte van sirkels te bereken? Verduidelik.

15 Die volgende wortelgetalle mag rasionaal of irrasionale wees. As die wortelgetal rasionaal is, gee sy waarde. As die wortelgetal irrasionale is, bepaal die twee heelgetalle waartussen dit lê. Moenie jou sakrekenaar gebruik om hierdie direk te bereken nie.

(a) $\sqrt{3}$ (b) $\sqrt{4}$ (c) $\sqrt{5}$

(d) $\sqrt{6}$ (e) $\sqrt{7}$ (f) $\sqrt{8}$

(g) $\sqrt{9}$ (h) $\sqrt{10}$ (i) $\sqrt{15}$

(j) $\sqrt{25}$ (k) $\sqrt[3]{7}$ (l) $\sqrt[3]{8}$

(m) $\sqrt[3]{9}$ (n) $\sqrt[3]{25}$ (o) $\sqrt[3]{70}$

(p) $\sqrt[4]{70}$ (q) $\sqrt[4]{320}$ (r) $\sqrt[5]{41}$

16 Bepaal die waardes van die egte wortelgetalle in Oefening 15 deur jou sakrekenaar te gebruik.

Stem jy saam met die volgende stelling? 'Die afgeronde waardes wat ons sopas bereken het, is rasionale skattings van irrasionale getalle. Daar is nie die werklike volledige waardes van die wortelgetalle wat ons kan neerskryf nie, omdat hulle oneindig lank is'.

2.6 Binêre getalle

Binêre getalle is die kern van hoe elektroniese rekenaars werk. Jou sakrekenaar, jou selfoon, en jou tablet is almal baie komplekse masjiene wat binêre getalle gebruik. Rekenaars gebruik die binêre getallestelsel om al die data te manipuleer en te stoor, insluitend getalle, woorde, video's, grafieke, en musiek. Julle wat elektronika wil doen, sal meer leer oor hoe hierdie dinge werk.

Ons is gewoond daaraan om desimale getalle te gebruik. Ons is so vertroud daarmee dat ons dalk nie insien dat daar ander maniere is waarop ons getalle kan weergee nie.

In die desimale getal sisteem is getalle saamgestel deur plekwaardes wat op magte van 10 gebaseer is. Die getal 125 602,12 word in die tabel hieronder weergegee:

Honderd duisende	Tien duisende	Duisende	Honderde	Tiene	Ene		Tiende	Honderdste
10^5	**10^4**	**10^3**	**10^2**	**10^1**	**100**	**,**	**10^{-1}**	**10^{-2}**
100 000	10 000	1 000	100	10	1	,	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$
1	2	5	6	0	2	,	1	2

Hierdie desimale getal 125 632,12 word geïnterpreteer en verstaan in terme van die plekwaarde van die individuele syfers:

$125\,632{,}12 = (1 \times 10^5) + (2 \times 10^4) + (5 \times 10^3) + (6 \times 10^2) + (0 \times 10^1) + (2 \times 10^0) + (1 \times 10^{-1}) + (2 \times 10^{-2})$

Dit mag vreemd voorkom, maar onthou hoe desimale getalle geskryf word:

100 000	10 000	1 000	100	10	1
0	0	2	0	1	6

Dit word verkort na 2 016, wat beteken 2 duisendes, 0 honderdes, 1 tien en 6 ene.
Op soortgelyke wyse in die binêre getalstelsel, word 'n binêre getal opgemaak uit die plekwaardes van individuele syfers (0 of 1) wat gebaseer is op die magte van 2. **Binêre getalle** word in magte van 2 weergegee ('desi-' het te make met 10, 'bi-' het te make met 2). Die tabel hieronder wys die individuele plekwaardes van 'n 9 syfer binêre getal 100100011:

Twee Honderd Ses en Vyftigs	Een Honderd Agt en Twintigs	Vier en Sestigs	Twee en Dertigs	Sestiens	Agts	Viers	Twees	Ene
2^8	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
256	128	64	32	16	8	4	2	1
1	0	0	1	0	0	0	1	1

Binêre getalle is getalle in die basis 2. Om 'n desimale getal in binêre vorm uit te druk, breek ons die desimale getal op in die som van magte in die basis 2. Die binêre getal word dan opgestel uit 0 en 1 in posisies met spesifieke plekwaardes wat magte van 2 is.

Omskakeling van desimaal na binêr

Omskakeling van die desimale getal 291 na 'n binêre getal, begin deurdat ons 291 afbreek in magte van 2:

$$291 = 256 + 32 + 2 + 1 = (1 \times 2^8) + (1 \times 2^5) + (1 \times 2^1) + (1 \times 2^0)$$

Om 291 na 'n binêre getal om te skakel, moet van alle plekwaarde syfers rekenskap gegee word:

$$291 = (1 \times 2^8) + (0 \times 2^7) + (0 \times 2^6) + (1 \times 2^5) + (0 \times 2^4) + (0 \times 2^3) + (0 \times 2^2) + (1 \times 2^1) + (1 \times 2^0)$$

Dus, 291 as 'n binêre getal sal 100100011 wees.

Omskakeling van binêr na desimaal

Kom ons skakel nou die binêre getal 100111011 om na 'n desimale getal.

Twee Honderd Ses en Vyftigs	Een Honderd Agt en Twintigs	Vier en Sestigs	Twee en Dertigs	Sestiens	Agts	Viers	Twees	Ene
2^8	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
256	128	64	32	16	8	4	2	1
1	0	0	1	1	1	0	1	1

Van die tabel hierbo kan die binêre getal 100111011 omgeskakel word na 'n desimale getal deur die som van die produkte van elke syfer (0 en 1) en die werklike plekwaarde van die posisie van die syfer, te bereken.

Dus, die binêre getal 100111011 omgeskakel na desimaal is:

$$= (1 \times 2^8) + (0 \times 2^7) + (0 \times 2^6) + (1 \times 2^5) + (1 \times 2^4) + (1 \times 2^3) + (0 \times 2^2) + (1 \times 2^1) + (1 \times 2^0)$$

$$= 256 + 0 + 0 + 32 + 16 + 8 + 0 + 2 + 1$$

$$= 315$$

Een van die konvensies van binêre notasie is dat 'n binêre getal geskryf word met 'n onderskrif 2 na die laaste syfer regs: 100111011_2.

Ons kan enige reële getal in binêre vorm uitdruk. Ons sal egter meestal daarop fokus om heelgetalle as binêre getalle uit te druk.

Daar is twee verskillende maniere om desimale getalle in binêre vorm uit te druk, en albei is gebaseer op die omskakeling hierbo. Jy sal dit vir jouself moet probeer doen en tyd neem om dit te oefen.

Uitgewerkte voorbeeld

A. Probleem: Herskryf die desimale getal 83 in binêre.

Oplossing 1: Begin deur al die magte van 2 wat kleiner as 83 is, neer te skryf

$2^6, 2^5, 2^4, 2^3, 2^2, 2^1, 2^0$

64, 32, 16, 8, 4, 2, 1

Begin by 64, vind die hoogste mag van 2 wat minder as 83 is; skryf 83 as die som van die magte van twee, sonder herhalings, neer:

$$\begin{aligned} 83 &= 64 + 19 \\ &= 64 + 16 + 3 \\ &= 64 + 16 + 2 + 1 \end{aligned}$$

Ons is besig om 83 op te breek in dele wat magte van 2 is, *sonder om enige van hulle te herhaal*.

Ons kan dit soos volg in 'n tabel wys:

Een Honderd Agt en Twintigs	Vier en Sestigs	Twee en Dertigs	Sestiens	Agts	Viers	Twees	Ene
2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
128	64	32	16	8	4	2	1
0	1	0	1	0	0	1	1

Die desimale getal 83 omgeskakel na 'n binêre getal is 1010011_2.

Ons lees die getal as 'een-nul-een-nul-nul-een-een', en *nie* soos ons 'n desimale getal met dieselfde syfers sou lees nie.

Oplossing 2: Omskakeling van 83 na 'n binêre getal – herhaalde deling deur 2

2	83	
2	41	Res 1
2	20	Res 1
2	10	Res 0
2	5	Res 0
2	2	Res 1
2	1	Res 0
	0	Res 1

Dus, $83 = 1010011_2$

B. Probleem: Skryf die desimale getal 187 in binêre vorm.

Oplossing 1:

Stap 1: Skryf al die magte van 2 kleiner as 187 neer.

2^7, 2^6, 2^5, 2^4, 2^3, 2^2, 2^1, 2^0

128, 64, 32, 16, 8, 4, 2, 1

Stap 2: Begin met 128, skryf 187 as die som van die magte van 2, sonder herhalings

$$\begin{aligned} 187 &= 128 + 59 \\ &= 128 + 32 + 27 \\ &= 128 + 32 + 16 + 11 \\ &= 128 + 32 + 16 + 8 + 3 \\ &= 128 + 32 + 16 + 8 + 2 + 1 \end{aligned}$$

Stap 3: Ons kan dit voorstel op die tabel soos hieronder aangetoon. Vir elke bestaande mag van 2 hierbo, sal die waarde 1 wees. Indien nie, gebruik nul:

Een Honderd Agt en Twintigs	Vier en Sestigs	Twee en Dertigs	Sestiens	Agts	Viers	Twees	Ene
2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
128	64	32	16	8	4	2	1
1	0	1	1	1	0	1	1

Die binêre getal wat 187 verteenwoordig, is 10111011_2.

Oplossing 2: Omskakeling van 187 na 'n binêre getal deur herhaalde deling deur 2

2	187	
2	93	Res 1
2	46	Res 1
2	23	Res 0
2	11	Res 1
2	5	Res 1
2	2	Res 1
2	1	Res 0
	0	Res 1

Dus, $187 = 10111011_2$

Waarom het binêre slegs die twee syfers 0 en 1 nodig?

Anders as desimale getalle wat die tien syfers 0 tot 9 gebruik, het binêre getalle slegs twee syfers nodig: 0 en 1. Dit is omdat, as jy sê nou maar, twee 16's het, dan het jy een 32. Daar is dus geen behoefte vir meer syfers in binêre voorstellings nie.

Uitgewerkte voorbeeld Skakel binêr om na desimaal

Probleem: Skakel die binêre getal 110100010_2 om na sy desimale vorm.

Oplossing: Begin deur die aantal syfers in die binêre getal te tel. Daar is 9.

256	128	64	32	16	8	4	2	1
1	1	0	1	0	0	0	1	0

- Skryf die eerste nege magte van 2 neer, insluitend 1 vir die ene.
- Plaas 1 en 0 in hul korrekte posisies.
- Skryf nou die som van die magte van 2 neer, en tel hulle op om die desimale vorm te kry: $256 + 128 + 32 + 2 = 418$

Oefeninge

17 Tel in binêr. Die getalle 1 tot 5 in binêre vorm is soos volg:

1, 10, 11, 100, 101

(a) Maak seker dat hulle korrek is deur hulle na desimale vorm om te skakel.

(b) Skryf die volgende vyftien getalle in binêre vorm neer tot en insluitend twintig.

18 Skryf die volgende binêre getalle in desimale vorm:

(a) 1 (b) 11 (c) 111

(d) 1111 (e) 10 (f) 110

(g) 1110 (h) 101 (i) 1001

(j) 10001 (k) 1010001 (l) 1000110

(m) 1111111 (n) 1110111

19 Skryf die volgende desimale getalle in binêre vorm:

(a) 111 (b) 112 (c) 113

(d) 127 (e) 129 (f) 365

(g) 10 (h) 100 (i) 1 000

(j) 384 (k) 484 (l) 385

(m) 500 (n) 623 (o) jou ouderdom

(p) aantal leerders in jou Wiskunde klas

(q) aantal leerders in jou skool

20 Watter binêre getal is groter? Verduidelik jou beredenering.

(a) 11111 of 11110 (b) 11111 of 100000

(c) 10101 of 10010 (d) 110010 of 110100

(e) 101010 of 101101 (f) 1001011 of 1010101

Optel en aftrek van binêre getalle

Die rekenkunde van binêre getalle is soortgelyk aan dié van desimale. Ons kan dieselfde prosedure volg, solank ons onthou dat ons basis 2 is en nie 10 nie.

Let wel: Maak seker wanneer jy kolomoptelling doen dat jy die gewig van die eenhede in gedagte hou. As jy onseker is, gaan terug na die tabel aan die begin van hierdie afdeling.

Oefeninge

21 Tel die volgende magte van twee op (ons is hier besig om met desimale getalle te werk):

(a) $1 + 1$ (b) $2 + 2$

(c) $4 + 4$ (d) $8 + 8$

(e) $16 + 16$ (f) $32 + 32$

(g) $64 + 64$ (h) $128 + 128$

(i) Wat het jy opgelet? Voltooi hierdie sin:

Wanneer ons ’n mag van 2 by homself voeg, kry ons ...

22 Herhaal die berekeninge in Oefening 21 (a) – (h), maar vir die getalle in binêre vorm, bv. $4 + 4 = 8$ word $100 + 100 = 1000$.

Skryf ’n reël vir jouself oor wat jy waarneem.

Uitgewerkte voorbeeld Optelling met twee ou bekendes

Probleem: Tel die binêre getalle 111 en 101 bymekaar:

Oplossing 1: Groepering

$$\begin{aligned} 111 + 101 &= (100 + 10 + 1) + (100 + 1) \\ &= (100 + 100) + 10 + (1 + 1) \\ &= 1000 + 100 + 10 \\ &= 1000 + 100 \\ &= 1100 \end{aligned}$$

Oplossing 2: Kolom-optelling

$$\begin{array}{ccccc} & {}^{+1} & 1^{+1} & 1^{+1} & 1 \\ + & & 1 & 0 & 1 \\ \hline & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

1 + 1 = 10; skryf 0 in die ene kolom en ‘dra’ 1 ‘oor’ na die twees kolom

1 + 1 + 0 = 10; skryf 0 in die twees kolom en ‘dra’ 1 ‘oor’ na die viers kolom

1 + 1 + 1 = 11; skryf 1 in die viers kolom en ‘dra’ 1 ‘oor’ na die agts kolom

Oefeninge

23 Tel die volgende binêre getalle bymekaar:

(a) 1 + 10 (b) 100 + 1 (c) 100 + 10
(d) 100 + 11 (e) 101 + 10 (f) 1000 + 111
(g) 1000 + 100 + 11 (h) 1000 + 100 + 10 + 1

Skryf ’n aantal reëls vir jouself neer gebaseer op wat jy hier waarneem.

24 Tel die binêre getalle bymekaar. Gebruik groepering en kolomoptelling in elke geval. Jy kan jou antwoorde toets deur die berekeninge oor te doen in desimale vorm (skakel eers die getalle om).

(a) 11 + 10 (b) 11 + 11 (c) 101 + 101
(d) 111 + 111 (e) 1011 + 1110 (f) 1101 + 1010
(g) 10111 + 1111 (h) 11010 + 1110 (i) 10001 + 11111
(j) 101010 + 110011 (k) 11 + 1 (l) 111 + 1
(m) 110 +10 (n) 1100 + 100 (o) 11111 + 1
(p) 11111 + 10 (q) 11111 + 100 (r) 11111 + 1000

Uitgewerkte voorbeeld Wat van aftrekking?

Probleem: Trek die binêre getalle van mekaar af: 110 – 101

Oplossing:

Metode 1:

Kolomaftrekking

$$\begin{array}{rccc} & 1 & 1 & 0^1 \\ - & 1 & 0 & 1 \\ \hline & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Metode 2: Groepering

$$\begin{aligned} 110 - 101 &= (100 + 10) - (100 + 1) \\ &= 10 - 1 \\ &= (1 + 1) - 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

In die ene (2^0) kolom het ons 0 – 1. Ons neem dus 1 van die twees (2^1) kolom. Dit laat 0 in die twees (2^1) kolom en 10 in die ene kolom. 10 – 1 = 1 ens.

Uitgewerkte voorbeeld

Probleem: Trek die binêre getalle 1011 – 111 van mekaar af, deur groepering te gebruik.

Oplossing:

Metode 1:

Kolomaftrekking

$$\begin{array}{rcccc} & \cancel{1} & {}^{1}0 & 1 & 1 \\ - & & 1 & 1 & 1 \\ \hline & & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

Metode 2: Groepering

$$\begin{aligned} 1011 - 111 &= (1000 + 10 + 1) - (100 + 10 + 1) \\ &= 1000 + 10 + 1 - 100 - 10 - 1 \\ &= 1000 - 100 \\ &= 100 \end{aligned}$$

2154 TechMaths Afr G10 LB.indb 49 2015/11/25 4:12 PM

Wat gebeur wanneer ons 'n groter getal van 'n kleiner getal moet aftrek? Byvoorbeeld om ’n desimale verskil soos 17 – 23 in jou kop uit te werk? Jy werk uit 23 – 17 = 6 en dan weet jy dat 17 – 23 = –6. Doen dieselfde vir binêre getalle. Negatiewe binêre getalle maak net soveel sin as negatiewe desimale getalle.

Oefening

25 Doen die volgende binêre aftrekkings. Wees gewaarsku: in sommige gevalle word groter binêre getalle van kleineres afgetrek. Maak seker van jou antwoorde deur die berekeninge in desimale vorm oor te doen.

(a) 11 – 10
(b) 10 – 11
(c) 101 – 111
(d) 111 – 100
(e) 1011 – 1110
(f) 1101 – 1010
(g) 10111 – 1111
(h) 11010 – 1110
(i) 10001 – 11111
(j) 110011 – 101010
(k) 11 – 1
(l) 111 – 1
(m) 110 – 10
(n) 1100 – 100
(o) 11111 – 1
(p) 11111 – 10
(q) 11111 – 100
(r) 11111 – 1000

Vermenigvuldiging van binêre getalle

Oefening

26 Trek die tabel oor en voltooi dit; beantwoord die vrae wat volg:

Vermenigvuldiging in binêr	Dieselfde vermenigvuldiging in desimaal	Resultaat in desimaal	Resultaat in binêr
11 × 10	3 × 2	6	110
101 × 10		10	
111 × 10			
1101001 × 10			
11 × 100			
101 × 100			
111 × 1000			

(a) Wat kom jy agter omtrent vermenigvuldiging met 10, 100, 1000 ens. in binêr?

(b) Probeer dit verduidelik deur die binêre vermenigvuldiging 110 × 10 met die desimale vermenigvuldiging 284 × 10 te vergelyk.

Weereens, ons kan die maniere waarop ons dit in desimale doen, herinterpreteer.

2154 TechMaths Afr G10 LB.indb 50 2015/11/25 4:12 PM

Uitgewerkte voorbeeld

Probleem: Vermenigvuldig 111 en 101

Oplossing 1: Verspreiding en optel deur groepering

$$
\begin{aligned}
111 \times 101 &= 111 \times (100 + 1) \\
&= (111 \times 100) + (111 \times 1) \\
&= 11100 + 111 \\
&= 11100 + 100 + 11 \\
&= (11100 + 100) + 11 \\
&= 100000 + 11 \\
&= 100011
\end{aligned}
$$

Jy sien dat 11100 + 100 in een stap gedoen is. Indien jy verward is, verwys na die laaste agt oefeninge wat jy sopas voltooi het. Jy mag moontlik verkies om 11100 + 100 te doen deur groepering (wat nie moeilik is nie, dit vereis net meer skryfwerk):

$$
\begin{aligned}
11100 + 100 &= 10000 + 1000 + 100 + 100 \\
&= 10000 + 1000 + 1000 \\
&= 10000 + 10000 \\
&= 100000
\end{aligned}
$$

Dus 11100 + 100 is gelyk aan 100000

Oplossing 2: Kolomvermenigvuldiging

$$
\begin{array}{cccccc}
 & & & 1 & 1 & 1 \\
\times & & & 1 & 0 & 1 \\
\hline
 & & & 1 & 1 & 1 \\
 & & 0 & 0 & 0 & 0 \\
{}^{+1} & {}^{+1}1 & {}^{+1}1 & 1 & 0 & 0 \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1
\end{array}
$$

Hierdie is 111 × 1 (die 1 van 10**1**)

Hierdie is 111 × 00 (die 0 van 1**0**1)

Hierdie is 111 × 100 (die 1 van **1**01)

Oefening

27 Doen die volgende binêre vermenigvuldigings. Maak seker van jou antwoorde deur die vermenigvuldigings oor te doen in desimale vorm.

(a) 11 × 11 (b) 110 × 11 (c) 110 × 110

(d) 101 × 11 (e) 10 × 100 (f) 11 × 111

(g) 1101 × 101 (h) 111 × 111 (i) 1101 × 111

(j) 1001 × 111 (k) 1110 × 1011 (l) 1001 × 1101

(m) 10111 × 1101 (n) 11001 × 1001 (o) 101 × 111111

(p) 111111 × 1001 (q) 101101 × 11101 (r) 110011 × 101111

Deling van binêre getalle

Kom ons kyk weer na langdeling: 13 ÷ 2

$$
\begin{array}{rrrr}
 & & 6 & 7 \\ \cline{2-4}
\multicolumn{1}{r|}{2} & 1 & 3 & 4 \\
 & - & 1 & 2 \\ \cline{3-4}
 & & 1 & 4 \\
 & - & 1 & 4 \\ \cline{3-4}
 & & - & -
\end{array}
$$

Dus 134 ÷ 2 = 67 res 0

Binêre langdeling: 11011_2¸ 10_2

$$
\begin{array}{rrrrrr}
 & & 1 & 1 & 0 & 1_2 \\ \cline{2-6}
\multicolumn{1}{r|}{1\ \ 0_2} & 1 & 1 & 0 & 1 & 1_2 \\
 & -1 & 0_2 & & & \\ \cline{2-3}
 & & 1 & 0_2 & & \\
 & - & 1 & 0_2 & & \\ \cline{3-4}
 & & & 0 & 1 & 1_2 \\
 & & & - & 1 & 0_2 \\ \cline{4-6}
 & & & & & 1_2
\end{array}
$$

Dus $11011_2 \div 10_2 = 1101_2$ res 1_2

Uitgewerkte voorbeeld

Probleem: Bereken $10001_2 \div 101_2$

Oplossing 1: Langdeling die standaard manier

dra die 1 van die sestiens kolom oor na die agts kolom; dit gee 10 in die agts kolom

dra 1 van die agts kolom oor na die viers kolom; dit laat 1 in die agts kolom

$$
\begin{array}{rrrrrr}
 & & & 1 & 1_2 & \\ \cline{2-6}
\multicolumn{1}{r|}{1\ \ 0\ \ 1_2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 1_2 \\
 & - & 1 & 0 & 1_2 & \\ \cline{2-5}
 & & 0 & 1 & 1 & 1_2 \\
 & & - & 1 & 0 & 1_2 \\ \cline{3-6}
 & & & & 1 & 0_2
\end{array}
$$

Dus $10001_2 \div 101_2 = 11_2$ res 10_2

2154 TechMaths Afr G10 LB.indb 52 2015/11/25 4:12 PM

Oplossing 2: Groepering

$$\begin{aligned}10001_2 &= 101_2 \times 10_2 + 111_2\\ &= 101_2 \times 10_2 + 101_2 \times 1_2 + 10_2\\ &= 101_2 \times (10_2 + 1_2) + 10_2\\ &= 101_2 \times 11_2 + 10_2\end{aligned}$$

Vir die groepering van die getal 10001_2 om gelyk te wees aan $101_2 \times 11_2 + 10_2$ kan ons aflei dat $10001_2 \div 101_2 = 11_2$ met res 10_2.

Oefening

28 Gebruik die metode van langdeling om die volgende binêre berekeninge te doen.

(a) $100 \div 10$
(b) $100100 \div 100$
(c) $101 \div 10$
(d) $10 \div 101$
(e) $111 \div 11$
(f) $1111 \div 11$
(g) $1111 \div 10$
(h) $1111 \div 11$
(i) $1111 \div 110$
(j) $1111 \div 101$
(k) $1111 \div 111$
(l) $10110 \div 101$
(m) $11001 \div 110$
(n) $11000 \div 111$
(o) $10111 \div 1101$
(p) $111111 \div 101$
(q) $111111 \div 1001$
(r) $101101 \div 111$

OPSIONEEL: Breuke in desimale vorm

Enige reële getal kan in binêre vorm geskryf word, insluitend breuke. In plaas van die desimale tiendes, honderdstes, duisendstes, ens., het ons in binêre halwes, kwarte, agtstes, sestiendes, ens. Dus sal 0,5 in desimale 0,1 in binêre wees; 0,25 in desimale sal 0,01 in binêr wees; en 0,75 in desimale sal 0,11 in binêr wees. Ander breuke is meer uitdagend om om te skakel, bv. 0,333 … herhalend in desimaal is 0,01010101 … herhalend in binêr.

Uitgewerkte voorbeeld

Probleem: Skryf die desimale getal 5,375 in binêr.

Oplossing: Jy moet die breukdeel kan 'sien' as 'n som van breuke wat magte van 2 is.

Stap 1: $5 = 4 + 1$, dus is 5 in binêr 101

Stap 2A: Soek die grootste breuk wat minder is as 0,375 wat 'n mag van twee is

$0{,}375 = 0{,}25 + 0{,}125 = \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$, so 0,375 in binêr is 0,011

Stap 2B: Alternatief: gebruik 'n reeks stappe ('n algoritme):

Bepaal die kleinste mag van 2 wat 0,375 sal vermenigvuldig om vir jou 'n produk groter as of gelyk aan 1 te gee:

2 is te klein, maar 4 werk: $4 \times 0{,}375 = 1{,}5$. Daar is dus 'n kwart.

Herhaal hierdie stap op die 0,5 d.i. $2 \times 0{,}5 = 1$. Daar is dus 'n kwart en 'n half.

Sit hierdie saam: $0{,}375 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$, wat 0,011 in binêr tot gevolg het.

Stap 3: sit die twee dele saam: 5,375 in desimale is 101,011 in binêr.

Uitgewerkte voorbeeld Skryf die binêre breuk 0,1011 in desimale

Oplossing: Gebruik 'n tabel soos ons vir heelgetalle gedoen het, maar gebruik breuk-magte van 2:

$\frac{1}{2}$ 2^{-1}	$\frac{1}{4}$ 2^{-2}	$\frac{1}{8}$ 2^{-3}	$\frac{1}{16}$ 2^{-4}	$\frac{1}{32}$ 2^{-5}	$\frac{1}{64}$ 2^{-6}	…
1	0	1	1	0	0	…

Dus 0,1011 in binêr is $\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = 0{,}5 + 0{,}125 + 0{,}006\ 25 = 0{,}687\ 5$.

Let wel: In rekenaarwerk word 'n ander basis as 2 ook gebruik. Dit word die heksadesimale basis, of basis 16 genoem. Omdat ons 16 syfers daarvoor nodig het, en ons slegs 10 van die desimale sisteem het, word die desimale getalle 10, 11, … 15 aangedui deur A, B, … , F. In heksadesimale dus, is die eerste twintig telgetalle: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F, 10, 11, 12, 13, en 14. Die getal 2B7 in heksadesimale is $(2 \times 16^2) + (11 \times 16^1) + (7 \times 16^0) = 695$ in desimale.

Let wel: Breuke van hoeke en tyd word gedeeltelik in seksagesimale basis gemeet, d.i. basis 60. Een minuut is een sestigste van 'n graad of 'n uur. 'n Sekonde is een drie-duisend-seshonderdste van 'n graad of 'n uur. Blaai vooruit na Hoofstuk 10 vir inligting oor sestallige hoeke!

2.7 Komplekse getalle

Komplekse getalle is getalle wat uit reële getalle en denkbeeldige getalle bestaan. Komplekse getalle word aangedui deur C. Hulle is in die vorm van $a + ib$, waar a 'n reële getal voorstel en b verteenwoordigend van denkbeeldige getalle is. Voorbeelde van komplekse getalle is $2 + 3i$, $-4 + i$, ens. Denkbeeldige getalle kan in terme van $\sqrt{-1}$ geskryf word. Ons gebruik die simbool i vir $\sqrt{-1}$. Die rekenkunde van denkbeeldige getalle is derhalwe gebaseer op die volgende:

Eienskap van *i*: $i^2 = i \times i = -1$

Dus, $\sqrt{-1} = \sqrt{i^2} = i$

Oefeninge

29 Bepaal of die volgende getalle reël of denkbeeldig is. Verduidelik hoe jy dit doen.

(a) $\sqrt{-2}$
(b) $\sqrt[3]{-1}$
(c) $\sqrt{-4}$
(d) $\sqrt[3]{-4}$
(e) $i + i$
(f) $-i \times -i$
(g) $i \times i \times i$
(h) $i \times i \times -i \times -i$
(i) $2i \times 3i$
(j) $i - i$

30 Vereenvoudig vraag 29 (a) tot (j).

Vir verryking: komplekse getalle kan opgetel, afgetrek, gedeel en vermenigvuldig word, bv.

- $2 + 3i + (4 + 4i) = 6 + 7i$
- $-2 + i - 3i + 5 = 3 - 2i$
- $(2 + 3i)(-1 + 3i) = -2 + 6i - 3i + 9i^2 = -2 + 6i - 3i - 9 = -11 + 3i$
- $\dfrac{-4 + 6i}{2} = -2 + 3i$

2.8 Opsomming

- **Reële getalle** is al die getalle waarmee ons normaalweg werk. Hulle word geklassifiseer in versamelings in 'n hiërargiese struktuur. Die belangrikste van hierdie versamelings het spesiale simbole.
- Reële getalle kan op 'n **getallelyn** aangedui word deur daaraan te dink dat elke reële getal 'n punt op 'n skaal lyn is. Ons stel ook getalversamlings voor deur van versamelingnotasie en intervalnotasie gebruik te maak.
- Ons **rond af** om onnodige presisie in die waardes van getalle te verwyder. Elke getal wat ons meet en gebruik in ons daaglikse werk, is inderdaad afgerond, omdat die meetinstrument wat ons gebruik nie vir ons perfekte presiese lesings kan gee nie.
- **Rasionale getalle** kan altyd as egte breuke gesien word. Enige desimale getal wat na 'n sekere aantal desimale syfers termineer of eindig, is rasionaal. Enige getal met 'n herhalende en nie-eindige desimale deel, is 'n rasionale getal. Ons rond irrasionale getalle af tot rasionale skattings. Dit beteken dat elke getal wat ons in ons daaglikse werk gebruik, ook rasionaal is, hetsy die presiese getal 'n meer presiese rasionale getal of 'n irrasionale getal is.
- 'n Breuk wat nie-eindige en nie-herhalend is, is 'n **irrasionale getal,** omdat dit nie as a verhouding van twee heelgetalle geskryf kan word nie. Drie belangrike plekke waar irrasionale getalle in wiskunde voorkom, is in sirkels (*pi*), in wortelgetalle, en in trigonometrie.
- **Binêre getalle** is die kern van hoe elektroniese rekenaars werk. Binêre getalle is getalle in die basis 2. Dit beteken dat binêre getalle slegs twee syfers nodig het, naamlik 0 en 1. Om 'n heelgetal in binêre vorm uit te druk, deel ons dit op in terme van magte van 2. Ons begin met die hoogste mag van 2 wat minder is as die getal en werk ons weg af tot by 1. Optel, aftrek, vermenigvuldiging, en deling kan gedoen word deur dieselfde idees wat ons vir desimale rekenkunde gebruik het.
- **Denkbeeldige getalle** is getalle wat in terme van $\sqrt{-1}$ geskryf kan word. Ons simboliseer die getal $\sqrt{-1}$ met die letter i. Die rekenkunde van denkbeeldige getalle is gebaseer op die volgende eienskap van i: $i \times i = -1$. Reële getalle en denkbeeldige getalle kan nie direk bymekaar getel word nie. Ons noem getalle wat 'n reële deel en 'n denkbeeldige deel het, komplekse getalle.

2.9 Konsolideringsoefeninge

1 Klassifiseer die volgende getalle.

(a) $-11\ 456$
(b) $-11{,}456$
(c) $\sqrt{\frac{4}{5}}$
(d) 3,333 ... (herhalend)
(e) $2 \div 3$
(f) $1 + \frac{1}{4} + \frac{3}{4}$
(g) $\sqrt{-5}$
(h) $\sqrt[3]{-5}$

2 Stel die volgende getalle op dieselfde getallelyn voor. Jou getallelyn hoef nie volgens skaal te wees nie.

(a) π
(b) 3,14
(c) $\frac{22}{7}$
(d) $\frac{355}{113}$

Watter van die rasionale getalle in (b), (c) en (d) is die beste skatting van π?

3 Skryf die volgende getalle in die eenvoudigste $\frac{\text{heelgetal}}{\text{heelgetal}}$ vorm moontlik:

(a) 0,75
(b) 0,75 75 ... herhalend
(c) 0,025
(d) 1,008
(e) 4,38 38 ... herhalend
(f) $2\frac{3}{4}$
(g) 0,18
(h) 0,12 (2 herhalend)
(i) 0,750
(j) 3,125
(k) 0,871 871...
(l) 2,23 23 23 ...

4 Skryf die volgende in desimale vorm:

(a) $\frac{6}{7}$
(b) $\frac{7}{8}$
(c) $\frac{8}{9}$
(d) $\frac{9}{10}$
(e) $\frac{35}{99}$
(f) $\frac{15}{990}$
(g) $\frac{2}{3}$
(h) $\frac{66}{990}$
(i) $\frac{11}{30}$
(j) $3\frac{6}{7}$
(k) $6\frac{7}{15}$
(l) $\frac{153}{44}$

5 Tussen watter heelgetalle lê die volgende wortelgetalle?

(a) $\sqrt{5}$
(b) $\sqrt{11}$
(c) $\sqrt{31}$
(d) $\sqrt[3]{18}$
(e) $\sqrt[3]{41}$
(f) $\sqrt[5]{45}$

6 Skryf die getalle 1 tot 25 in binêre vorm.

7 Druk die volgende binêre getalle uit in desimale vorm.

(a) 1 (b) 111 (c) 11

(d) 10 (e) 110 (f) 1001

8 Druk die volgende desimale getalle uit in binêre vorm.

(a) 112 (b) 45 (c) 11

(d) 1 589 (e) 420 (f) 13

9 Doen die volgende binêre berekeninge.

(a) $1 + 111$ (b) $1 + 10$

(c) $10 + 110$ (d) $10 + 111$

(e) $101 + 1110$ (f) $100 - 101$

(g) $11 - 10$ (h) $101 - 111$

(i) $11011 - 111$ (j) $11111 - 11$

10 Doen die volgende binêre berekeninge. In die geval van deling, gee die res.

(a) 1×111 (b) 1×10

(c) 10×110 (d) 10×111

(e) 101×1110 (f) $100 \div 101$

(g) $11 \div 10$ (h) $101 \div 111$

(i) $11011 \div 111$ (j) $11111 \div 11$

3 Eksponente

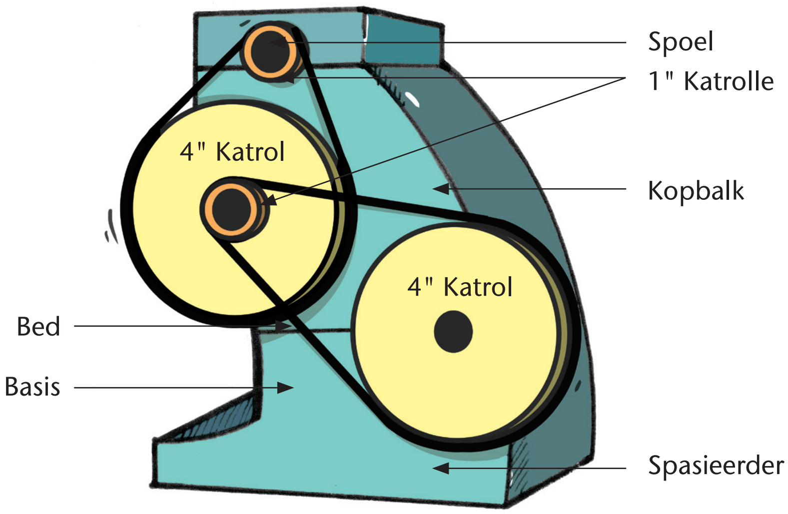
Hierdie hoofstuk bevat merendeels hersiening van wat jy verlede jaar gedoen het. Ons lui hierdie hoofstuk in met drie tegniese toepassings. Daar is talle ander toepassings waarvan sommige hul neerslag sal vind in die oefeninge. In Graad 10 handel Eksponente uit en uit oor herhaalde vermenigvuldiging, herhaalde deling, en telfaktore. Wanneer ons van herhaalde vermenigvuldiging/deling praat, bedoel ons dat ons oor en oor vermenigvuldig en deel.

In hierdie hoofstuk gaan jy:

- eksponensiële notasie hersien, terwyl ons in gedagte hou dat notasie is hoe ons iets *voorstel*
- die eienskappe van eksponente, wat handel oor hoe herhaalde vermenigvuldiging werk, hersien
- uitdrukkings vereenvoudig, wat jy vir verskeie redes moet kan doen
- eksponensiële vergelykings oplos, d.i. die waarde van onbekende eksponente vind
- wetenskaplike notasie hersien, wat jy in tegniese wetenskappe en in ander tegniese vakke sal moet doen
- omskakeling tussen kwadratiese eenhede en tussen kubieke eenhede hersien; ’n waardevolle vaardigheid wanneer jy meetings doen of om tegniese probleme in die werklike lewe op te los
- waardes in verskillende ekwivalente vorms uitdruk deur gebruik te maak van voorvoegsels soos kilo-, nano-, mega-
- situasies identifiseer waar eksponente te voorskyn kom; enige situasie wat herhaalde vermenigvuldiging in ’n eksponensiële situasie vereis
- wanneer ons van herhaalde vermenigvuldiging praat, sluit ons ook herhaalde deling in. Dit is omdat enige deling ook as vermenigvuldiging gesien kan word, en andersom. Byvoorbeeld, om deur 2 te deel is dieselfde as om met 0,5 te vermenigvuldig of ekwivalent $\frac{1}{2}$. Nog ’n voorbeeld is deling deur $\frac{4}{3}$ is dieselfde as vermenigvuldiging met $\frac{3}{4}$.

3.1 Inleiding tot herhaalde vermenigvuldiging

Bandaandrywing situasie



Let wel: in sommige situasies sal jy moet werk in die ou, nie-metrieke meeteenhede van voete en duime. Hulle word byvoorbeeld steeds in die VSA gebruik. 'n Duim is ongeveer 2,50 cm en daar is 12 duime in 'n voet. Daar is 'n snelskrif-vorm van duime en voete te skryf, bv. as 'n persoon 5 voet 2 duim lank is, kan ons dit skryf as 5 vt. 4 dm., of selfs korter as 5'4".

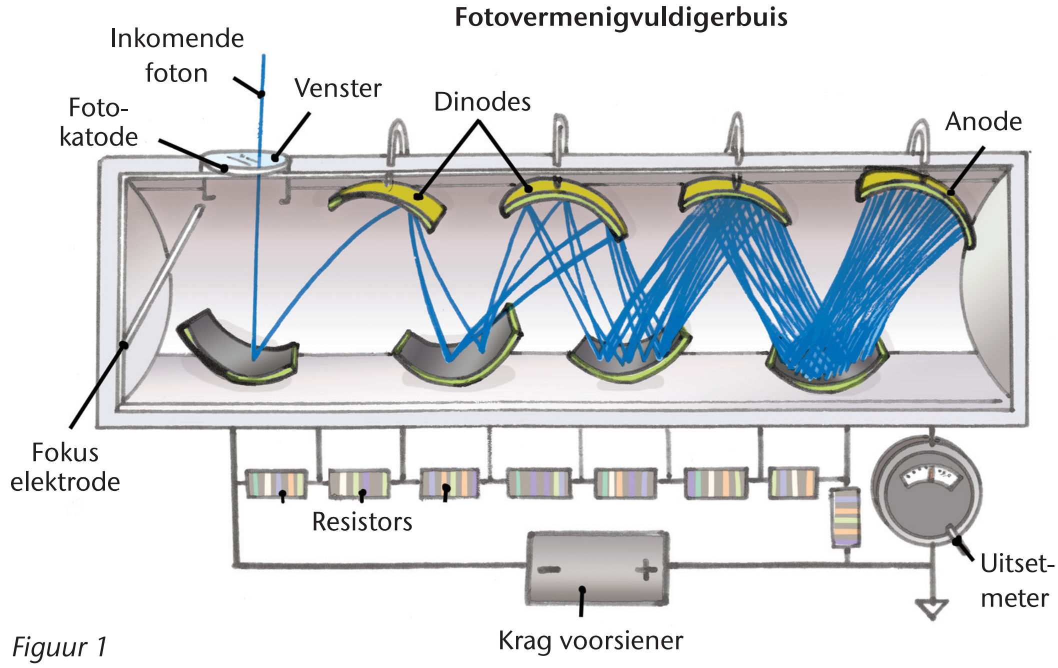
Pasop: die simbole, ' en ", word gebruik vir minute en sekondes in hoekmeting. Sien ook hoofstuk 10 vir meer hieroor.

Die diagram stel 'n saamgestelde bandaandrywing voor wat van 'n draaibank gedryf word. Elke 4-duim diameter katrol, is aan 'n 1-duim diameter katrol gekoppel. Die 4"-katrol regs onder is die dryfkatrol vir die draaibank. Die 1" gedrewe katrol is aan die spoel, of as, vas.

Deur van 'n 4" na 'n 1"-katrol te gaan, veroorsaak 'n versnelling van 4 keer. Indien die 4"-katrol teen 20 rpm draai, sal die 1"-katrol teen 80 rpm draai. Die aaneenskakeling van die twee katrol-drywers, veroorsaak 'n vermeerdering van spoed effek van 4 × 4 of 16 keer.

Watter versnellingseffek kry ons wanneer ons drie sulke drywers aanmekaar koppel? En as ons vier of selfs meer koppel?

Fotovermenigvuldiger situasie



Figuur 1

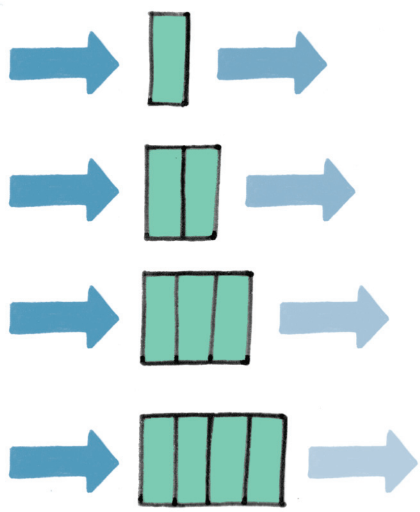
In sommige tegniese velde soos in kerntegnologie, sterrekunde, ens. moet ons toets vir lae vlakke van uitstraling. Die meetinstrument moet baie lae intensiteit uitstraling kan omskakel in 'n elektriese stroom.

Uitstraling bestaan in klein hoeveelhede wat ons fotons noem. Elke foton bots teen 'n elektron van die fotokatode. Hierdie elektron bots dan teen die eerste dinode om twee of meer elektrone vry te stel. Die proses waar elektrone met elke dinode bots en selfs meer dinodes vrystel word voortgesit van dinode tot dinode.

In die geval van die fotovermenigvuldiger in die diagram, kan jy sien dat elke elektron wat met een van die dinodes bots, twee elektrone vrystel. Hierdie elektrodes beweeg na die volgende diode, en daar stel elkeen op hul beurt twee elektrone vry. So verdubbel die stroom van een dinode na die volgende. In die diagram is daar ses dinodes, dus sal die stroom by die anode

$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ keer die stroom opwek wat deur die fotons by die fotokatode veroorsaak is.

Klank transmissie situasie



'n Opname-ateljee het klankdigting nodig. Een manier van klankdigting is om die mure met lae van klankabsorberende materiaal te bedek.

Die klankintensiteit is vir klank soos wat helderheid vir lig is; hoe harder die klank, hoe hoër die intensiteit.

Kom ons veronderstel dat een laag klankdigtingsmateriaal 30% (d.i. 'n breuk 0,3 of $\frac{3}{10}$) van die klank-intensiteit deurlaat. Twee lae sal 30% van die 30%, of $0,3 \times 0,3$ deurlaat. n lae sal $0,3 \times 0,3 \times 0,3 \times \ldots \times 0,3$ d.i. n faktore van 0,3 van die oorspronklike klank-intensiteit deurlaat.

3.2 Notasie vir herhaalde vermenigvuldiging en deling

Ons kan herhaalde vermenigvuldiging voorstel deur gebruik te maak van eksponensiële notasie. Ons herinner jou aan 'n paar basiese feite.

Terminologie en notasie

- x^n word 'n **mag** genoem, en is 'n verkorte weergawe vir $x \times x \times x \times \ldots$ tot n faktore in die besonder, x^1 is dieselfde as x
- x word die **basis** genoem, en n die **eksponent**
- ons lees x^n as 'x eksponent n'
- x^{-n} is die vereenvoudigde van $\frac{1}{x \times x \times x \times \ldots \text{ na } n \text{ faktore}}$, wat ook dieselfde is as $\frac{1}{x^n}$

Ons kan nou sommige basiese eienskappe van eksponente skryf deur die standaard notasie te gebruik:

Sommige basiese eienskappe van eksponente

- $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$, solank as $x \neq 0$
- $x^{-1} = \frac{1}{x}$, solank as $x \neq 0$
- $x^1 = x$
- $x^0 = 1$, solank as $x \neq 0$

Let Wel: die laaste uitdrukking mag verwarrend lyk: Hoe vermenigvuldig ons 'n getal herhaaldelik met nul'? Jy sal sien dat $x^0 = 1$ egter nie so vergesog is nie.

Nota: Wiskundiges noem die uitdrukking 0^0 'n onbepaalde uitdrukking. 'n Uitdrukking soos 0^{-3} word ongedefinieer genoem. Daar is 'n verskil tussen die twee, maar ons sal nie nou daarop ingaan nie.

Oefeninge Basiese hersiening van eksponente en eksponent notasie

1 Verwys na die fotovermenigvuldiger situasie in paragraaf 3.1 en voltooi die tabel. Jy mag jou sakrekenaar gebruik om jou met die *laaste kolom* te help. Jy kan herhaalde vermenigvuldiging doen, een vermenigvuldiging vir elke stap, indien jy wil.

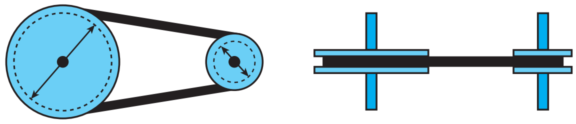
Stroom vermenigvuldiger by elke dinode	Aantal dinodes	Gekombineerde stroom vermenigvuldiger in uitgebreide vorm	Gekombineerde stroom vermenigvuldiger in eksponensiële vorm	Gekombineerde stroom vermenigvuldiger in numeriese vorm
2	5	$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$	2^5	32
2	10			
3	5			
4	5			
			4^9	
6	5			
3				729
9				729
				15 625
		$1{,}5 \times 1{,}5 \times 1{,}5 \times 1{,}5 \times 1{,}5 \times 1{,}5$		
				1

2 Verwys na die klanktransmissie situasie in paragraaf 3.1:

(a) Wys dit in eksponensiële vorm. Watter effek het dit as daar een laag is?

(b) Wat gebeur indien daar geen lae is nie, d.i. nul lae? Wys dit in eksponensiële vorm. Dit mag nodig wees dat jy hier so 'n bietjie 'uit die boks' dink!

3 Hierdie diagram wys ’n sy-aansig en bo-aansig van ’n eenvoudige bandaandrywing:



Kom ons veronderstel dat die verhouding van die deursnee van die groot katrol tot die deursnee van die klein katrol 3:1 is. Kom ons noem die versnellings-/verstadigingseffek van die bandaandrywing die *spoed faktor*.

(a) Stem jy saam met die stelling: ‘Indien die groot katrol die drywer is, en die klein katrol die volger, dan sal die spoedfaktor 3 wees’?

(b) Wat is die spoedfaktor indien die klein katrol die drywer katrol is? Skryf hierdie faktor op verskillende maniere, insluitende eksponensiële notasie.

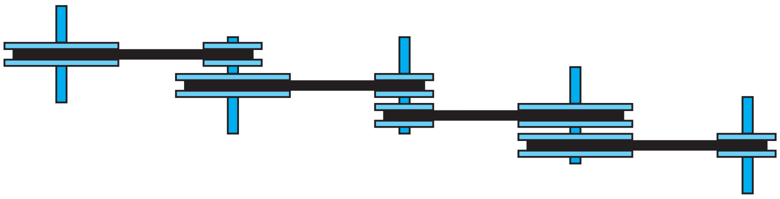
(c) Vergelyk die spoedfaktore in (a) en (b). Kan ons sê dat die spoedfaktor wederkerig is?

In oefeninge 4 en 5 moet jy die effek van die verskillende drywers op soveel moontlik maniere voorstel. Hier is ’n voorbeeld van wat van jou verwag word. Dit gee sommige, maar nie alle, maniere waarop jy die uitdrukkings vir ’n samegestelde drywer kan skryf. Die drywer is aan die linkerkant:

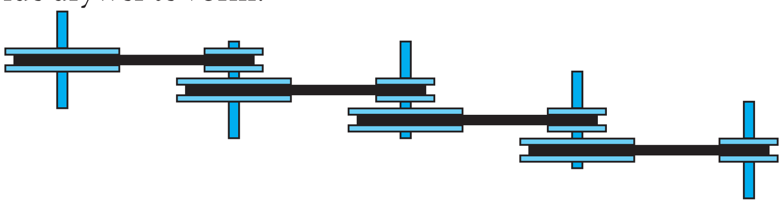
$3 \times 3 \times \frac{1}{3} \times 3$ (uitgebreide vorm)

$3^2 \times 3^{-1} \times 3$ of $3^3 \times 3^{-1}$ (eksponensiële vorme)

3^2 of 9 (gekombineerde/effektiewe vorme)



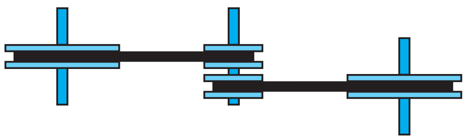
4 Stel jouself voor dat ons vier van die bandaandrywings van oefening 3 verbind om ’n saamgestelde drywer te vorm:



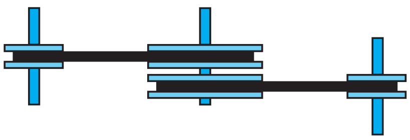
(a) Indien die groot katrol op die linkerkant die drywer is, wat is die spoedfaktor van die vier drywers saam? Skryf dit op verskillende maniere, insluitend eksponensiële notasie.

(b) Beantwoord dieselfde vraag as in (a), maar vir die situasie waar die klein katrol op regs die drywer is.

(c) Beantwoord dieselfde vraag as in (a), vir die volgende saamgestelde drywer:



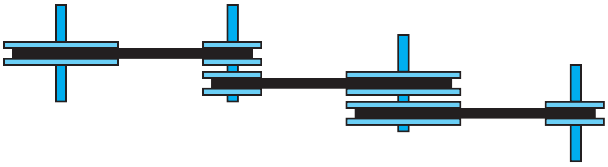
(d) Beantwoord dieselfde vraag as in (a), vir die volgende saamgestelde drywer:



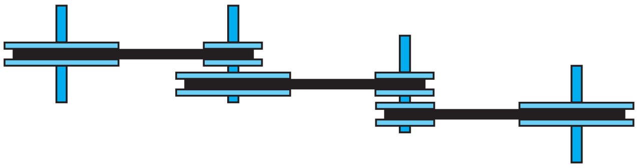
(e) Watter gevolgtrekking kan jy maak oor die effek van die twee drywers in (c), en die twee drywers in (d)? Verduidelik dit en stel jou gevolgtrekkings voor in eksponensiële notasie. Watter van die eienskappe van eksponente het ons hier ontdek?

5 Weereens: gebruik dieselfde drywers wat ons in oefening 3 gebruik het. Beskou die volgende drie saamgestelde drywers:

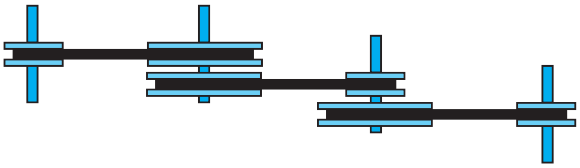
A



B



C



(a) Veronderstel dat die katrol heel links die drywer is. Wat is die effektiewe spoedfaktor vir bandaandrywer A? Verduidelik hoe jy dit sien en stel jou verduideliking in eksponensiële vorm voor. Doen dieselfde vir saamgestelde bandaandrywers B en C.

(b) As ons dus nou aanvaar dat die katrol heel regs die drywer is, bepaal die effektiewe spoedfaktor vir die drie saamgestelde bandaandrywers A, B, en C. Verduidelik hoe jy dit sien en stel jou verduideliking voor in eksponensiële vorm.

(c) Vergelyk jou bevindings in (a) en (b). Kan ons die saamgestelde bandaandrywers met enkel bandaandrywers van dieselfde tipe vervang?

(d) Verder, vergelyk die drie saamstelde bandaandrywers met mekaar. Tot watter gevolgtrekking het jy gekom? Watter van die eienskappe van eksponente is hier ter sprake?

Hopelik is jy oortuig dat die 'wette' van eksponente nie werklike wette is nie. Hulle is eintlik **eienskappe** van hoe ons 'n getal herhaaldelik met homself kan vermenigvuldig.

3.3 Die algebra van eksponente

Vier baie belangrike eienskappe, soms 'wette' genoem, van eksponente

- $x^m \times x^n = x^{m+n}$ of $x^m x^n = x^{m+n}$
- $x^m \div x^n = x^{m-n}$ of $\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$
- $(x^m)^n = x^{m \times n}$ of $(x^m)^n = x^{mn}$
- $x^n \times y^n = (x \times y)^n$ of $x^n y^n = (xy)^n$

Wiskundiges sal eintlik na die eienskappe verwys as wette. 'n Eienskap van iets is 'n manier waarop dit optree of dinge doen. Ons almal weet hoe vermenigvuldiging optree. Laat ons dus gemaklik met onsself wees en die 'wette' eienskappe noem.

Let daarop dat dit slegs 'n lys van die eienskappe is. Hulle hoef nie gememoriseer te word nie. Die eienskappe behoort by jou op te kom soos jy dit nodig kry, omdat jy dit nodig kry!

Addisionele notasie

- Vermenigvuldiging: Byvoorbeeld, $a \times b$ kan geskryf word as $a.b$ en mees ekonomies as ab.
- Deling: Byvoorbeeld, $a \div b$ word ook geskryf as $\frac{a}{b}$, en ook as $a.b^{-1}$, of selfs ab^{-1}.

Oefeninge Ondersoek en toets die eienskappe

6 Skryf 7^{12} op vyf of meer verskillende maniere deur die volgende eienskappe te gebruik:

(a) $x^m x^n = x^{m+n}$

(b) $\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$

(c) $(x^m)^n = x^{mn}$

7 Gebruik die eienskap $x^n y^n = (xy)^n$ om $3^6 \times 5^9$ in soveel vorme as wat jy kan, te skryf.

8 Ondersoek hoe die eienskappe toegepas kan word op die bandaandrywer situasie. In elke geval is dit nodig dat jy dit op soveel maniere as wat jy kan, sal wys. Jy moet vir elk van die maniere die bandaandrywers teken. Dui die katrol in elke geval duidelik aan:

(a) Gebruik vyf bandaandrywers met spoedfaktor 4, om te wys hoe $x^m x^n = x^{m+n}$ werk.

(b) Gebruik vier bandaandrywers met spoedfaktor 5, om te wys hoe $\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$ werk.

(c) Gebruik ses bandaandrywers met spoedfaktor 0,1, om te wys hoe $(x^m)^n = x^{mn}$ werk.

(d) Gebruik drie bandaandrywers met spoedfaktor 2, en drie met spoedfaktor 5, om te wys hoe $x^n y^n = (xy)^n$ werk.

2154 TechMaths Afr G10 LB.indb 65 2015/11/25 4:13 PM

9 Besluit of die volgende korrek is of nie. In elke geval **regverdig** waarom jy so sê deur die onbekende waardes te verskaf, en te wys hoekom hulle korrek is of nie korrek is nie.

(a) $\frac{x^m}{x^n} = \frac{1}{x^{n-m}}$ (b) $a^p b^q = (ab)^{pq}$

(c) $y^i.y^j.y^k = y^{i+j+k}$ (d) $x^m y^n = (xy)^m y^{n-m}$

Om iets te 'regverdig' beteken om te verduidelik dat iets korrek is deur bekende feite of eienskappe van die ding te gebruik. Jy weet dat die regverdiging aanvaarbaar is wanneer dit sin maak vir jou en enige een met wie jy dit deel.

10 Watter van die volgende uitdrukkings is ekwivalent aan $9^2 \times 2^3$?

(a) 8×3^4 (b) $9^2 \times 4^1$ (c) 81×8

(d) $18 \times 4 \times 3^2$ (e) $18 \times 12 \times 3$ (f) $3^4 \times 2^3$

(g) 18^5 (h) $4^2 \times 9^2 \div 2$ (i) $6^4 \div 2$

(j) 3×6^3 (k) $18^3 \div 3^2$ (l) 2×18^2

(m) 648

11 Skryf elk van die volgende uitdrukkings op ten minste vyf ekwivalente wyses:

(a) $5^2 \times 5^7$ (b) $8^0 \times 8^8$ (c) $x^5 \times x^4$ (d) $6^{p+1} \times 6^{3p+3}$

(e) $4^6 \div 4^3$ (f) $7^5 \div 7^4$ (g) $y^8 \div y^6$ (h) $2^{3p+3} \div 2^{p-2}$

(i) $(2^3)^4$ (j) $(x^{-3})^{-5}$ (k) $(3^2)^{x-3}$ (l) $(7^{-2})^3$

(m) $5^7 \times 3^4$ (n) $8^1 \times 2^5$ (o) $x^5 y^2$ (p) $6^2 \times 5^2$

3.4 Vereenvoudiging

In oefening 10 is al die uitdrukkings behalwe (b) en (g) ekwivalent tot die gegewe uitdrukking. Watter uitdrukking is die eenvoudigste? Wat presies bedoel ons met 'eenvoudigste'?

Vereenvoudiging van 'n uitdrukking beteken nie slegs om die kortste ekwivalente uitdrukking neer te skryf nie. Ons kan redeneer dat die uitdrukking in (m) die eenvoudigste is in daardie geval. Die eenvoudigste eksponensiële uitdrukking is eintlik in (f).

Ons sal begin met 'n uitgewerkte voorbeeld en sodoende die redes uitklaar.

Belangrik: Wanneer jy gevra word om iets te vereenvoudig, kan jy jou sakrekenaar gebruik om baie van die werk vir jou te doen. As 'n leerder van wiskunde, is dit egter baie beter vir jou om die werk self te doen. Op daardie manier oefen jy om wiskunde te gebruik en dit sal jou op die lange duur goed te staan kom, daarom *sal daar vir nou van jou verwag word om al jou bewerkings te wys*.

Uitgewerkte voorbeeld Eenvoudigste eksponensiële vorm

Probleem: Vereenvoudig die uitdrukking $\frac{6^3}{4.9^2}$ en toon al jou bewerkinge.

Oplossing: Let eerstens daarop dat ons nie enige van die wette kan toepas nie, omdat die basisse almal verskillend is. Ons weet egter dat 6 saamgestel is uit die priemfaktore 2 en 3. Op soortgelyke wyse, het 4 en 9 ook priemfaktore.

Stap 1: Druk al die basisse uit in hul kleinste heelgetal priemfaktore:

$6 = 2.3$ $\quad$ $4 = 2.2 = 2^2$ $\quad$ $9 = 3.3 = 3^2$

Herskryf die gegewe uitdrukking deur gebruik te maak van priemfaktore van die basisse:

$$\frac{6^3}{4.9^2} = \frac{(2.3)^3}{2^2.(3^2)^2}$$

Stap 2: Die uitdrukking vra nou om vereenvoudig te word.

Gebruik die eienskappe van eksponente:

$$\begin{aligned}\frac{6^3}{4.9^2} &= \frac{(2.3)^3}{2^2(3^2)^2}\\ &= \frac{2^3.3^3}{2^2.3^4}\\ &= \frac{2}{3}\end{aligned}$$

Jy kan die faktore in uitgebreide vorm skryf en dan die uitdrukking wat hieruit voortspruit, vereenvoudig: $\frac{6^3}{4.9^2} = \frac{(2.3)^3}{2^2(3^2)^2} = \frac{(2.3)(2.3)(2.3)}{2^2(3^2)(3^2)} = \frac{2.2.2.3.3.3}{2.2.3.3.3.3} = \frac{2}{3}$

Dit is egter iets wat jy moet probeer vermy. Die hele idee is om behendigheid te ontwikkel wanneer jy met eksponensiële uitdrukkings en hul algebra werk. Ons moet altyd vorentoe beweeg!

Wat bedoel ons met 'eenvoudigste eksponensiële vorm'?

Eenvoudigste vorm by eksponente, beteken alle basisse in priemfaktor vorm waar elke priemfaktor slegs een maal voorkom.

Waarom skryf ons uitdrukkings in eenvoudiger vorm?

Eenvoudiger uitdrukkings is 'n manier vir ons om dinge te skryf sodat die struktuur van die dele so eenvoudig moontlik is om te sien.

As ons terug verwys na oefening 10, kan ons dit sien vir eksponensiële uitdrukkings. Watter ekwivalente uitdrukking doen al die volgende:

- Wys die getalstruktuur deur gebruik te maak van priemfaktore?
- Herhaal nie die priemfaktore nie?
- Is in eksponensiële vorm?

Slegs die uitdrukking $2^3 \times 3^4$ voldoen aan hierdie vereistes. Al die ander ontbreek een of meer van die vereistes. Met ander woorde, hulle verberg sommige van die strukture van die uitdrukking.

2154 TechMaths Afr G10 LB.indb 67 2015/11/25 4:13 PM

Uitgewerkte voorbeeld Nog ’n uitdrukkingvereenvoudig

Probleem: Vereenvoudig $\dfrac{24 \times 9^2}{18^4}$

Oplossing:

Stap 1: Druk al die basisse as priemfaktore uit.

$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$ or $2^3 \times 3$ $\qquad 9 = 3^2$

$18 = 2 \times 9 = 2 \times 3^2$

Stap 2: Vereenvoudig

$$\begin{aligned}\frac{24 \times 9^2}{18^4} &= \frac{(2^3 \times 3) \times (3^2)^2}{(2 \times 3^2)^4}\\ &= \frac{2^3 \times 3^5}{2^4 \times 3^8}\\ &= \frac{1}{2 \times 3^3}\\ &= \frac{1}{54}\end{aligned}$$

Jy sal dalk die laaste uitdrukking as $\dfrac{1}{6 \times 3^2}$ wil uitdruk. Wiskundig is daar niks fout daarmee nie, omdat dit ekwivalent is. Dit is net nie eintlik in die eenvoudigste eksponensiële vorm nie, want die basis 6 is nie ’n priemgetal nie.

Onthou jy hierdie manier om priemfaktore te vind?

2	24
2	12
2	6
3	3
	1

Konvensie: Wanneer jy dit in ’n toets of in die eksamen moet doen, moet die eksponente in jou antwoord positief wees. Lees die vraag sorgvuldig deur. Dit behoort vir jou te sê wat van jou verwag word. *As dit nie doen nie, skryf jou eksponente altyd as positiewe getalle*.

Belangrik: Soms, in ’n toets of eksamen, sal jy gevra word om ‘die eenvoudigste vorm’ te gee en nie ‘die eenvoudigste eksponensiële vorm’ van ’n eksponensiële uitdrukking nie. Jy mag selfs net gevra word om te ‘vereenvoudig’. Ons bedoel altyd *eenvoudigste eksponensiële vorm*.

Oefening

12 Vereenvoudig die volgende deur eksponensiële vorms te gebruik. Laat jou finale uitdrukking in eksponensiële vorm met priembasisse en positiewe eksponente. Wees versigtig dat van hulle reeds in hul eenvoudigste eksponensiële vorm is.

(a) 2×2^7 (b) $2^3.2^5$ (c) $2^2 \times 2^3 \times 2^3$

(d) $2^3 \times 3^3$ (e) $2^5 + 2^4$ (f) $2^5 - 2^4$

(g) $\dfrac{2^4}{2^{11}}$ (h) $2 \div 2^8$ (i) $3^{-2}.2.5^{-1}$

(j) $3^{-2}(2.5)^{-1}$ (k) $(13^3 \times 36^{-2})^0$ (l) $(5^5)^5$

(m) $3^3 \div 4^{-3}$ (n) $2^{-7} \times 2^5$ (o) $2^{-7}.2^7$

(p) $36^3.36^0$ (q) $3 + 3^{-1}$ (r) $3^3 - 2^2$

(s) $\dfrac{9 \times 12^5}{4^3 \times 6^4}$ (t) $25^{2.36 - 1.2700}$ (u) $\dfrac{10^8}{20^2.25^3.8}$

(v) $6^5 \times 9^{-3} \times 12^4 \times 16^{-4} \times 18^{-3}$ (w) $\dfrac{4^4 \times 18^3}{9^2 \times 6^7 \times 2^{-1}}$ (x) $\dfrac{45^2.12}{36\,000} \times \dfrac{20^4}{30^4}$

Werk met onbekende eksponente

Advies: Indien jy enige probleem met hierdie vereenvoudigings het, probeer om hulle met getalswaardes vir die eksponente te doen. Probeer dan om te sien hoe om dit te doen met die veranderlike eksponente. Die stappe is basies dieselfde.

Uitgewerkte voorbeeld Vereenvoudig uitdrukkings wat veranderlike eksponente insluit

Probleem: Vereenvoudig $\dfrac{15^{2x}}{5^x \times 10^x \times 3^{2x}}$

Oplossing: Basisse moet, soos tevore, in priem vorm wees, dus begin ons daarmee:

Stap 1: Basisse in priemfaktore

$10 = 2 \times 5$ $15 = 3 \times 5$

Stap 2: Vereenvoudig

$$\begin{aligned}\frac{15^{2x}}{5^x \times 10^x \times 3^{2x}} &= \frac{(3 \times 5)^{2x}}{5^x \times (2 \times 5)^x \times 3^{2x}}\\ &= \frac{3^{2x} \times 5^{2x}}{5^x \times 2^x \times 5^x \times 3^{2x}}\\ &= \frac{3^{2x} \times 5^{2x}}{2^x \times 3^{2x} \times 5^{2x}}\\ &= \frac{1}{2^x}\end{aligned}$$

Let daarop dat ons kan probeer om al die faktore in uitgebreide vorm te skryf. Kan jy sien dat dit 'n morsige affêre sal wees?

$$\frac{15^{2x}}{5^x \times 10^x \times 3^{2x}} = \frac{(3 \times 3 \times 3 \times \dots \text{ na } 2x \text{ faktore}) \times (3 \times 3 \times 3 \times \dots \text{ na } 2x \text{ faktore})}{\text{ens.}}$$

Dit is duidelik waarom ons die 'wette' het wat slegs maar belangrike eienskappe is. Wette som ons begrip van normale vermenigvuldiging en deling op, wat toegepas op word herhaalde vermenigvuldiging. Wanneer die eksponente veranderlikes is, geld die eienskappe nog steeds, solank ons glo dat hulle sal werk!

Let daarop dat ons nie regtig hier kan praat van 'positiewe' eksponente nie. Is x hier positief? Ons weet nie. Ons moet aanvaar dat x enige heelgetal kan wees, insluitend negatiewes. Gewoonlik wanneer ons uitdrukkings soos hierdie een vereenvoudig, probeer ons seker maak dat daar geen negatiewe tekens in die eksponente is nie. In eksamens en toetse word daar dus gewoonlik van jou verwag om die eerste vereenvoudigste vorm te gee, $\dfrac{1}{2^x}$, alhoewel die tweede 2^{-x} heeltemal korrek is en net so eenvoudig!

Uitgewerkte voorbeeld Vereenvoudiging met veranderlike basisse

Probleem: Vereenvoudig $\frac{(ab^4)^5 \times a^3b^2}{(a^2b^3)^5}$

Oplossing: Omdat ons basisse a en b veranderlikes is, kan ons hulle nie in priemfaktore opbreek nie. Die basisse a en b is eintlik die 'kleinste' faktore waarvan ons hier kan praat, dus vereenvoudig ons in terme van hulle soos volg:

$$\begin{aligned}\frac{(ab^4)^5 \times a^3b^2}{(a^2b^3)^5} &= \frac{a^5b^{20} \times a^3b^2}{a^{10}b^{15}}\\ &= \frac{a^8b^{22}}{a^{10}b^{15}}\\ &= \frac{b^7}{a^2}\end{aligned}$$

Ons kan ook die verskillende uitdrukkings uitbrei omdat die eksponente aan ons bekend is:

$$\begin{aligned}\frac{(ab^4)^5 \times a^3b^2}{(a^2b^3)^5} &= \frac{ab^4.ab^4.ab^4.ab^4.ab^4 \times a^3b^2}{a^2b^3.a^2b^3.a^2b^3.a^2b^3.a^2b^3}\\ &= \frac{a^5b^{20} \times a^3b^2}{a^{10}b^{15}}\\ &= \frac{a^8b^{22}}{a^{10}b^{15}}\\ &= \frac{b^7}{a^2}\end{aligned}$$

Oefening Oefen vereenvoudiging van uitdrukkings wat veranderlike basisse en eksponente insluit

13 Vereenvoudig die volgende uitdrukkings tot die eenvoudigste eksponensiële vorm.

(a) $p^2q \times p^4q^5$

(b) $p^3q^{-1} \times p^3q^7$

(c) $\frac{2}{3}a^{-2} - \left(\frac{3}{a^{-2}}\right)^{-1}$

(d) $3^{2n} \times 9^{m-n}$

(e) $(3a^3)^3 + 2(3a^3)^3$

(f) $\frac{(73s^{-13})^0}{2^{-2}(2p)^{-2}}$

(g) $\frac{1}{2}\left(\frac{4^{h+5}}{16.2^{2h}}\right)$

(h) $\frac{3^{5x-1}.81^{2x+1}}{27^{4x+1}}$

(i) $\frac{16^{2y+2} \times 4^{1-y}}{64^{y+2}}$

(j) $\frac{49a^5b^3c}{14(a^2bc)^2}$

(k) $2^a.10^{2a-1}.25^{1-a}4^{3a}.8^{-3a}$

(l) $\frac{3^{z-1} \times 45^{3z-1} \times 25^{2-z}}{15^{z+1} \times 27^{2z}}$

(m) $\frac{ab \times (2b^2)^2 \times 6a^9b^7}{(2b^4)^3 \times 8(a^5b^{-2})^2}$

(n) $\frac{a^{3x+2y+z}.a^{x+3y-z}}{a^{4x+5y}}$

3.5 Eksponensiële vergelykings

Hierdie afdeling handel oor die opstel en oplossing van eksponensiële vergelykings.

Eksponensiële vergelykings kom voor in situasies waar daar herhaalde vermenigvuldiging of deling is. Die aantal kere wat die *herhaalde vermenigvuldiging of deling voorkom, is onbekend* en moet bereken word.

Uitgewerkte voorbeeld

Probleem: Verwys na die fotovermenigvuldiger situasie.
’n Spesifieke fotovermenigvuldiger het ’n bepaalde onbekende aantal dinodes. Elke dinode het ’n verdubbelingseffek op die stroom. Die hele stel dinodes veroorsaak dat die stroom vermeerder teen ’n faktor van 128. Hoeveel dinodes is daar?

Oplossing:
Stap 1: Herskryf die probleem as ’n vergelyking.

Die basis is 2; die vermenigvuldigingseffek op die stroom veroorsaak deur elke dinode.

Laat die aantal dinodes n wees.

Ons kan nou die vergelyking skryf: $2^n = 128$.

Stap 2: Vind die priemfaktore van 128.

As ons 128 kan uitdruk in die basis 2, dan kan ons maklik ’n oplossing vind. Deel 128 ’n paar keer deur 2 en dit wys ons dat $128 = 2^7$.

Step 3: Los die vergelyking op:

$$2^n = 128 = 2^7$$

Die eksponente moet dus dieselfde wees en $n = 7$. Daar is 7 dinodes in die fotovermenigvuldiger.

Uitgewerkte voorbeeld

Probleem: Bakteriese groei

Die totale aantal bakterieë in 'n velwond teen 2 uur, is 35 000. Die aantal bakterieë verdubbel elke 45 minute. Wanneer sal die aantal bakterieë 560 000 wees?

Oplossing:

Stap 1: Laat die aantal 45 minuut periodes n wees.

Die aantal bakterieë later = aantal bakterieë om met $\times 2^n$ te begin.

Stap 2: Los die vergelyking op

$$560\,000 = 35\,000 \times 2^n$$

$$2^n = \frac{560\,000}{35\,000}$$

$$2^n = 8$$

Dan moet n gelyk wees aan 3 omdat $8 = 2^3$.

Stap 3: Interpreteer die oplossing

Dus, $n = 3$, wat beteken dat dit 3×45 minute = 135 minute later gebeur. 135 minute is 2 uur en 15 minute. Dit sal dus teen 4:15 gebeur.

Oefeninge Vergelykings en probleme wat lei tot vergelykings

14 Los die volgende vergelykings op. Wys al jou stappe.

(a) $2^n = 8$

(b) $3.2^x = 24$

(c) $2^{2a} = 8$

(d) $2^{n+1} = 8$

(e) $(2^n)^3 = 8$

(f) $2^n = 8^n$

(g) $2^{2y-3} = 8^{y+2}$

(h) $7^{x^2-9} = 1$

(i) $5^{2n+1} = \frac{1}{125}$

(j) $(b^m)^3 = b^{12}$

(k) $b^m.b^3 = b^{12}$

(l) $(b^{m+3})^3 = b^{12}$

(m) $3^{x^2+5x+6} = 1$

(n) $8\left(\frac{7}{2}\right)^p = 343$

(o) $4^{2x} - 2^{-1} = -0{,}25$

(p) $(3.5^k)^3 + 2(3.5^k)^3 = 405$

(q) $\frac{64^{2x+1}}{16^{x-2}} = 256$

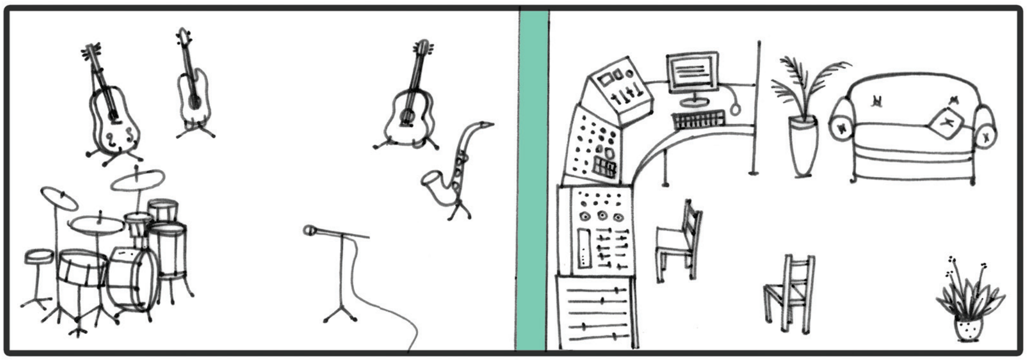
(r) $8.4y = 4.2y$

(s) $8.4y = 8.2y$

(t) $12.3^y = 4.3^{(2y)}$

15 Verwys na die klanktransmissie situasie.

Refilwe is besig om ’n tuis opname-ateljee te bou. Sy beplan om die spaarkamer te verdeel in ’n ateljee waar die musiek gespeel word, en ’n kontrolekamer waar al die opnametoerusting is. Die muur, plafon en vloer moet na behore klankdig gemaak word.



Sy skat dat die maksimum klankintensiteit van die musiek in die ateljee 5×10^{-3} W/m^2 sal wees. Sy wil die klankintensiteit in die kontrolekamer op ’n lae gespreksvlak van 5×10^{-7} W/m^2 hê.

Die panele wat sy gebruik vir die muur gelei 10% van die klank wat hulle binnedring. Hulle absorbeer dus die ander 90%.

Hoeveel lae van die paneelbedekking het sy nodig vir die muur?

16 ’n Kapasitor is vol gelaai. Wanneer dit aan ’n hoë weerstand stroombaan gekoppel word, word gevind dat die lading elke 8 s (sekondes) halveer. Hoe lank sal dit neem vir die kapasitor om te ontlaai:

(a) 50%?

(b) 12,5%?

(c) 3,125%?

(d) minder as 1%?

Indien hierdie model van ontlaaiing korrek is, kan die kapasitor ooit ’n 0 lading hê?

17 Verwys na die bandaandrywing situasie. ’n Enkele bandaandrywer met spoedfaktor 0,2 word gekoppel aan ’n bepaalde aantal bandaandrywers met spoedfaktor 3. Die effektiewe spoedfaktor van die gekombineerde bandaandrywingsstelsel is 48,6.

(a) Hoeveel van die bandaandrywers met spoedfaktor 3 is gebruik?

(b) Maak dit enige verskil aan jou oplossing indien die bandaandrywer met ’n spoedfaktor 0,2, gekoppel word tussen die ander drywers? Verduidelik kortliks (wiskundig, sowel as in terme van die praktiese werklikheid).

18 Kesivan het R3 072 in sy kleinkas. Elke week neem hy die helfte van al die geld uit die kassie. Na ’n spesifieke aantal weke, kom hy agter dat hy slegs R1,50 oor het. Hoeveel keer het Kesivan geld uit die kleinkas geneem?

3.6 Wetenskaplike notasie en beduidende syfers

Wetenskaplike notasie is ’n manier om ’n desimale getal te skryf as ’n faktor groter as –10 en kleiner as 10, vermenigvuldig met ’n mag van 10. Slegs die beduidende syfers word gewys.

Beduidende syfers is die getalle of syfers in ’n desimale getal wat deel van die waarde van die getal vorm. Dit klink dalk vreemd, maar nie alle syfers in ’n desimale getal het noodwendig iets met die getal self te make nie. Sien die volgende voorbeelde van hoe dit gebeur.

Voorbeeld Gewone breuke in wetenskaplike notasie

Een agste $\left(\frac{1}{8}\right)$ is 0,125 in desimale vorm. Een sewende $\left(\frac{1}{7}\right)$ is 0,142 857 herhalend in desimale vorm.

Ons kan hierdie breuke soos volg skryf deur magte van tien te gebruik:

$0{,}125 = (1 \times 10^{-1}) + (2 \times 10^{-2}) + (5 \times 10^{-3})$ presies

$0{,}142\,857 = (1 \times 10^{-1}) + (4 \times 10^{-2}) + (2 \times 10^{-3}) + (8 \times 10^{-4}) + (5 \times 10^{-5}) + (7 \times 10^{-6}) + \ldots$ herhalend

Die 0 voor die komma is slegs ’n plekhouer in desimale notasie. Slegs die 1, 2, en 5 is beduidend in ’n agste, en al die herhalende 1, 4, 2, 8, 5, en 7 in ’n sewende is beduidend.

’n Agste in wetenskaplike notasie:

Die geheel $\frac{1}{8}$ is aanwesig in $(1 \times 10^{-1}) + (2 \times 10^{-1}) + (5 \times 10^{-3})$.

Ons kan 0,125 herskryf sodat dit slegs die beduidende syfers 1, 2, en 5 bevat, en die plekhouer, 0 uitlaat:

$$\begin{aligned} 0{,}125 &= (1 \times 10^{-1}) + (2 \times 10^{-2}) + (5 \times 10^{-3}) \\ &= (1 \times 10^{0}) + (2 \times 10^{-1}) + (5 \times 10^{-2}) \times 10^{-1} \\ &= 1{,}25 \times 10^{-1} \end{aligned}$$

Hierdie laaste vorm van een agste is in wetenskaplike notasie herskryf om al drie beduidende syfers te wys. Ons rond $1{,}25 \times 10^{-1}$ af tot twee of een beduidende syfer:

Twee beduidende syfers: $1{,}3 \times 10^{-1}$

Een beduidende syfer: 1×10^{-1}

Ons merk dat ons afronding van die inligting wat ons nodig het om die volledige waarde van een agste aan te dui, verwyder het.

Een sewende in wetenskaplike notasie:

Ons kan nie die hele van $\frac{1}{7}$ as magte van 10 uitskryf nie. Dit beteken dat ons verplig is om tot 'n gepaste aantal beduidende syfers af te rond

Tien beduidende syfers: $1{,}428\,571\,429 \times 10^{-1}$

Ses beduidende syfers: $1{,}428\,57 \times 10^{-1}$

Drie beduidende syfers: $1{,}43 \times 10^{-1}$

Twee beduidende syfers: $1{,}4 \times 10^{-1}$

Een beduidende syfer: 1×10^{-1}

Ons kan sien dat een agste en een sewende dieselfde is vir een beduidende syfer, maar verskil tot twee of meer beduidende syfers. Een agste is volledig beskryf tot drie beduidende syfers, maar een sewende is nie, en omdat dit herhalend is, kan dit nooit wees nie.

Voorbeeld Verskillende beduidende syfers en afronding

Vier verskillende kapasitors, A, B, C, en D het die volgende kapasitansie in Farad (F) gemeet:

A	0,000 002 3 F	bekend tot twee beduidende syfers
B	0,000 002 30 F	bekend tot drie beduidende syfers
C	0,000 002 34 F	bekend tot drie beduidende syfers
D	0,000 00235 F	bekend tot drie beduidende syfers

Ons kan hierdie kapasitansie skryf as:

A $(2 \times 10^{-6}) + (3 \times 10^{-7})\ F = 2{,}3 \times 10^{-6}\ F$

B $(2 \times 10^{-6}) + (3 \times 10^{-7}) + (0 \times 10^{-8}) = 2{,}30 \times 10^{-6}\ F$

C $(2 \times 10^{-6}) + (3 \times 10^{-7}) + (4 \times 10^{-8}) = 2{,}34 \times 10^{-6}\ F$

D $(2 \times 10^{-6}) + (3 \times 10^{-7}) + (5 \times 10^{-8}) = 2{,}35 \times 10^{-6}\ F$

Die kapasitansie van A en B is nie dieselfde nie. Die 0 aan die einde van die kapasitansie van B is beduidend. Ons weet nie of kapasitor A 'n derde beduidende syfer het nie. As dit wel een het, is daar tien moontlikhede:

- As die tweede beduidende getal 3 is, dan moet die derde een 0, 1, 2, 3, of 4 wees.
- As die tweede beduidende getal 2 is, dan moet die derde een 5, 6, 7, 8, of 9 wees.

Indien ons die kapasitansie van B, C, en D afrond tot twee beduidende syfers, dan het A, B, en C dieselfde kapasitansie, maar D het 'n ander kapasitansie.

Let daarop dat wanneer ons afrond, ons beduidende syfers verloor. Om te sê dat A, B, en C dieselfde kapasitansie vir twee beduidende syfers het, beteken nie dat hulle dieselfde kapasitansie het nie!

Uitgewerkte voorbeeld Spoed van lig in vergelyking met spoed van klank

Probleem: Die spoed van lig in ’n vakuum, bv. in die ruimte, is 2 997 925 km/s.

Die spoed van klank onder standaard toestande is 331,3 m/s.

Oplossing: In wetenskaplike notasie:

$2\ 997\ 925$ km/s = $2{,}997\ 925 \times 10^6$ km/s = $2{,}997\ 925 \times 10^8$ m/s en

$331{,}3$ m/s = $3{,}313 \times 10^2$ m/s

Indien ons die spoed van lig tot dieselfde aantal beduidende syfers afrond as dieselfde aantal beduidende syfers van klank, kan ons die waardes sinvol vergelyk. Na twee beduidende syfers:

Spoed van lig: $3{,}0 \times 10^8$ m/s

Spoed van klank: $3{,}3\times 10^2$ m/s

Ons kan sien dat die spoed van lig net-net minder as 10^6 of ’n miljoen keer die spoed van klank is.

Waarom gebruik ons wetenskaplike notasie?

Ons het reeds een rede gesien:

- Om ’n getal uit te druk deur slegs die beduidende syfers te gebruik, of af te rond tot ’n spesifieke aantal beduidende syfers.

Nog ’n rede het te make met syfers wat óf baie klein, óf baie groot is in die eenhede wat ons meet of uitdruk.

- Baie groot syfers, kom ons sê groter as 10 000, of baie klein syfers, sê maar kleiner as 0,000 01, is baie makliker om neer te skryf en te begryp wanneer ons hulle in wetenskaplike notasie skryf. Sien die oefeninge hieronder vir voorbeelde.
- Dit word makliker om verskillende waardes te vergelyk indien ons hulle almal in terme van dieselfde mag 10 skryf. Sien die voorbeeld van die spoed van lig/spoed van klank soos hierbo aangegee en van die oefeninge hieronder vir voorbeelde hiervan.

Oefening

19 In elke geval, skryf die syfer in wetenskaplike notasie en gee ook die aantal beduidende syfers:

(a) 8 000

(b) 8

(c) 0,008

(d) 100 000

(e) 365,25

(f) 0,000 023 4

(g) 450 628,9

(h) 0,000 000 000 000 096 00

2154 TechMaths Afr G10 LB.indb 76 2015/11/25 4:13 PM

(i) massa van 'n proton: 0,000 000 000 000 000 000 000 000 001 673 kg

(j) 'n ligjaar: 2 997 925 km/s × 365 × 24 × 60 × 60 s/jaar

(k) radius van die kern van 'n goud atoom: 0,000 000 000 000 007 3 m

(l) radius van 'n goud atoom: 0,000 000 000 13 m

(m) Hoeveel keer meer is die radius van 'n goud atoom as dit vergelyk word met die radius van sy kern? Moenie enige bererekeninge maak nie; skat eerder die antwoord tot die naaste mag van tien uit die antwoord wat jy in (k) en (l) gegee het.

(n) digtheid van die kern van die goud atoom: 200 000 000 000 000 000 kg/m^3

(o) digtheid van goud: 19 320 kg/m^3

(p) Hoeveel keer kleiner is die digtheid van goud in vergelyking met digtheid van die kern van 'n goud atoom? Skat dit op dieselfde manier as in (m).

Vereenvoudiging van uitdrukkings wat wetenskaplike notasie insluit

Uitgewerkte voorbeeld

Probleem: Vereenvoudig $\frac{(1{,}2 \times 10^3) \times (2{,}1 \times 10^{-2})}{(4 \times 10^2)}$

Oplossing: Hierdie een kan soos volg gedoen word sonder hulp van 'n sakrekenaar:

$$\begin{aligned}\frac{(1{,}2 \times 10^3) \times (2{,}1 \times 10^{-2})}{(4 \times 10^2)} &= \frac{1{,}2 \times 2{,}1 \times 10}{4 \times 10^2} \\ &= \frac{0{,}3 \times 2{,}1}{10} \\ &= 0{,}63 \times 10^{-1} \\ &= 6{,}3 \times 10^{-2}\end{aligned}$$

Die antwoord hier behoort afgerond te word tot 6×10^{-2}. Die rede hiervoor is dat 4×10^2 bekend is slegs tot 1 beduidende syfer. Ons finale antwoord behoort dit te reflekteer. Ons kan nie die waarde van die tweede beduidende syfer aanvaar sonder verdere inligting nie. Afronding tot 6×10^{-2} is om baie eerlik te wees oor hoeveel jy omtrent die uitdrukking $\frac{(1{,}2 \times 10^3) \times (2{,}1 \times 10^{-2})}{(4 \times 10^2)}$.

Oefening

20 Doen die volgende berekeninge sonder jou sakrekenaar. Gee jou finale antwoord tot die minste aantal beduidende syfers van elk van die getalle.

(a) $(4,2 \times 10^{3}) \times (6,0 \times 10^{5})$

(b) $(-4,2 \times 10^{3}) \div (-6,0 \times 10^{5})$

(c) $(8,1 \times 10^{-4}) \times (1,2 \times 10^{5})$

(d) $(8,1 \times 10^{-4}) \div (1,2 \times 10^{5})$

(e) $\dfrac{(1,25 \times 10^{3}) \times (1,6 \times 10^{-4})}{(-4,0 \times 10^{-2})}$

(f) $(5,35 \times 10^{3}) + (6,5 \times 10^{2})$

(g) $(3,6 \times 10^{-3}) - (6,0 \times 10^{-4})$

(h) $\dfrac{(1,25 \times 10^{9}) + (5,0 \times 10^{8})}{(1,4 \times 10^{6})}$

Wetenskaplike notasie op jou sakrekenaar

Daar is twee maniere waarop jy getalle in wetenskaplike notasie op jou sakrekenaar kan insleutel. Die lang en vanselfsprekende manier, is om die hele uitdrukking in te sleutel. Omdat wetenskaplike notasie egter so belangrik is, sal jou sakrekenaar 'n sleutel daarvoor hê. Verwys na jou sakrekenaar se handleiding en vra jou onderwyser om jou te help om jou sakrekenaar op te stel.

Oefening

21 Doen nou oefening 20 oor met behulp van jou sakrekenaar.

Opsioneel: presisie en akkuraatheid

Ons gebruik die woord **presisie** om die aantal beduidende syfers in 'n waarde te beskryf. Hoe meer beduidend die syfers is, hoe groter die presisie.

Die woord **akkuraatheid** word gebruik om te beskryf hoe naby die waarde aan die korrekte waarde is. Baie akkurate waardes is nie noodwendig presiese waardes nie.

3.7 Kilo-, nano-, mega-, mikro-, en meer

Uitgewerkte voorbeeld

Probleem: Verwys na die kapasitor A in die situasie wat in die vorige afdeling genoem is.

Oplossing: Ons het vroeër gewys dat die kapasitansie 0,000 002 3 F in wetenskaplike notasie as $2,3 \times 10^{-6}$ F geskryf kan word. Die magsfaktor is $10^{-6} = \frac{1}{1000000}$, of 'n miljoenste. Ons kapasitor het dus 'n kapasitansie van 2,3 miljoenste van 'n Farad.

Die **voorvoegsel 'µ'** word 'mikro-' genoem, en dui daarop dat ons met miljoenstes van ' Farad werk, so µ staan vir '$\times 10^{-6}$'.

Baie kapasitors het soortgelyke klein kapasitansie. In plaas daarvan om die magsfaktor 10^{-6} elke keer te skryf, kort ons dit af en skryf dit as 2,3 µF.

Voorvoegsels vir magte van 10

Ander snelskrif voorvoegsels vir die mag-deel van wetenskaplike notasie, is:

10^{-12}	10^{-9}	10^{-6}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	10^{-0}	10^{1}	10^{2}	10^{3}	10^{6}	10^{9}	10^{12}
pico	nano	mikro	milli	senti	desi	–	deka	hekto	kilo	mega	giga	terra
p	n	µ	m	c	d		da	h	k	M	G	T

Let daarop dat **mikrometers** dikwels ook **mikrons** genoem word en 10^{-10} m word 'n **ångström** (Å) genoem. 'n Ångström is 'n tiende van 'n nanometer.

Voorbeelde

- Die SVE verwerkingstempo op 'n rekenaar is 3,2 GHz = 3 200 000 000 Hz.
- 'n Bakterium is tipies ongeveer 1 µm = 0,001 mm in lengte.
- 'n Standaard liniaal 3 dm = 30 cm lank.
- 'n Suid-Afrikaanse huishouding benodig tussen 3 en 5 kW = 3 000 tot 5 000 W elektriese krag teen spitsverbruik.

2154 TechMaths Afr G10 LB.indb 79 2015/11/25 4:13 PM

Oefening

22 Skryf elk van die volgende getalle op die manier soos versoek. Alle getalle moet, waar moontlik, in wetenskaplike notasie geskryf word.

(a) 3,80 MW in kW
(b) 3,80 MW in W
(c) 3,80 MW in GW
(d) 5,7 mA in µA
(e) 5,7 mA in nA
(f) 18 nm in µm
(g) 18 nm in mm
(h) 18 nm in m
(i) 18 nm in km
(j) 18 nm in Å
(k) 175 cg in mg
(l) 175 cg in dg
(m) 175 cg in dag
(n) 175 cg in HG

3.8 Omskakeling tussen eenhede

Uitgewerkte voorbeeld

Probleem: Hoeveel vierkante millimeter is daar in 'n vierkant sentimeter?

Oplossing: Laat die groot blou vierkant 'n *vergroting* van 'n vierkant wees met sy-lengtes van 1 cm.

Ons weet daar is 10 mm in elke cm.

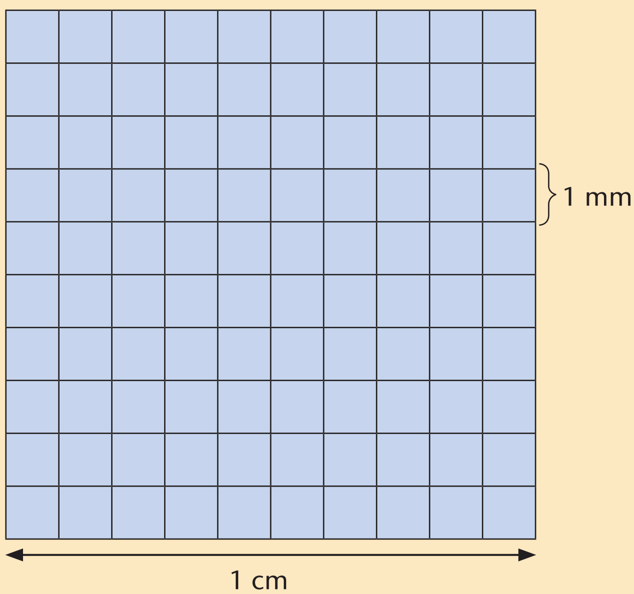
Die oppervlakte van die groot vierkant is 1 cm^2.

Een van die klein vierkante is 1 mm^2.

Hoeveel klein vierkante is daar?

Daar is 10 rye van 10, d.i. $10 \times 10 = 10^2$ van hulle.

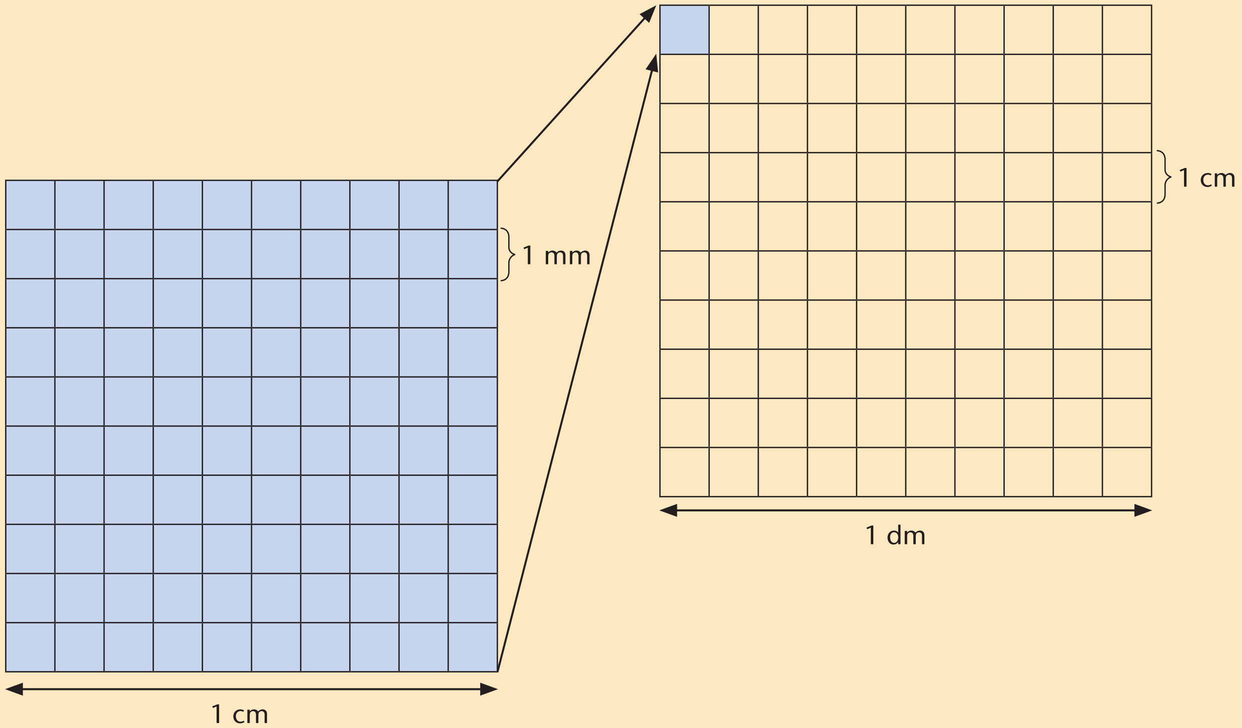
Dus, 10^2 mm^2 is dieselfde oppervlakte as 1 cm^2.



2154 TechMaths Afr G10 LB.indb 80 2015/11/25 4:13 PM

Uitgewerkte voorbeeld

Probleem: Hoeveel vierkante millimeter is daar in 'n vierkante desimeter?



Oplossing: In die diagram hierbo het die pienk vierkant sye met 'n lengte van 1 dm. Die blou vierkant is soos in die vorige voorbeeld.

Daar is $10^2/100$ een millimeter vierkante in elke 1 cm^2 vierkant.

Omdat 1 dm = 10 cm, is daar 10^2 cm^2 in 1 dm^2.

Daar moet dus $10^2 \times 10^2$ of 10^4 vierkant mm in 'n vierkant dm wees.

Wat leer ons hieruit?

Ons weet dat 1 dm = 10 cm = 10^2 mm.

Dus, $(1\text{ dm})^2 = (10\text{ cm})^2$, wat beteken dat $1\text{ dm}^2 = 10^2\text{ cm}^2$.

Soortgelyk, $(1\text{ dm})^2 = (100\text{ mm})^2$, wat beteken dat $1\text{ dm}^3 = 100^2\text{ mm}^2$ of 10^4 mm^2.

Die aantal mm^2 in 1 m^2: $(1\text{ m})^2 = (10^3\text{ mm})^2$, wat beteken dat $1\text{ m}^2 = 10^6\text{ mm}^2$.

Uitgewerkte voorbeeld

Probleem: Druk 38,5 cm^2 uit in m^2.

Oplossing:

Stap 1a: Identifiseer die omskakelingsfaktor en druk uit in terme van m:
10^2 cm = 1 m wat beteken 1 cm = 10^{-2} m.

Stap 1b: Druk cm^2 uit in terme van m^2:
1 $cm^2 = (10^{-2})^2$ $m^2 = 10^{-4}$ m^2

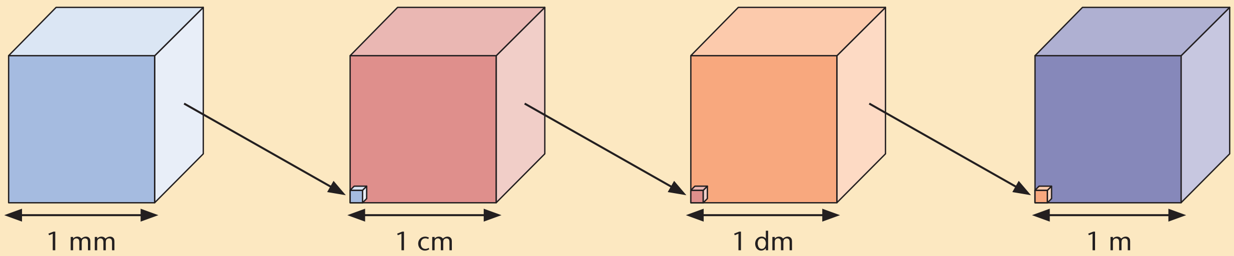
Stap 2: Nou kan ons die vraag beantwoord:

$$38{,}5 \text{ cm}^2 = 38{,}5 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$
$$= 3{,}85 \times 10 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$
$$= 3{,}85 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

In hierdie voorbeeld gaan ons omskakel van cm^2 na m^2, d.i. vanaf 'n kleiner eenheid na 'n groter een. Dit beteken daar moet 'n kleiner waarde vir die oppervlakte in m^2 wees as wat daar in cm^2 is.

Uitgewerkte voorbeeld

Probleem: Hoeveel kubieke millimeter in 'n kubieke meter?



Elke blok is twee keer getrek, bv. die 1 mm^3 blok op links, word by die onderste linkerhoek van die 1 cm^3 blok in miniatuur vorm gewys. Hierdie patroon word herhaal regdeur tot die 1 mm^3 blok. Probeer jouself indink presies hoe klein die 1 mm^3 blok in die 1 m^3 blok is.

Oplossing: Ons kan soos voorheen werk:

Die 1 m^3 vierkant het 10 lae van 1 dm^3 blokkies, elke laag het 10^2 van hulle.

Daar is dus 10^3 een dm^3 blokkies in 'n 1 m^3 blok,

10^3 een cm^3 blokkies in 'n 1 dm^3 blok,

en 10^3 een mm^3 blokkies in 'n 1 cm^3 blok.

Wat kan ons hieruit leer?

Omdat ons weet dat 1 m = 10 dm = 10^2 cm = 10^3 mm, kan ons sê dat

$(1 \text{ m})^3 = (10 \text{ dm})^3 = (10^2 \text{ cm})^3 = (10^3 \text{ mm})^3$, of dat

$1 \text{ m}^3 = 10^3 \text{ dm}^3 = 10^6 \text{ cm}^3 = 10^9 \text{ mm}^3$.

Let op dat een blokkie desimeter amper presies dieselfde is as een **liter**.

2154 TechMaths Afr G10 LB.indb 82 2015/11/25 4:13 PM

Uitgewerkte voorbeeld

Probleem: Druk die digtheid van goud uit, 19,32 g/cm^3 in kg/m^3.

Oplossing:

Stap 1: Vind die omskakelingsfaktor:

$1\text{ cm} = 10^{-2}\text{ m}$, so $1\text{ cm}^3 = (10^{-2})^3\text{ m}^3 = 10^{-6}\text{ m}^3$

$1\text{ g} = 10^{-3}\text{ kg}$

Stap 2: Skakel om

$$19{,}32\text{ g/cm}^3 = 19{,}32 \times \frac{1\text{ g}}{1\text{ cm}^3}$$
$$= (1{,}932 \times 10) \times \frac{(10^{-3}\text{kg})}{(10^{-6}\text{m}^3)}$$
$$= 1{,}932 \times 10^4\text{ kg/m}^3$$

Oefening

23 Skakel die volgende getalle om na die verlangde waardes.

(a) Hoeveel vierkante mm is daar in 2 cm^2?

(b) Hoeveel vierkante cm is daar in 3 dm^2?

(c) Hoeveel vierkante mm is daar in 5 m^2?

(d) Druk 98,23 cm uit in m^2.

(e) Druk 45,88 mm uit in m^2.

(f) ’n Student berei 250 mg per 50 ml medisyne A voor. Druk dit uit in g/ℓ.

(g) As daar 3 pasiënte elk 125 mg/50 ml van medisyne A benodig, hoeveel medisyne moet die student berei? Druk jou antwoord uit in mg/mℓ en in g/ℓ.

(h) Wat is 65,56 g/cm^3 uitgedruk as kg/m^3?

(i) ’n Konstruksiemaatskappy moet 20 000 000 g/m^3 grond in ’n halfdag verwyder. Hoe kan jy dit in kg/m^3 uitdruk?

(j) Hoeveel grond sal die konstruksiemaatskappy in (i) hierbo, in twee dae verwyder?

3.9 Opsomming

- Graad 10 Eksponente handel eintlik alles oor **herhaalde vermenigvuldiging** en telfaktore.
- Jy het geleer dat die **mag** x^n 'n kort manier is om $x \times x \times ... \times x$ n keer te skryf. Ons noem x die **basis** en n die **eksponent**. Ons lees x^n as 'x eksponent n' of 'x tot die mag n'. Jy het ook geleer dat x^{-n} snelskrif is vir $\frac{1}{x^n}$ en dat $x^0 = 1$ tensy x nul is, wat onbepaalbaar is. x mag zero wees solank as wat n positief is.
- 'n Vinnige hersiening van die vier **eienskappe van eksponente** – dikwels wette genoem – vorm die basis van die **algebra van eksponente**. Dit is maar net maniere om herhaalde vermenigvuldiging te skryf. Die vier baie belangrike eienskappe is:
  - $x^m x^n = x^{m+n}$
  - $\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$
  - $(x^m)^n = x^{mn}$
  - $x^n y^n = (xy)^n$
- **Vereenvoudiging van uitdrukkings** vereis die uitdrukking van al die basisse in hul kleinste heelgetalfaktore, wat ons priemfaktore noem. Herskryf die basisse deur gebruik te maak van priemfaktore, daarna mag die uitdrukking vereenvoudig word deur die eienskappe van eksponente te gebruik.
- Eksponensiële **vergelykings** het onbekende eksponente. Om vir die onbekende eksponent op te los, is dit nodig om alle basisse in priemfaktore te herskryf. Situasies wat herhaalde vermenigvuldiging 'n onbekende aantal kere behels, kan tot eksponensiële vergelykings lei.
- **Wetenskaplike notasie** is 'n manier om 'n desimale getal as 'n faktor tussen –10 en 10 te skryf. **Beduidende syfers** is die syfers in 'n desimale getal wat deel uitmaak van die waarde van die getal, en alle plek-houdende nulle uitsluit. Hulle is die enigste syfers wat in wetenskaplike notasie gewys word.
- Laastens, jy het met kilo-, nano-, mega, en mikro- gewerk, en omskakeling tussen eenhede gedoen, waar jou kennis van eksponente en wetenskaplike notasie jou gehelp het in omrekeninge en uitdrukkings in die verlangde eenhede en op 'n leesbare manier. Hierdie sluit in om bevoeg te wees in die omskakeling tussen twee vierkante eenhede en om te kan omskakel tussen twee kubieke eenhede.

3.10 Konsolideringsoefeninge

1 Herskryf die volgende in eksponensiële vorm:

(a) $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$ (b) $4.5.5.3.3.3$

(c) $-2 \times -2 \times -2 \times -2$ (d) $7.7.x.x.x.y.y$

2 Sonder om van jou sakrekenaar gebruik te maak, bereken die waarde van die volgende:

(a) 2^5 (b) $(-3)^3$ (c) 5.2^3

(d) -1^0 (e) $4 \times 2^{-2} + 3^2.5$ (f) $(-7)^0$

3 Vind die waardes van die volgende:

(a) 12^0 (b) 0^{12} (c) $(-12)^0$

(d) 0^{-12} (e) 12^{12} (f) 0^0

4 Vereenvoudig die volgende:

(a) $3^2.3^3$ (b) $8^5.8^{-3}.8^2$ (c) $5^{12} \div 5^9$ (d) $7^5.7^6 \div 7^0$

(e) $(15 - 8)^4$ (f) $\dfrac{8 \times 3^{10}}{2 \times 3^4}$ (g) $\dfrac{4^5}{2^4}$ (h) $5 \times 3^{-3} \times 2 \times 3^2$

(i) $5^{-2} \div 5^9$ (j) $\dfrac{7.2^5}{21.2^{12}}$

5 Vereenvoudig die volgende uitdrukkings:

(a) $5^2 \times 5^7$ (b) $8^0 \times 8^8$ (c) $x^5 \times x^4$ (d) $6^{p+1} \times 6^{3p+3}$

(e) $4^6 \div 4^3$ (f) $7^5 \div 7^4$ (g) $y^8 \div y^6$ (h) $2^{3p+3} \div 2^{p-2}$

(i) $(2^3)^4$ (j) $(x^{-3})^{-5}$ (k) $(3^2)^{x-3}$ (l) $(7^{-2})^3$

(m) $5^7 \times 3^4$ (n) $8^1 \times 2^5$ (o) $x^5\, y^2$ (p) $6^2 \times 5^2$

6 Vereenvoudig waar moontlik:

(a) x^3x^2 (b) y^7x^2 (c) $x^6.2x$

(d) 2^x3^y (e) $2xy(5y^3 + x^4y)$ (f) $2d^2e^5.6d^{-5}e^0$

(g) $a^2b^5c^9 \div a^2b^3c^6$ (h) $\dfrac{m^6n^{-3} \times mn \times m^5n^{-2}}{m^{12}n^6}$ (i) $\dfrac{32de^5.d^3e}{4d^{-5}e^6}$

(j) $\dfrac{m^2.n^{-3}}{m^5.n^7}$ (k) $5^{3x} \div 25x$ (l) $6^x \div 6y$

(m) $13^{2x-1} \div 169\,x + 6$ (n) $\dfrac{7^{2a+3b}.11^{-5a+4b}}{7^{a+b}.11^{8a-3b}}$

7 Vereenvoudig die volgende:

(a) $(5^2)^4$

(b) $(6^{-2})^{-3}$

(c) $(7^0)^3$

(d) $[(-5)^3]^5$

(e) $(x^2)^3$

(f) $(3^{x-3})^2$

(g) $\left(\frac{5}{7}\right)^2$

(h) $3^{-2}(3^3 + 3^2)$

(i) $5^5 \div 5^2 \times 5^9$

(j) $\left(\frac{-2a^3b^2}{8a^5b^2}\right)^2$

8 'n Baba weeg 3,52 kg by geboorte en sy gewig vermeerder teen 'n gemiddeld van 11% per maand. Wat sal die baba na een jaar weeg?

9 'n Sekere radioaktiewe isotoop breek die helfte van homself in ander elemente op elke dag. Aanvanklik is daar 20 gram van die isotoop. Hoeveel van die isotoop sal na 9 dae oorbly?

10 Daar is 25 rotte in 'n rioolstelsel van 'n stad.

(a) Indien die aantal rotte elke 45 dae verdubbel, hoe lank sal dit neem voordat die rotbevolking 6 400 is?

(b) Indien 'n rotuitroeier elke dag 200 rotte uitroei, hoe lank sal dit hom neem om al die rotte uit te roei? Jy kan aanvaar dat geen rotte gedurende die uitwissingstyd gebore word nie.

(c) Watter van (a) en (b) is eksponensiële verandering?

11 Vereenvoudig en los jou antwoord in wetenskaplike notasie:

(a) $4{,}243\,5 \times 10^5 \times 1\,000$

(b) 10% van $3{,}689 \times 10^7$

(c) $3.41 \times 10^{21} \times 16\,000$

(d) $(3 \times 10^8)(2 \times 10^5)$

(e) $\frac{9{,}324 \times 10^7}{7{,}733 \times 10^4}$

(f) $5.17 \times 10^{-3} + 3{,}78 \times 10^{-2}$

12 'n Neutron weeg 0,000 000 000 000 000 000 000 000 001 675 kg.

(a) Skryf die massa van die neutron in wetenskaplike notasie.

(b) Hoeveel sal 1 000 neutrone weeg?

(c) Hoeveel sal 1 000 000 neutrone weeg?

(d) Hoeveel neutrone sal 1 g weeg?

2154 TechMaths Afr G10 LB.indb 86 2015/11/25 4:13 PM

13 Die omtrek van die aarde om die Ewenaar is 40 075,16 km.

(a) Hoe vêr reis jy indien jy 17 keer rondom die aarde op hierdie pad is? Druk jou antwoord in wetenskaplike notasie uit, korrek tot vier beduidende syfers.

(b) Druk die omtrek uit in meter, in sentimeter, en in millimeter; gee jou waardes in wetenskaplike notasie tot 3 beduidende syfers.

14 Skryf elk van die volgende getalle op die wyse verlang. Gee jou antwoord in wetenskaplike notasie en noem die aantal beduidende syfers.

(a) 8,65 MW in kW
(b) 4,65 MW in W
(c) 4,3 mA in pA
(d) 55 nm in dm
(e) 556 cg in g
(f) 128 µm in mm
(g) 52 kg in TG
(h) 88 GHz in MHz
(i) 3 679 mg in g
(j) 658 ℓ in kℓ

15 Skakel die volgende getalle om in die verlangde eenhede.

(a) Skakel 10 000 hektometer om in meters.

(b) ’n Tenk kan 30 000 ℓ hou. Hoeveel kℓ sal die tenk hou indien dit slegs halfvol is?

(d) Vir elke 40 mg van medisyne A moet die verpleegster 250 mℓ water byvoeg. Druk dit uit in g/ℓ.

16 Lindiwe versier ’n spieël met gekleurde teëls van 1 cm^2 elk. Die spieël is 10 cm in lengte en 5 cm in breedte.

(a) Hoeveel gekleurde teëls sal sy nodig hê om die spieël mee te bedek?

(b) Hoeveel cm^2 is die spieël?

17 ’n Konstruksiemaatskappy verwyder grond vanaf ’n bouperseel. Elke 2 500 kg grond beslaan ’n volume van 1 m^3.

(a) ’n Groot storttrok kan 40 ton grond op ’n slag vervoer. Hoeveel ritte met die trok is nodig om 1 000 m^3 van die grond van die perseel af te verwyder?

(b) Druk die massa per volume, die digtheid, van grond uit as g/cm^2.

(c) As ’n graaf-vol van die grond ’n volume van 4 liter het, hoeveel grawe vol grond moet verwyder word?

OPSIONEEL Twee effens meer realistiese werklike lewensprobleme

18 Argeoloë sal dikwels datums aan organiese voorwerpe koppel, bv. voorwerpe wat van lewende dinge af kom deur gebruik te maak van koolstof-14 (C-14)-tegnieke vir die datering daarvan. Koolstof-14 is 'n radioaktiewe vorm van koolstof. Dit is altyd teenwoordig in rofweg dieselfde konsentrasie in lewende dinge. Wanneer die organisme doodgaan, verminder die hoeveelheid C-14 geleidelik (soos die C-14 deur 'n kernreaksie afbreek). Dit neem amper 5 700 jaar vir die hoeveelheid C-14 om te halveer.

'n Argeoloog het sopas die oorblyfsels van 'n boot wat van eikehout gemaak is, opgegrawe. 'n Tegnikus in 'n kernlaboratorium analiseer 'n klein hoeveelheid van die hout en bevind dat slegs een agste van die hoeveelheid C-14 in hout van 'n lewende akkerboom, teenwoordig is.

(a) Hoe lank gelede is die boom wat vir die boot gebruik is, afgesaag?

(b) Hoe lank gelede is die boot vervaardig? Is hierdie vraag dieselfde as in (a)?

(c) Dieselfde dag toets die tegnikus nog 'n ander stuk hout (van 'n ander artefak) en vind dat dit rofweg 60% van die oorspronklike hoeveelheid C-14 bevat. Wat kan jy sê omtrent die ouderdom van die artefak?

(d) Die volgende dag arriveer 'n monster van 'n kledingstuk uit 'n ander opgrawing in die tegnikus se laboratorium. Sy bevind dat dit een derde van die oorspronklike hoeveelheid C-14 bevat. Wat kan sy sê oor die ouderdom van die kledingstuk?

19 In inligtingstegnologie is dit somtyds nodig om 'n rekenaar te programmeer om 'n oplossing vir 'n probleem te vind deur elke moontlike oplossing te ondersoek.

Indien die oplossing 'n heelgetal tussen 0 en 9 is (insluitend 0 en 9), dan moet die rekenaar tien getalle kontroleer. Indien die oplossing tussen 0 en 99 (insluitend weereens), dan moet die rekenaar 100 getalle nagaan, tien keer soveel oplossings.

Veronderstel dit neem 10^{-9} s vir die rekenaar om een syfer na te gaan.

In 'n spesifieke probleem, moet die rekenaar vir 'n n-syfer kontroleer vir 'n oplossing. Dit neem die rekenaar 10^{-4} s om dit te doen. Stel die waarde van n vas.

4 Algebraïese Uitdrukkings

Hierdie hoofstuk fokus op die algebra van veelterm uitdrukkings en kwosiënte van veelterm uitdrukkings, ook bekend as algebraïese breuke.

Hierdie hoofstuk sal die volgende insluit:

- voorstelling van versamelings, intervalnotasie, versamelingskeurdernotasie, getallelyne
- manipulasie van algebraïese uitdrukkings deur optel en aftrek van algebraïese terme; vermenigvuldiging van ’n tweeterm met ’n tweeterm; vermenigvuldiging van ’n tweeterm met ’n drieterm
- bepaling van die grootste gemene deler (GGD) en die kleinste gemene veelvoud (KGV) van algebraïese uitdrukkings deur faktorisering
- faktorisering deur gemeenskaplike faktore te gebruik
- faktorisering deur groepering in pare te gebruik
- faktorisering van kwadratiese uitdrukkings
- faktorisering van uitdrukkings wat die verskil tussen twee kwadrate behels
- faktorisering van uitdrukkings wat die verskil tussen, en die som van, twee derdemagte behels
- die gebruik van die kleinste gemene veelvoud wanneer ons met algebraïese breuke werk
- optel en aftrek van algebraïese breuke
- vermenigvuldiging en deling van algebraïese breuke

2154 TechMaths Afr G10 LB.indb 89 2015/11/25 4:13 PM

4.1 Hersiening: Notasie vir voorstelling van versamelings

Wiskundige notasie is ’n skryfstelsel wat gebruik word vir die optekening van begrippe in wiskunde. Die notasie gebruik simbole of simboliese uitdrukkings, wat bedoel is om ’n bepaalde betekenis te hê.

Voorbeelde

Weerstandstoleransie: ’n Pak resistors het ’n weerstand van 150 Ω met ’n toleransie van 10%. Dit beteken dat die werklike waarde van die weerstand van enige een van die resistors sekerlik sal lê tussen 150 – 15 Ω = 135 Ω en 150 + 15 Ω = 165 Ω.

Enjin-wringkrag: ’n Enjin verskaf ’n maksimim wringkrag van 2 000 lb-vt. by 7 000 rpm. Dit beteken dat die wringkrag enige waarde in die interval 0 lb-vt. tot 2 000 lb-vt kan hê.

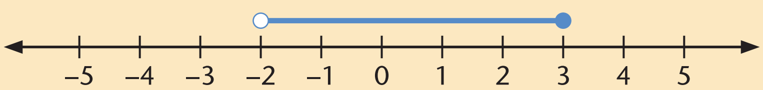
Uitsettingskoëffisiënt: Staal spoorstawe sit uit en krimp in namate die temperatuur styg of daal. ’n Bepaalde spoor het ’n lengte van 120 m by 20 °C. Die lengte neem toe met 0,001% vir elke graad Celsius verandering in temperatuur. As die verwagte temperatuurfluktuasie 10–35 °C is, sal die lengte van die spoor wissel tussen
120 – 0,0012 m = 119,99 m en 120 + 0,018 m = 120,018 m.

Uitgewerkte voorbeelde

Werk deur die volgende voorbeelde om jou geheue te verfris:

Probleem: Jy word gevra word om die volgende voor te stel:

A. **Oplossing:** Op ’n getallelyn



B. **Oplossing:** In intervalnotasie $x \in (-2; 3]$

C. **Oplossing:** In versamelingskeurdernotasie $\{x \mid -2 < x \leq 3\}$

In herdie geval is ons voorbeeld ’n ongelykheid.

Oop interval: Dit is wanneer ’n getal nie ingesluit is nie, soos in < of >; dan gebruik ons die oop kol op die getallelyn.

Geslote interval: Dit is wanneer die getal ingesluit is, soos in < of >; dan gebruik ons die geslote kol op die getallelyn.

Oop interval: Wanneer ’n getal nie ingesluit is nie, soos in < of >, dan gebruik ons (of).

Geslote interval: Dit is wanneer die getal ingesluit is, soos in of , dan gebruik ons [of].

Dit word gelees as ‘die versameling van x-waardes sodanig dat x groter as –2 is, maar kleiner of gelyk aan 3 is.’

In hierdie geval is x die veranderlike en die vertikale lyn | verwys na ‘sodanig dat’.

Oefeninge

1 Stel $3 \le x < 4$ voor

(a) op 'n getallelyn

(b) in intervalnotasie

(c) in versamelingskeurdernotasie.

2 Stel $-7 < x \le 2$ voor

(a) op 'n getallelyn

(b) in intervalnotasie

(c) in versamelingskeurdernotasie.

3 Stel $x < -9$ of $x > -1$ voor

(a) op 'n getallelyn

(b) in intervalnotasie

(c) in versamelingskeurdernotasie.

4 Stel elk van die volgende voor

- op 'n getallelyn
- in intervalnotasie
- in versamelingskeurdernotasie.

(a) $-5 \le x < 1$ (b) $-2 < x$ of $x \le 3$ (c) $t = 10$

(d) $s > 6$ (e) $m \ne 2$

5 Stel die volgende voor

- op 'n getallelyn, en dan
- in intervalnotasie:

(a) $\{t \mid -7 < t \le 5\}$ (b) $\{m \mid m \le 2 \text{ of } m > 13\}$

6 Stel die volgende voor

- op 'n getallelyn, en dan
- in versamelingskeurdernotasie:

(a) $k \in (-\infty; 3]$ (b) $k \in (-\infty; 3] \cup (7; \infty)$

4.2 Gebruik algebraïese uitdrukkings

Hierdie afdeling gaan oor hoe nuttig algebraïese uitdrukkings kan wees. Ons gaan begin met ’n situasie wat voortbou op die hersiening van ekwivalente uitdrukkings wat jy in Hoofstuk 1 gedoen het.

Oefening

7 Gumani is ’n bedrewe houtwerker. Hy maak hoë kwaliteit items uit inheemse hout en voorsien verskeie winkels en markte daarvan. Sy mees suksesvolle items is juwelekissies vervaardig uit wilde olyfhout. Hy maak en verkoop hulle al ’n jaar lank, maar is nog nie seker watter verkoopprys vir hom die beste profyt sal besorg nie. As hy te min daarvoor vra, sal die kissies baie goed verkoop, maar sy profyt sal laag wees. As hy te veel vra, sal hy slegs ’n klein hoeveelheid verkoop en hy sal nie veel profyt maak nie.

Die volgende tabel wys die verskillende verkooppryse wat hy probeer het en die ooreenstemmende aantal juwelekissies wat hy verkoop het:

Verkoopprys in rand	Aantal juwelekissies verkoop
400	120
450	110
500	100
550	90

(a) Skryf die volgende sinne in jou oefeningboek oor en voltooi hulle:

(i) Vir elke R50 verhoging in die verkoopprys, (vermeerder/verminder) die aantal verkope met __________.

(ii) Vir elke R10 verlaging in die verkoopprys, (vermeerder/verminder) die aantal verkope met __________.

(iii) As die verkoopprys R300 is, sal die aantal verkope ________ wees.

(iv) As die verkoopprys R100 is, sal die aantal verkope ________ wees.

(v) As die verkoopprys ________ is, sal die aantal verkope 200 wees.

(vi) As die verkoopprys________ is, sal die aantal verkope 0 wees.

(b) Gumani besluit op die volgende reël om die aantal juwelekissies wat hy verkoop, te bereken:

‘200 minus een vyfde van die verkoopprys’

Kyk of Gumani se reël korrek is deur dit te gebruik om die waardes van die aantal juwelekissies verkoop in die tabel te bereken.

Wat kan ons uit die vorige oefening leer?

Gumani se reël om die aantal juwelekissies wat verkoop is, te bereken, is:

200 minus een vyfde van die verkoopprys

As ons die aantal juwelekissies voorstel deur die letter x, dan kan ons Gumani se reël vir die berekening van die aantal juwelekissies verkoop, soos volg as 'n algebraïese uitdrukking skryf:

$$\left(-\frac{1}{5}\right)x + 200.$$

In die voorstelling van Gumani se reël het ons die volgende:

Veranderlikes: Hierdie is die kwantiteite wat verskillende waardes in die situasie en in die uitdrukking kan hê, bv. die uitdrukking $\left(-\frac{1}{5}\right)x + 200$ waar x 'n verandelike is, die insetwaarde van die verkoopprys van die juwelekissies.

Konstantes: Hierdie is die kwantiteite wat vaste of onverandelike waardes in die situasie en in die uitdrukking het, bv. die uitdrukking $\left(-\frac{1}{5}\right)x + 200$ waar 200 'n konstante is.

Bewerkings: Hierdie is die maniere waarop veranderlikes en konstantes gekombineer word om nuwe waardes te vorm, bv. daar is vermenigvuldiging tussen $-\frac{1}{5}$ en x, en optelling tussen $-\frac{1}{5}$ en 200.

Uitdrukking: Dit is 'n algebraïese 'sin', 'reël', of 'instruksie', bv. Gumani se reël in algebraïese vorm $\left(-\frac{1}{5}\right)x + 200$ is 'n algebraïese uitdrukking.

Terme: Hierdie is die dele van 'n algebraïese uitdrukking wat opgetel of afgetrek word, bv. Gumani se reël het twee terme, $-\frac{1}{5}$ en $+ 200$.

Koëffisiënt: Hierdie is konstantes wat vermenigvuldig word met veranderlikes in 'n spesifieke term, bv. $-\frac{1}{5}$ is die koëffisiënt van x in die term $-\frac{1}{5}x$.

Wanneer ons die insetveranderlike in die uitdrukking 'n waarde gee en dan die bewerkings gebruik om die uitsetwaarde te bereken, sê ons dat ons **die uitdrukking vir 'n bepaalde inset evalueer** (m.a.w. die waarde daarvan bepaal).

Die deel wat ek verdeel, word die **deeltal** (teller) genoem en die deel waarmee ek deel, word die **deler** (noemer) van die uitdrukking genome

$$\frac{x^2 + 5x}{x + 5} \rightarrow \frac{\text{teller}}{\text{noemer}}$$

2154 TechMaths Afr G10 LB.indb 93 2015/11/25 4:13 PM

Oefening Identifiseer die verskillende uitdrukkings

8 Identifiseer elk van die volgende uitdrukkings soos hulle is, as ’n eenterm, tweeterm, of drieterm. Verduidelik of hulle som-, verskil-, produk-, of kwosiënt-uitdrukkings is.

(a) x^2 (b) $1 + x^2$ (c) $x^2 + x$

(d) $x^2 + x + 1$ (d) $x^2(x + 1)$ (e) $\frac{x^2}{x + 1}$

(f) $x(2x + 3)$ (g) $18 - x(2x + 3)$ (h) $(2x + 3)(3y + 2)$

(i) $(2x + 3)(3x + 2)$ (j) $(2x + 3) - (3y + 2)$ (k) $2x + 3 - 3y + 2$

(l) $2x + 3y + 5$ (m) $\frac{2x + 3}{3x + 2}$ (n) $x^3 - 343$

(o) $\frac{x(x + 3)(x - 2)}{x(x + 3)}$

4.3 Optel en aftrek van algebraïese terme

Vereenvoudiging van ’n uitdrukking behels gewoonlik ’n aantal stappe. Elk van hierdie stappe vervang een uitdrukking met ’n ander, ekwivalente uitdrukking.

Een manier om ’n algebraïese uitdrukking wat uit veelterme bestaan, te vereenvoudig, is om alle gelyksoortige terme met enkel, ekwivalente terme te vervang.

Uitgewerkte voorbeelde

A. **Probleem:**

Tel $3x^2 + 5x - 2y + 8$ en $5x^2 + x - 7xy + 4$ bymekaar om ’n som-uitdrukking te vorm deur gelyksoortige terme op te tel en af te trek.

Oplossing:

$3x^2 + 5x - 2y + 8 + 5x^2 + x - 7xy + 4$

$= 3x^2 + 5x^2 + 5x + x - 7xy - 2y + 8 + 4$

$= 8x^2 + 6x - 7xy - 2y + 12$

Albei uitdrukkings is som-uitdrukkings omdat die laaste bewerking optel of aftrek sal wees.

As: $x = 2$ en $y = 3$ is, dan is:

$3(2)^2 + 5(2) - 2(3) + 8 + 5(2)^2 + 2 - 7(2)(3) + 4 = 8$

en $8(2)^2 + 6(2) - 7(2)(3) - 2(3) + 12 = 8$

Dus is hulle ekwivalente uitdrukkings.

B. **Probleem:** Tel $r^2 + 3r - 5$ en $7r^2 - 8r - 12$

Oplossing: $(r^2 + 3r - 5) + (7r^2 - 8r - 12)$

$= r^2 + 3r - 5 + 7r^2 - 8r - 12$

$= r^2 + 7r^2 + 3r - 8r - 12 - 5$

$= 8r^2 - 5r - 17$

Albei uitdrukkings is som-uitdrukkings omdat die laaste bewerking optel of aftrek sal wees.

As: $r = 2$ is, dan is:

$[(2)^2 + 3(2) - 5 + 7(2)^2 - 8(2) - 12] = 5$

en: $8(2)^2 - 5(2) - 17 = 5$

Dus is hulle ekwivalente uitdrukkings.

2154 TechMaths Afr G10 LB.indb 94 2015/11/25 4:13 PM

C. **Probleem:**

Trek $6x^2 + 5x + 4$ af van $10x^2 + 8x + 6$:

Oplossing: $(10x^2 + 8x + 6) - (6x^2 + 5x + 4)$

$= 10x^2 + 8x + 6 - 6x^2 - 5x - 4$

$= 10x^2 - 6x^2 - 5x + 8x + 6 - 4$

$= 4x^2 + 3x + 2$

Albei uitdrukkings is som-uitdrukkings omdat die laaste bewerking optel of aftrek sal wees.
As: $x = 2$ is, dan is:
$[10(2)^2 + 8(2) + 6] - [6(2)^2 + 5(2) + 4] = 24$
en: $4(2)^2 + 3(2) + 2 = 24$
Dus is hulle ekwivalente uitdrukkings.

Onthou, die volgende eienskappe van getalle is van toepassing wanneer ons vermenigvuldig:

- 'n negatief vermenigvuldig met 'n negatief is gelyk aan 'n positief
- 'n positief vermenigvuldig met 'n positief is gelyk aan 'n positief
- 'n negatief vermenigvuldig met 'n positief is gelyk aan 'n negatief.
- 'n positief vermenigvuldig met 'n negatief is gelyk aan 'n negatief

$(-) \times (-) = (+)$

$(+) \times (+) = (+)$

$(-) \times (+) = (-)$

$(+) \times (-) = (-)$

As ek 2 van 6 aftrek, skryf ek dit as $6 - 2$.

Ons trek die uitdrukking $6x^2 + 5x + 4$ af van die uitdrukking $10x^2 + 8x + 6$. Om hierdie rede gebruik ons hakies en dan sal $-(6x^2 + 5x + 4)$ so lyk: $-6x^2 - 5x - 4$.

Gelyksoortige terme is die terme wat dieselfde lettersimbole bevat, en elke lettersimbool het dieselfde eksponent.

Voorbeelde

Gelyksoortige terme:

$3x^2$ en $-0{,}25x^2$; $4mn$ en $3nm$; $2(1 - y^2)$ en $7(1 - y^2)$

Ongelyksoortige terme:

$3x^2$ en $3x$; $4m^2n$ en $3n^2m$; $2(1 - y^2)$ en $7(3 - y^2)$

Strategie vir die gebruik van optel of aftrek om 'n som-uitdrukking te vereenvoudig:

- Groepeer die gelyksoortige terme saam.
- Tel die gelyksoortige terme op of trek hulle af.

Ons gebruik die **kommutatiewe eienskap** van getalle om gelyksoortige terme saam te groepeer. Voorbeeld: $a + b = b + a$ en $a.b = b.a$

Ons gebruik die **assosiatiewe eienskap** van getalle om gelyksoortige terme op te tel of af te trek. Voorbeeld: $(a + b) + c = a + (b + c)$ en $(a.b)c = a(b.c)$.

2154 TechMaths Afr G10 LB.indb 95 2015/11/25 4:13 PM

Oefeninge

9 Voltooi die volgende vrae in jou oefeningboek.

(a) Vereenvoudig $4m^2 + 7m - 2n + 5 - 5m^2 + m + 3mn - 4$. Evalueer die eerste en die finale uitdrukking indien $m = 2$ en $n = 3$.

(b) Tel $2x - 5xy + 3y$ en $12x - 2xy - 5y$ bymekaar. Evalueer die gegewe uitdrukking en jou finale uitdrukking vir $x = 2$ en $y = 3$.

(c) Trek $3x^2 - 2x$ af van $7x^2 - 4x$. Evalueer die gegewe uitdrukking en die finale uitdrukking indien $x = 2$ en $y = 3$.

10 (a) Vereenvoudig die volgende uitdrukkings:

(i) $8m^2n^2 + 5n + 8m^2 - 3m^2n - 3n - 9m^2$

(ii) $3x^2y^2 + 5y^3 + 8x^2 - 2x^2y^2 + 7y - 3x^2$

(iii) $13r^2s^2 + 8s^3 - 2r^2 - 7r^2s^2 + 4s^2 - 8r^2$

(iv) $4r^2s^3 + 8r^2s^3 - 2r^2s^3 - 7r^2s^2 + 12r^2s^2$

(v) $6t^2u^2 + n^2 + 3k^2l^3 - 3n^2 + 2t^2u^2 + k^2l^3$

(vi) $a^2b^{3c} + f^2g + h^3 - f^2g + a^2b^{3c} + h^3$

(b) Tel die volgende uitdrukkings op:

(i) $6x^2 + 5x + 4$ en $10x^2 + 8x + 6$

(ii) $3x^2 - 2x$ en $7x^2 - 4x$

(iii) $4r^2s^3 - 3t^2$ en $3r^2s^3 + 5t^2 + 4$

(iv) $-2p^2 + (-3q^2r^3)$ en $5q^2r^3 - 3p^2$

(v) $12x^3y - 5z^2$ en $3z^2 + (-4x^3y)$

(vi) $3x^3 - 2x^2 + 4x - 1$ en $-5x^3 + 3x^2 - 7x + 2$

(c) Trek die volgende uitdrukkings af:

(i) $2r^2 + 3r - 5$ van $7r^2 - 8r - 12$

(ii) $2x - 5xy + 3y$ van $12x - 2xy - 5y$

(iii) $3x^2 - 5x - 7$ van $7x^2 - 2x - 6$

(iv) $4x^2 + 5x - 7$ van $7x^2 - 2x$ -6

(v) $-2m^3 + 6m + 3m^2$ van $5m - 6m^2 + 7m^3$

(vi) $-2m^2 - 5$ van $-3m^2 - 5$

4.4 Vermenigvuldiging van veelterme

Ons kan wys dat die uitdrukkings $(x + 1)(x + 2)$ en $x^2 + 3x + 2$ ekwivalent is deur vervanging en vergelyking van die uitsetwaardes. Maar hoe weet ons in die eerste plek om hierdie twee uitdrukkings te vergelyk? Om uitdrukkings te raai, sal ’n baie stadige proses wees. Ons het ’n manier nodig om $(x + 1)(x + 2)$ tot $x^2 + 3x + 2$ te ‘transformeer’:

$$(x + 1)(x + 2) \xrightarrow{\text{Watter algebraïese proses?}} x^2 + 3x + 2$$

In afdeling 4.3 het ons gesien hoe om optellings en aftrekkings van uitdrukkings te ‘transformeer’ tot ekwivalente vorms.

Die bewerking in $(x + 1)(x + 2)$ is die produk, en $(x + 1)$ word met $(x + 2)$ vermenigvuldig. Dit is nie dieselfde as die vermenigvuldiging van getalle waar ons ’n enkele antwoord, m.a.w. ’n enkele, numeriese term, kan kry nie. Die vermenigvuldiging van die twee tweeterme hier produseer drie ongelyksoortige terme, m.a.w. ’n kwadratiese drieterm.

Ons noem die vermenigvuldiging van uitdrukkings, **uitbreiding**. Dit berus op ’n welbekende eienskap van getalle wat ons die **distributiewe eienskap** noem.

Voorbeeld **Die distributiewe eienskap is heel natuurlik**

Probleem: Vermenigvuldig 11 met 12 sonder die gebruik van ’n sakrekenaar.

Oplossing:

$$\begin{aligned} 11 \times 12 &= (10 + 1)(10 + 2) \\ &= 10(10 + 2) + 1(10 + 2) \\ &= 100 + 20 + 10 + 2 \\ &= 132 \end{aligned}$$

Of

$$\begin{aligned} 11 \times 12 &= (11 \times 10) + (11 \times 2) \\ &= 110 + 22 \\ &= 132 \end{aligned}$$

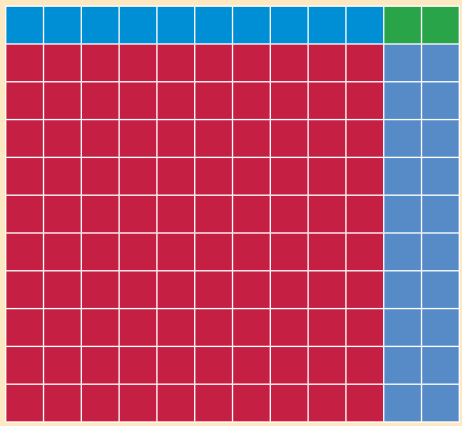
Hier kan ons sien hoe die distributiewe eienskap werk in die uitbreiding van $(x + 1)(x + 2)$ deur $x = 10$ te vervang in $(x + 1)(x + 2)$:

Uitgewerkte voorbeeld **Gebruik getalvermenigvuldiging om uitbreiding te verstaan**

Probleem: Vind die produk van 11 en 12 geskryf as $(10 + 1)$ en $(10 + 2)$.

Oplossing: Stel jou voor dat 11 en 12 die sye van ’n reghoek is. Dan sal die produk van $(10 + 1)$ en $(10 + 2)$ die oppervlakte van die reghoek wees, wat uit 132 vierkante bestaan:

10 + 1



10 + 2

Van die diagram kan ons sien dat $(10 + 1)(10 + 2)$ dieselfde is as

$$(10 \times 10) + (10 \times 1) + (10 \times 2) + (1 \times 2)$$

Ons kan fokus op die manier waarop die vier terme uit die twee pare terme in die tweetermige faktore ontstaan deur hulle verskillende kleure te gee:

$(10 + 1)(10 + 2) = (10 \times 10) + (10 \times 2) + (1 \times 10) + (1 \times 2)$

Oefening Vermenigvuldiging van uitdrukkings

11 Jy kan ’n vermenigvuldigingstabel gebruik as jy terme met mekaar wil vermenigvuldig.

Trek die volgende vermenigvuldigingstabel in jou oefeningboek oor. Voltooi die blokke deur die getal in die boonste ry van die kolom met die getal in die eerste kolom links te vermenigvuldig:

Vermenigvuldig:	$2x$	$-9y$
$3y$		
$-5x$		

Brei nou die volgende uit:

(a) $3y(2x)$

(b) $3y(-9y)$

(c) $3y(2x - 9y)$

(d) $(3y - 5y)(2x - 9y)$

(e) $3y(-5x - 9y)$

(f) $(3y - 5y)(1 - 9y)$

2154 TechMaths Afr G10 LB.indb 98 2015/11/25 4:13 PM

Vermenigvuldig tweeterm met tweeterm

- $(a + b)(x + y) = (a + b)x + (a + b)y = ax + bx + ay + by$
  of anders:
- $(a + b)(x + y) = a(x + y) + b(x + y) = ax + ay + bx + by$
- $(a + b)(x - y) = a(x - y) + b(x - y) = ax - ay + bx - by$

Oefening

12 Vereenvoudig die volgende:

(a) $2x(-x + 1)$ (b) $-10x - x(4 + x)$ (c) $2a + 4b + a(-4 + b)$

(d) $(-x + 1)(-2x - 3)$ (e) $3y - 2x + 2x - 2y$ (f) $-(-x + y) + 2x - 3y$

(g) $\dfrac{2x + 4x^2}{6x}$

Verdere voorbeelde om 'n tweeterm met 'n tweeterm te vermenigvuldig

- $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ Kwadrering van 'n tweeterm
- $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$ Kwadrering van 'n tweeterm
- $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$ Die verskil van twee kwadrate

Oefening

13 Brei uit en vereenvoudig die volgende:

(a) $(3 + q)^2$ (b) $(1 - 3q)^2$

(c) $(3 + q)(3 - q)$ (d) $(1 - 3q)(3 + q)$

(e) $(2x + 5y)^2$ (f) $(2x + 5y)2 - (2x - 5y)^2$

(g) $(2x + 5y)(2x - 5y)$ (h) $(4w + 7)2(4w - 7)$

Vermenigvuldig tweeterm met drieterm

- $(a + b)(x + y + z) = (a + b)x + (a + b)y + (a + b)z = ax + bx + ay + by + az + bz$
  of anders:
- $(a + b)(x + y + z) = a(x + y + z) + b(x + y + z) = ax + ay + az + bx + by + bz$
- $(a - b)(x - y + z) = (a - b)x - (a - b)y + (a - b)z = ax - bx - ay + by + az - bz$

Oefeninge

14 Vereenvoudig die volgende:

(a) $(2x + y)(2a + 3b + c)$ (b) $(a + 3b)(2c + d + 4e)$

(c) $(x + y)(3a - 2b + 3c)$ (d) $(2a + 3b)(4x - 3y + z)$

(e) $(3x + 2y)(3a + 2b + 3c)$ (f) $(2x + 2y)(5d - 3e + f)$

15 (a) Brei die volgende uit:

(i) $3(x + 1)$

(ii) $x(x + 1)$

(iii) $-x(a + 3)$

(iv) $-a(a - b)$

(b) Vereenvoudig:

(i) $2x^2 + 3x(x + 2) - 5x$

(ii) $-2 + (a + b) - a(3 + a)$

(iii) $a(a + 2) - (-3 + a^2)$

(iv) $-a(2a + 2) - 5a(a - 1)$

16 Vermenigvuldig die volgende:

(a) $5(3x^2 + 2y)$
(b) $x(x - 3)$
(c) $3x^2(2x + 5y^3)$
(d) $m(3m^2 + 2n - 3)$
(e) $4s^2(3s^3 - 5t + 7)$
(f) $(a + b)(a + b)$
(g) $(3a + b)(3a + b)$
(h) $(a - b)(a - b)$
(i) $(3a - b)(3a - b)$
(j) $(a + b)(a - b)$
(k) $(3a + b)(3a - b)$
(l) $(x + y)(a + b)$

17 Vereenvoudig die volgende uitdrukkings:

(a) $x(x^2 + 3x + 4) - x^3 + 2x^2$
(b) $a(a + 2) + 3a^2 - 2a$
(c) $2b(b + 1) + b^2 - b$
(d) $2y(y + 2) - 2y^2 + 3(y + 1)$
(e) $(x + 1)(x^2 + 2x - 3)$

4.5 Faktoriseer uitdrukkings van die vorm $ab \pm ac$

Kyk vooruit na faktorisering, die teenoorgestelde proses as uitbreiding

Die proses om 'n som-uitdrukking (veelterm) as 'n produk te skryf, word **faktorisering** genoem. Dit is die *inverse bewerking van uitbreiding*. Elke deel van 'n produk word 'n **faktor van die uitdrukking** genoem.

As $c = ab$ is, dan is a en b faktore van c.

As $x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$ is, dan is $x + 2$ en $x + 3$ faktore van $x^2 + 5x + 6$.

Hoe kry ons die grootste gemene deler (GGD) wanneer ons uitdrukkings van die vorm ab ± ac faktoriseer?

Die terme van uitdrukkings bestaan ook uit diverse waardes en veranderlikes.

Oefening Ondersoek hoe om die GGD te vind

18 Vind die grootste gemene deler (GGD). Trek die volgende tabel in jou oefeningboek oor en voltooi dit:

	Vind vir elk van die volgende uitdrukkings	$3x + 6y$	$4a^3 + 2a$	$5x + 2x$	$ax^2 - bx^3$	$12a^2b + 18ab^2$
(a)	Die faktore (uitsluitend 1) van die eerste term;	3 en x				
(b)	Die faktore (met uitsondering van 1) van die tweede term;	2; 3 en y				
(c)	Die grootste gemene faktor van die twee terme;	3				
(d)	Skryf die uitdrukking in faktor vorm;	$3(x + 2y)$				

Uitgewerkte voorbeeld

Probleem: Faktoriseer $4x^3 + 2x^2 - 6x$

Oplossing:

$$4x^3 + 2x^2 - 6x = 2x(2x^2 + x - 3)$$
$$= 2x(2x + 3)(x - 1)$$

Uitgewerkte voorbeelde

Faktoriseer: $(a - b)x + (b - a)y$

$-a + b = -(a - b)$

$= (a - b)x - (a - b)y$

$= (a - b)(x - y)$

Let op dat $b - a = -a + b$ is. Deur nou -1 as 'n gemeenskaplike faktor uit te haal:
Faktoriseer: $ac + bc + bd + ad$

$= (ac + bc) + (bd + ad)$

$= c(a + b) + d(b + a)$

$= (a + b)(c + d)$

Orden en groepeer terme met gemeenskaplike faktore.

Haal die gemeenskaplike faktor uit.

Skryf dit as 'n produk.

2154 TechMaths Afr G10 LB.indb 101 2015/11/25 4:13 PM

Oefening

19 Faktoriseer die volgende uitdrukkings.

(a) $(a - b)x + a - b$	(b) $(a - b)x - a + b$	(c) $xy + x + y + 1$
(d) $(a + b)x - a - b$	(e) $3x(2x - 3) - (3 - 2x)$	(f) $(y^2 - 4y) + (3y - 12)$
(g) $px + py + qx + qy$	(h) $9x^3 - 27x^2 + x - 3$	(i) $4a + 4b + 3ap + 3bp$
(j) $a^4 + a^3 + 3a + 3$	(k) $xy + x - y + 1$	(l) $ac - ad - bc + bd$

Let wel: Dit is altyd 'n goeie idee om seker te maak van faktorisering deur die antwoord uit te brei om seker te maak dat die resultaat gelyk is aan die oorspronklike uitdrukking.

4.6 Faktoriseer uitdrukkings van die vorm $ax^2 \pm bx \pm c$

'n Toets-en-tref-benadering tot die faktorisering van $x^2 \pm bx \pm c$

Ons kan ook faktore sistematies vind deur middel van 'n toets-en-tref-metode om kwadratiese drieterme te faktoriseer. Ons het gesien dat kwadratiese drieterme soos $x^2 + 5x + 6$ vekry word deur uitbreiding van die produk van twee lineêre faktore soos $(x + 2)(x + 3)$:

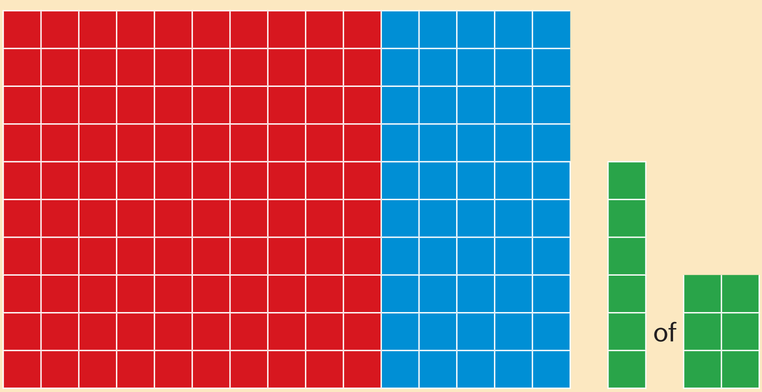
$$x^2 + 5x + 6 \underset{\text{uitbreiding}}{\overset{\text{faktorisering}}{\rightleftarrows}} (x + 2)(x + 3).$$

Van die uitbreiding van produkte weet ons dat die faktore van 'n kwadratiese drieterm twee lineêre tweeterme is. Ons probleem is eenvoudig om die terme van hierdie tweeterme te vind. Met ander woorde, om die antwoord op $x^2 + 5x + 6 = (? + ?)(? + ?)$ te kry.

Ons kan'n meetkundige manier gebruik om dit te verstaan:

Voorbeeld **Faktoriseer $x^2 + 5x + 6$**

Stel x weer gelyk aan 'n positiewe heelgetal waarde, kom ons sê 10. Ons kan $x^2 + 5x + 6$ soos volg voorstel as 'n versameling vierkante met sye van lengte 1:

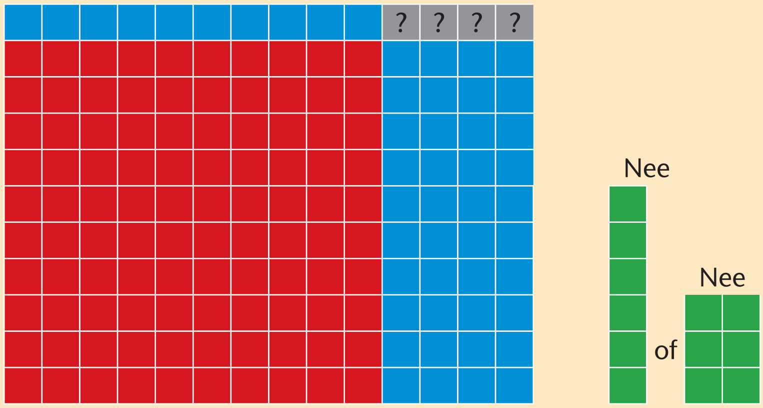


Daar is:
10^2 **rooi** vierkante wat ooreenstem met die term x^2,
5.10 **blou** vierkante wat ooreenstem met $5x$, en
6 **groen** vierkante.

Daar is slegs twee maniere waarop die ses vierkante gerangskik kan word:
in 'n 1 by 6 rangskikking, of
in 'n 2 by 3 rangskikking.

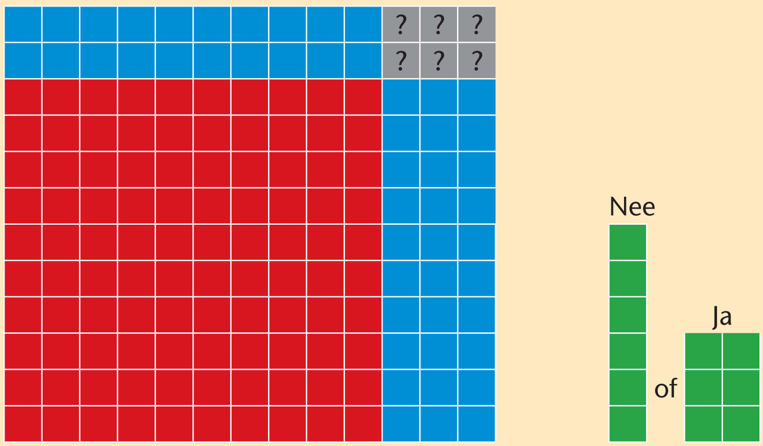
Ons moet die vierkante so rangskik dat hulle 'n reghoek vorm.

Eerste probeerslag: skuif een blou kolom van 1 by 10 na die bokant van die 10 by 10 vierkant:

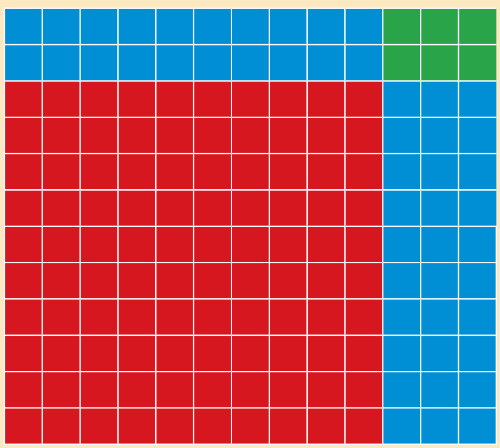


Dit gee vir ons ’n 11 by 14 reghoek waar daar vier vierkante (in grys) ontbreek. Maar ons moet ses groen vierkante inpas, dus sal hierdie rangskikking nie werk nie.

Tweede probeerslag: skuif nog ’n blou kolom van 1 by 10 vierkante na die bokant toe:



Nou het ons ’n reghoek van 12 by 13 waar ses blokke ontbreek, presies die getal wat ons nodig het om in te pas. Ons kry dus:



Ons kan sien dat dit ’n (10 + 2)(10 + 3) reghoek is. Aangesien ons x die waarde 10 laat aanneem het, kan ons weer die 10 met x vervang. Dit beteken dat ons $x^2 + 5x + 6$ tot $(x + 2)(x + 3)$ gefaktoriseer het.

Oefeninge Ondersoek faktorisering van drieterme

Skryf die volgende tabelle in jou oefeningboek oor en voltooi elkeen.

20 Faktoriseer $x^2 + 6x + 8$.
Die faktore is van die vorm $(x.x) + (m + n)x + (m.n)$.

(a) Vind die moontlike faktorpare:

As faktor m =	As faktor n =	$mn = 8$	$m + n = 6$	Sal dit werk?
+1	+8			Ja/Nee
+2	+4			Ja/Nee

(b) Dus: $x^2 + 6x + 8 = (x \quad)(x \quad)$

(c) Gaan jou antwoord na met behulp van uitbreiding.

(d) Waarom is albei konstantes in die twee faktore positief?

21 Faktoriseer $x^2 - 5x + 6$.
Die faktore is van die vorm $(x.x) - (m + n)x + (m.n)$.

(a) Vind die moontlike faktorpare:

As faktor m =	As faktor n =	$mn = 6$	$m + n = -5$	Sal dit werk?
–1	–6			Ja/Nee
–2	–3			Ja/Nee

(b) Dus: $x^2 - 5x + 6 = (x \quad)(x \quad)$

(c) Gaan jou antwoord na met behulp van uitbreiding.

(d) Waarom is albei konstantes in die twee faktore negatief?

22 Faktoriseer $x^2 - 5x + 6$.
Die faktore is van die vorm $(x.x) + (m + n)x - (m.n)$.

(a) Vind die moontlike faktorpare:

As faktor m =	As faktor n =	$mn = -12$	$m + n = 4$	Sal dit werk?
+12	–1			Ja/Nee
+4	–3			Ja/Nee
+6	–2			Ja/Nee

(b) Dus: $x^2 + 4x - 12 = (x + \quad)(x + \quad)$

(c) Gaan jou antwoord na met behulp van uitbreiding.

(d) Waarom is die een konstante positief en die ander negatief in die twee faktore?

2154 TechMaths Afr G10 LB.indb 104 2015/11/25 4:13 PM

23 Faktoriseer $x^2 - 4x - 12$.
Die faktore is van die vorm $(x.x) - (m + n)x - (m.n)$

(a) Vind die moontlike faktorpare:

As faktor m =	As faktor n =	$mn = -12$	$m + n = -4$	Sal dit werk?
+1	−12			Ja/Nee
+3	−4			Ja/Nee
+2	−6			Ja/Nee

(b) Dus: $x^2 - 4x - 12 = (x \quad)(x \quad)$

(c) Gaan jou antwoord na met behulp van uitbreiding.

(d) Waarom is die een konstante positief en die ander negatief in die twee faktore?

Ons kan wat ons waargeneem het soos volg opsom:

Die drieterm $x^2 \pm bx \pm c$ herskryf as $(x.x) - (m + n)x - (m.n)$ kan soos volg gefaktoriseer word:

Faktore sal wees:	As mn is:	As $m + n$ is:	As m ? n:
$(x + m)(x + n)$	Positief	Positief	Nie van toepassing nie
$(x - m)(x - n)$	Positief	Negatief	Nie van toepassing nie
$(x + m)(x - n)$	Negatief	Positief	$m > n$ omdat $(m + n) > 0$
$(x + m)(x - n)$	Negatief	Negatief	$m < n$ omdat $(m + n) < 0$

Oefening

24 Faktoriseer die volgende drieterme:

(a) $x^2 + x - 12$
(b) $x^2 - x - 12$
(c) $x^2 + 8x + 12$
(d) $x^2 - 8x + 12$
(e) $x^2 + 9x - 10$
(f) $x^2 - 3x - 10$
(g) $4x - 21 + x^2$
(h) $10x + 21 + x^2$
(i) $x^2 - 18 - 7x$
(j) $x^2 - 20 - 8x$
(k) $x^2 + 2x + 1$
(l) $x^2 - 2x + 1$
(m) $a^2 + 14x + 49$
(n) $p^2 - 16p + 64$
(o) $m^2 + 2mn - 3n^2$
(p) $a^2 - 10ab + 25b^2$
(q) As $x^2 + 3xy - 10y^2$ die oppervlakte van 'n reghoek is, en die lengte word gegee deur die uitdrukking $x + 5y$, vind die uitdrukking vir die breedte.

Gebruik GGD en groepering om $x^2 \pm bx \pm c$ uitdrukkings te faktoriseer

Vind faktore deur die middelterm te verdeel en die GGD en groepering te gebruik om kwadratiese drieterm te faktoriseer. Hoe doen ons dit? Ons het gesien dat kwadratiese drieterme soos $x^2 + 5x + 6$ verkry word deur die produk van die twee lineêre faktore soos $(x + 2)(x + 3)$ uit te brei:

uitbreiding

$$
\begin{aligned}
&(x + 2)(x + 3)\\
&= x(x + 3) + 2(x + 3)\\
&= x^2 + 3x + 2x + 6\\
&= x^2 + 5x + 6
\end{aligned}
$$

faktorisering

Ons kan uitdrukkings soos $x^2 + 5x + 6$ faktoriseer deur bloot die proses om te keer. Dit word gedoen deur die middel term ($5x$) as die som van twee terme ($2x$ en $3x$) te skryf sodat die som van hulle koëffiënte 5 is en hul produk 6 is.

Koëffisiënt is ’n getal of simbool vermenigvuldig met ’n veranderlike of ’n onbekende grootheid in ’n algebraïese term. Byvoorbeeld, 4 is die koëffisiënt in die term $4x$, en x is die koëffisiënt in $x(a + b)$.

Uitgewerkte voorbeelde

Faktoriseer:

$$
\begin{aligned}
&x^2 + 4x + 3\\
&= x^2 + x + 3x + 1\\
&= x(x + 1) + 3(x + 1)\\
&= (x + 1)(x + 3)
\end{aligned}
$$

As die twee faktore +3 en +1 is, sal die konstante c $(+3) \times (+1) = +3$ wees en die koëffisiënt b van x sal $(+3) + (+1) = +4$ wees.
Herskryf die middelterm as $\pm mx \pm nx$.
Groepering en uithaal van die GGD.
Skryf dit as ’n produk.

Faktoriseer:

$$
\begin{aligned}
&x^2 + 3x - 4\\
&= x^2 - x + 4x - 4\\
&= x(x - 1) + 4(x - 1)\\
&= (x - 1)(x + 4)
\end{aligned}
$$

As die twee faktore +4 en –1 is, sal die konstante c $(+4) \times (-1) = -4$ wees en die koëffisiënt b van x sal $(+4) + (-1) = +3$ wees.
Herskryf die middelterm as $\pm mx \pm nx$.
Groepering en uithaal van die GGD.
Skryf dit as ’n produk.

Oefeninge

25 Faktoriseer die volgende drieterme:

(a) $a^2 + 9a + 14$

(b) $x^2 + 3x - 18$

Onthou om jou antwoord te toets met behulp van uitbreiding van die faktore om te sien of jy die oorspronklike uitdrukking gekry het. Deel die manier waarop jy die probleem opgelos het met die res van die klas.

26 Faktoriseer die volgende drieterme.

(a) $a^2 + 9a + 14$

(b) $x^2 + 3x - 18$

(c) $x^2 - 18x + 17$

(d) $y^2 + 20y + 30$

(e) $y^2 - 13y - 30$

(f) $y^2 + 7y - 30$

(g) $x^2 + 2x - 15$

(h) $m^2 + 4m - 21$

(i) $x^2 - 4x + 9$

(j) $b^2 + 15b + 56$

(k) $a^2 - 2a - 36$

(l) $a^2 - ab - 30b^2$

(m) $x^2 - 5xy - 24y^2$

(n) $x^2 - 13x + 40$

(Onthou om jou antwoord na te gaan met behulp van uitbreiding van die faktore om te toets of jy die oorspronklike uitdrukking gekry het.)

27 Faktoriseer die volgende drieterme:

(a) $2a^2 + 9a + 9$

(b) $3x^2 + 3x - 6$

(Onthou om jou antwoord na te gaan met behulp van uitbreiding van die faktore om te toets of jy die oorspronklike uitdrukking gekry het.)

28 (a) Hoe verskil die drieterme in Oefening 27 van die drieterme in Oefeninge 25 en 26?

(b) Kan jy nog steeds die strategie soos voorheen gebruik? Verduidelik jou antwoord.

(c) Is daar 'n manier waarop ons, ons huidige strategie kan aanpas sodat dit vir hierdie tipe drieterm sal werk?

Faktoriseer uitdrukkings van die vorm $ax^2 \pm bx \pm c$

Soos ons in die laaste oefening opgemerk het, is die uitdaging om drieterme met 'n koëffisiënt van x^2 anders as 1 te faktoriseer. In hierdie les gaan ons ondersoek instel hoe ons, ons strategie kan aanpas om hierdie doel te bereik.

Oefening Dit was al die tyd daar

29 Beskou die drieterm $x^2 + 9x + 14$. Vergelyk dit met die standaardvorm $ax^2 \pm bx \pm c$ en beantwoord die volgende vrae:

(a) Watter waarde sal die konstante c in die drieterm hê?

(b) Watter waarde sal die koëffisiënt b in die drieterm hê?

(c) Watter waarde sal die koëffisiënt a in die drieterm hê?

> As die koëffisiënt in algebraïese notasie 1 is, skryf ons dit nie voor die veranderlike nie. As die koëffisiënt –1 is, skryf ons die – voor die veranderlike.

Uitgewerkte voorbeeld

Faktoriseer:

$x^2 + 9x + 14$

$= x^2 + 7x + 2x + 14$

$= x(x + 7) + 2(x + 7)$

$= (x + 7)(x + 2)$

> As die twee faktore +7 en +2 is, sal die konstante c $(+7) \times (+2) = +14$ wees en die koëffisiënt b van x sal $(+7) + (+2) = +9$
> Herskryf die middelterm as $\pm mx \pm nx$.
> Groepering en uithaal van die GGD.
> Skryf dit as 'n produk.

Oefening

30 (a) Beskou die volgende. As ons die middelterm herskryf as twee terme, waar ons twee faktore gebruik wat soos volg verkry is:

- ons vermenigvuldig die koëffisiënt a met die koëffisiënt c,
- ons vind twee faktore (m en n) van hierdie produk wat, as dit bymekaargetel word, vir ons die koëffisiënt b sal gee ($\therefore m + n = b$ en $m \times n = a \times c$), en
- ons gebruik dan hierdie twee faktore om die middelterm te herskryf en gaan voort om die GGD uit te haal om die drieterm te faktoriseer.

(b) Toets dit deur $x^2 + 9x + 14$ weer te faktoriseer.

(c) Dink jy dit het enigiets verander?

(d) Toets nou die strategie deur die probleem $2a^2 + 9a + 9$ te faktoriseer.

Uitgewerkte voorbeelde

Faktoriseer:

$3x^2 + 3x - 6$

$= 3x^2 - 3x + 6x - 6$

$= 3x(x - 1) + 6(x - 1)$

$= (x - 1)(3x + 6)$

> $(3) \times (+6) = +3$. As die twee faktore –3 en +6 is, sal die koëffisiënt van x $(-3) + (+6) = +3$ wees.
> Herskryf die middelterm as $\pm mn \pm nx$.
> Groepering en uithaal van die GGD.
> Skryf dit as 'n produk.

Oefeninge Oefen jou nuwe strategie

31 Faktoriseer die volgende drieterme (onthou om jou antwoord na te gaan met behulp van uitbreiding van die faktore om te toets of jy die oorspronklike uitdrukking gekry het).

(a) $5a^2 + 27a + 10$

(b) $3x^2 - 5x - 12$

(c) $24x^2 - 14x - 3$

(d) $15y^2 - 11y + 2$

(e) $14y^2 - 25y - 25$

(f) $12y^2 - 13y - 35$

(g) $6x^2 - 14x - 12$

(h) $21m^2 - 6 - 15m$

(i) $24x^2 - 30x + 8 + 2x$

(j) $24b^2 - 46b - 18$

32 Faktoriseer nou die volgende (probeer jou bes om dit te doen):

(a) $x^2 - 9$

(b) $x^2 - 16$

33 Het jy gesukkel om die twee probleme in Oefening 32 te beantwoord? Kom ons beskou faktorisering van $x^2 - y^2$.

(a) Dink jy ons kan hierdie tweeterm as die drieterm $x^2 + 0xy - y^2$ herskryf? (Is $x^2 + 0xy - y^2$ en $x^2 - y^2$ dieselfde?)

(b) Faktoriseer nou eerder $x^2 + 0xy - y^2$

Dit beteken nie omdat jy $0x$ nie kan sien nie, dat dit nie bestaan nie!

Onthou: Die faktore is van die vorm
$(x.x) - (m + n)x - (m.n) = (x + m)(x - n)$

(c) Toets jou antwoord deur dit uit te brei.

4.7 Faktoriseer die verskil van twee kwadrate

In die volgende les gaan ons die probleem wat jy in die vorige Oefening gedoen het, ondersoek. Ons gaan dink hoe ons die verskil van twee kwadrate kan faktoriseer.

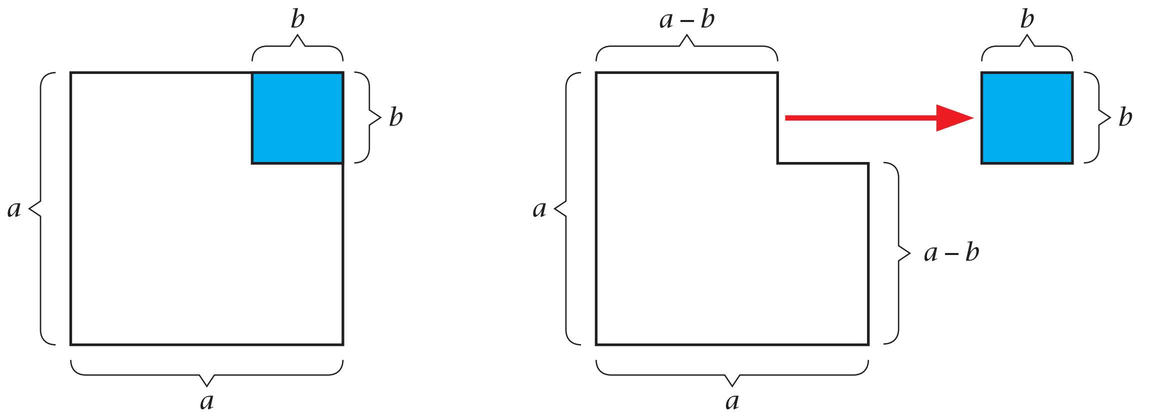
’n Uitdrukking van die vorm $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ word die verskil van twee kwadrate genoem.

Oefening   Ondersoek faktorisering van die verskil van twee kwadrate

34 Vir hierdie oefening sal jy papier, ’n skêr, liniaal, en ’n reihout (straight edge) nodig hê.

Stap 1: Gebruik ’n reihout om twee vierkante te teken, soos in die tekening hieronder. Kies enige afmetings vir a en b.

Stap 2: Knip die klein vierkant uit die groot vierkant.

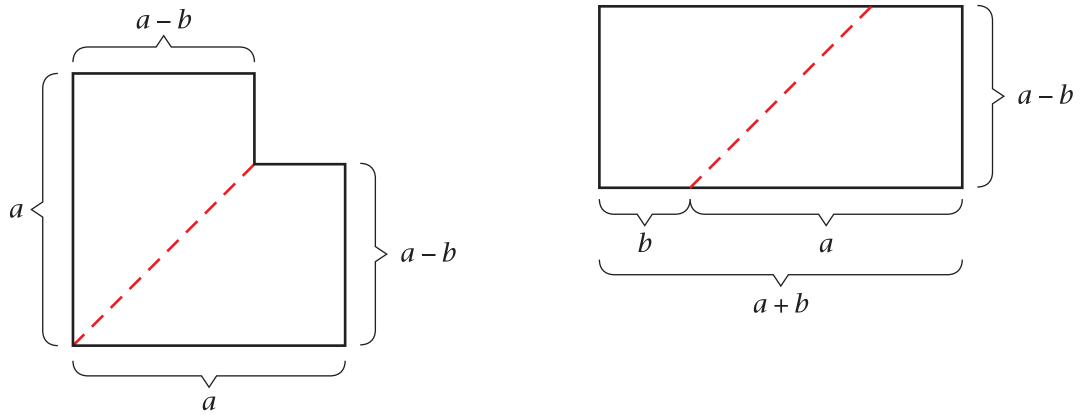


(a) Wat is die oppervlakte van die groot vierkant in terme van a, en wat is die oppervlakte van die klein vierkant in terme van b?

(b) Kan jy met die stelling saamstem dat die oppervlakte van die oorblywende onreëlmatige area $a^2 - b^2$ is?

Stap 3: Knip die onreelmatige gedeelte in twee kongruente stukke soos hieronder aangedui:

Stap 4: Herrangskik die twee kongruente stukke om ’n regoek te vorm soos hieronder aangedui:



(c) Skryf ’n uitdrukking om die oppervlakte van die nuwe reghoek wat jy in Stap 4 gemaak het, voor te stel.

(d) Verduidelik waarom $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ is.

Uitdaging: Nog ’n manier om die faktorisering van die verskil van twee kwadrate te wys, is om ’n benadering te gebruik wat meer is soos die voorbeeld aan die begin van 4.6. Doen dit met ’n 5 by 5 vierkant waarvan ’n 3 by 3 vierkant uit een hoek verwyder is. Kleur die vier sones in met verskillende kleure om jou te help.

Uitgewerkte voorbeeld **Faktoriseer $9x^4 - 4y^2$**

Om 'n verskil tussen kwadrate te faktoriseer, gebruik ons die identiteit: $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ waar a en b getalle of algebraïese uitdrukkings voorstel.

Anders gestel: As p en q volkome vierkante is, ook 'algebraïese vierkante', dan is:

$$p^2 - q^2 = (p + q)(p - q)$$

Dus, $9x^4 - 4y^2 = (3x^2)^2 - (2y)^2$

$= (3x^2 + 2y)(3x^2 - 2y)$

Oefeninge

35 Faktoriseer die volgende uitdrukkings:

(a) $9a^2 - b^2$

(b) $18a^2 - 2b^2$

(c) $a^2 - 1$

(d) $9a^4 - b^6$

Onthou: Haal altyd die grootste gemene deler uit, as daar een is, voordat jy probeer om die uitdrukking te faktoriseer (sien (b)).

Een is 'n volkome vierkant: $= 1^2$ as $1^m = 1$ (sien (c)).

36 Gebruik die vaardighede wat jy geleer het om die volgende te faktoriseer:

(a) $4a^2 - b^2$

(b) $m^2 - 9n^2$

(c) $25x^2 - 36y^2$

(d) $121x^2 - 144y^2$

(e) $16p^2 - 49q^2$

(f) $64a^2 - 25b^2c^2$

(g) $x^2 - 4$

(h) $16x^2 - 36y^2$

(i) $1 - a^2b^2c^2$

(j) $25x^{10} - 49y^8$

(k) $2x^2 - 18$

(l) $200 - 2b^2$

(m) $3xy^2 - 48xa^2$

(n) $5a^4 - 20b^2$

37 Is dit moontlik om die som van twee kwadrate te faktoriseer? Probeer om die algebraïese faktore van $m^2 + n^2$ te bepaal. Wys dat jou gefaktoriseerde uitdrukking ekwivalent is aan $m^2 + n^2$ deur

- dit weer algebraïes uit te brei om $m^2 + n^2$ te kry, of
- deur vervanging van sommige waardes van m en n om te wys dat die uitdrukkings dieselfde uitsette vir dieselfde insette produseer.

(**Wenk:** Jou opsies is maar baie min. Jou faktore moet twee tweeterme wees wat m en n bevat.)

2154 TechMaths Afr G10 LB.indb 111 2015/11/25 4:13 PM

4.8 Faktorisering: die optel of aftrek van twee derdemagte

Die ander twee spesiale faktoriseringsformules is twee kante van dieselfde muntstuk: die som en die verskil van derdemagte. Hier is die formules:

- $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ en
- $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

Oefening Ondersoek die optel en aftrek van twee derdemagte

38 Brei die volgende uit:

(a) $(x + y)(x^2 - xy + y^2)$

(b) $(x - y)(x^2 + xy + y^2)$

(c) $(x + 2y)(x^2 - 2xy + 4y^2)$

(d) $(x - 2y)(x^2 + 2xy + 4y^2)$

(e) $(2x + y)(4x^2 - 2xy + y^2)$

(f) $(x - 2y)(x^2 + 2xy + 4y^2)$

(g) $(3x + 2y)(9x^2 - 6xy + 4y^2)$

(h) $(3x - 2y)(9x^2 + 6xy + 4y^2)$

Die patroon wat te voorskyn kom

Die som van en verskil tussen twee derdemagte is ekwivalent aan die produk van ’n tweeterm en ’n drieterm:

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

Let daarop dat die bewerking + of – in die tweeterm faktor *dieselfde* is as die bewerking in die uitdrukking met twee derdemagte. Die bewerking van die produkterm in die drieterm faktor is die *teenoorgestelde* van die een in die uitdrukking met twee derdemagte.

Uitgewerkte voorbeeld

Probleem: Faktoriseer $125x^3 - 1$

Oplossing:

Stap 1: Let daarop dat $125x^3$ en 1 albei volkome vierkante is. Herskryf die tweeterm as die verskil tussen twee derdemagte:

$$125x^3 - 1 = (5x)^3 - 1^3$$

Stap 2: Bepaal die tweeterm faktor en dan die drieterm faktor:

$$\begin{aligned}(5x)^3 - 1^3 &= (5x - 1)(? + ?? + ???])\\ &= (5x - 1)((5x)^2 + (5x)(1) + 1^2)\\ &= (5x - 1)(25x^2 + 5x + 1)\end{aligned}$$

Uitgewerkte voorbeeld

Probleem: Faktoriseer $27 + \frac{p^6}{8}$

Oplossing:

Step 1: Let daarop dat $27 = 3^3$ en dat $\frac{p^6}{8} = \left(\frac{p^2}{2}\right)^3$ is.

Step 2: Faktoriseer

$$\begin{aligned} 27 + \frac{p^6}{8} &= 3^3 + \left(\frac{p^2}{2}\right)^3 \\ &= \left(\frac{3 + p^2}{2}\right)\left((3)^2 - (3)\left(\frac{p^2}{2}\right) + \left(\frac{p^2}{2}\right)^2\right) \\ &= \left(3 + \frac{p}{2}\right)\left(9 - \left(\frac{3}{2}\right)p^2 + \frac{p^4}{4}\right) \end{aligned}$$

’n Nuttige eselsbruggie

Sommige mense gebruik die Engelse eselsbruggie ‘SOAP’ vir die tekens; die letter s staan vir ‘same’ (dieselfde as die teken in die middel van die oorspronklike uitdrukking), ‘opposite’ teenoorgestelde teken, en ‘always positief’ (altyd positief).

’n Eselsbruggie is ’n manier om jou te help om iets te onthou wat nogal lastig is om te onthou. Eselsbruggies is wonderlik hiervoor. Hulle is egter gevaarlik ook, omdat hulle nie aandag gee aan die lastige detail nie. Jy moet dus vertrou dat hulle jou die regte ding sal laat doen.

$a^3 \pm b^3 = a$ [*dieselfde teken*] ba^2[*teenoorgestelde teken*] ab [*altyd positief*] b^2

Die kwadratiese deel van elke kubus formule faktoriseer nie; moet dit dus nie probeer nie.

Oefening

39 Gebruik die vaardighede wat jy geleer het, om die volgende te faktoriseer:

(a) $1 - 8x^6$

(b) $8m^9 - 1$

(c) $8a^3 - b^3$

(d) $x^9 - 27y^3$

(e) $125p^{12} - 216$

(f) $1 + \frac{64}{t^{15}}$

(g) $3x^3b - 24b$

(h) $x^3 + 343x^6$

(i) $m^3 + 64n^3$

(j) $16a^3 - 2b^3$

(k) $\frac{1\,000}{1\,331} + 216y^6$

Onthou:

Haal altyd die grootste gemene deler uit as daar een is, voordat jy probeer om die uitdrukking te faktoriseer.

Een is ’n volkome vierkant: $1 = 1^3$ as $1^m = 1$ is.

2154 TechMaths Afr G10 LB.indb 113 2015/11/25 4:13 PM

4.9 Faktorisering: 'n paar gemengde voorbeelde

Oefeninge

40 Faktoriseer die volgende uitdrukkings ten volle:

(a) $2(3x^2 - 7x - 6)$ (b) $7m^2 - 2 - 5m$

(c) $12x^2 - 16x + 4 + 2x$ (d) $24b^2x - 46bx - 18x$

(e) $36x^2 - 49y^2$ (f) $72ax^2 - 24ay^2$

(g) $125p^{12} + 8x^6$ (h) $32a^4b - 4ab^4$

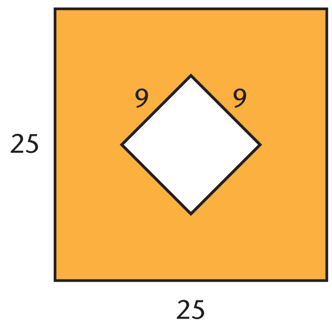
(i) $5a^2 + 27a + 10 + 4a^2 - b^2$ (j) $3x^2 - 5x - 12 + 8a^3 - b^3$

(k) $2x^2 - 18 + 5a^4 - 20b^2$ (l) $x^2 - 4 + 16a^3 - 2b^3$

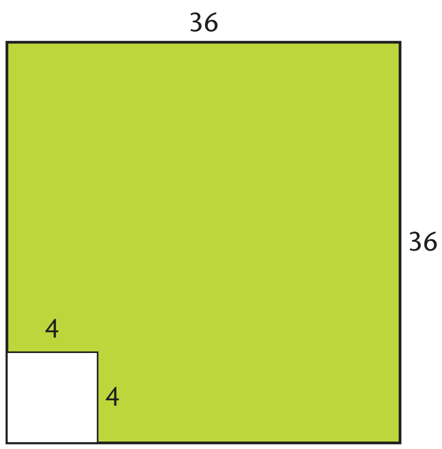
(m) $14y^2 - 25y - 25 + m^3 + 64n^3$ (n) $12y^2 - 13y - 35 + m^2 - 9n^2$

41 Bereken in elke geval die oppervlakte van die gekleurde deel sonder om jou sakrekenaar te gebruik.

(a)



(b)



4.10 Vereenvoudig algebraïese breuke (kwosiënt-uitdrukkings)

Teen die einde van hierdie les, sal jy weet wat 'n algebraïese breuk is, en jy sal in staat wees om algebraïese breuke te vereenvoudig deur faktorisering en die eienskap $\frac{ax}{a} = x$ vir $a \neq 0$ te gebruik.

> In die geval van die uitdrukking $\frac{x^2 + 5x + 6}{x + 2}$
> Is die teller $(x^2 + 5x + 6)$ die **deeltal**,
> die noemer $(x + 2)$ is die **deler**
> en die vereenvoudigde vorm $(x + 3)$ is die **kwosiënt**.

2154 TechMaths Afr G10 LB.indb 114 2015/11/25 4:13 PM

Oefening Kwosiënt-uitdrukkings

42 (a) Teken die volgende diagram in jou werkboek oor en voltooi dit.

Bereken $\dfrac{x^2 + 5x + 6}{x + 2}$ vir $x = 2$:

Insetwaarde 1 $\boxed{x^2 + 5x + 5}$

______ ÷ ______ = __________ (Uitsetwaarde)

Insetwaarde 2 $\boxed{x + 2}$

(b) Wat is die laaste stap van jou berekening (optel, aftrek, vermenigvuldiging, of deling)?

Dit is belangrik om daarop te let dat as $x + 2 = 0$ ($\therefore x = -2$), dan sal $\dfrac{x^2 + 5x + 6}{x + 2}$ nie moontlik wees nie aangesien deling deur nul nie sin maak nie.

Uitgewerkte voorbeeld

Vereenvoudig

$$\frac{x^2 + 5x + 6}{x + 2}$$

$$= \frac{(x + 2)(x + 3)}{x + 2}$$

$$= x + 3 \text{ if } x \neq 2$$

Ons gebruik faktorisering om die teller of die noemer in sy faktore te herskryf.

Ons gebruik dan die eienskap $\frac{ax}{a} = x$ as $a \neq 0$ is om die term van die algebraïese breuk te vereenvoudig.

Oefeninge Kom ons oefen

43 Vereenvoudig die volgende algebraïese breuke (onthou om die uitgeslote waardes van die veranderlikes te gee):

(a) $\dfrac{6x^2 + 2}{2x}$

(b) $\dfrac{x^2 + 8x + 15}{x + 5}$

(c) $\dfrac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 16}$

(d) $\dfrac{x^2 - 9}{2x - 6}$

(e) $\dfrac{2x^2y \times 3xy^2}{4xy}$

(f) $\dfrac{a^2 + ab}{b^2 + ab}$

(g) $\dfrac{2x^3 - 4x^2 + x - 2}{(x + 1)(x - 2)}$

(h) $\dfrac{a^3 - b^3}{a^2 + ab + b^2}$

2154 TechMaths Afr G10 LB.indb 115 2015/11/25 4:13 PM

44 Vereenvoudig, waar moontlik, die volgende algebraïese breuke en gee die uitgeslote waardes van die veranderlikes:

(a) $\frac{10y^2 - 5y}{5y}$

(b) $\frac{9x^2 - 3xy^2 + 6xy}{3xy}$

(c) $\frac{a^2 + ab}{a^2 - ab}$

(d) $\frac{r + r^2}{s + rs}$

(e) $\frac{x^2 - y^2}{(x - y)^2}$

(f) $\frac{a^2 + ab - 2b^2}{a^2 - 2ab + b^2}$

(g) $\frac{4x^2 - 9}{4x^2 - 6x}$

(h) $\frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - 16}$

(i) $\frac{x^2 + 5x - 6}{x^2 + 5x + 6}$

(j) $\frac{m^2 - m - 6}{m - 3}$

(k) $\frac{x^3 - y^3}{x^2 + xy + y^2}$

(l) $\frac{m^2 - 2mn + n}{m^3 + n^3}$

4.11 Kleinste gemene veelvoude (KGV) en grootste gemene factor (GGF)

KGV – wanneer ons die KGV van algebraïese terme vind, neem ons die veranderlikes met die hoogste eksponente.

Voorbeeld 1: Vir ab; a^2bc; ab^3 het ons 'n KGV van a^2b^3c
Voorbeeld 2: Vir $2x^2$; $4x^3y$; $3x^4y^3z$ het ons 'n KGV van $12x^4y^3z$

GGD – wanneer ons die GGD van algebraïese terme vind, neem ons die gemene veranderlikes met die laagste eksponente.

Voorbeeld 1: Vir ab; a^2bc; ab^3 het ons 'n GGD van ab
Voorbeeld 2: Vir $2x2$; $4x3y$; $3x4y3z$ het ons 'n GGD van x^2

4.12 Optel en aftrek van algebraïese breuke

Kom ons oefen hoe om ekwivalente breuke te skryf deur die Kleinste Gemene Veelvoud (KGV) te gebruik, en om algebraïese breuke wat nie faktorisering vereis nie, op te tel of af te trek.

Wenk: Om breuke op te tel of af te trek, moet die noemers dieselfde wees. Ons moet die breuke herskryf as ekwivalente breuke met dieselfde noemer.

Oefening Oefen om die KGV te gebruik

45 Tel die volgende breuke op, of trek dit af:

(a) $\frac{2}{3} + \frac{1}{4}$

(b) $\frac{2}{5} - \frac{1}{4}$

(c) $\frac{a}{3} + \frac{b}{4}$

(d) $\frac{2}{a} + \frac{1}{b}$

(e) $\frac{3}{2} - \frac{7}{9}$

(f) $\frac{m}{n} - \frac{2}{3}$

(g) $\frac{5y}{2} - \frac{3z}{3}$

(h) $\frac{2}{xy} - \frac{3}{5}$

Uitgewerkte voorbeelde

Bestudeer die volgende uitgewerkte voorbeelde om die kleinste gemene veelvoud (KGV) te vind:

A. **Probleem:** Vind die KGV van 8 en 20.

Oplossing: $8 = 2 \times 2 \times 2$

$20 = 2 \times 2 \times 5$

Gemeenskaplike faktore 2×2

KGV $2 \times 2 \times 2 \times 5 = 40$

Skryf die terme in hulle priem faktore.

Vind die faktore gemeen tot elk.

Vind die faktore wat oorbly vir elke term.

Tel al die faktore 2 (van 8) en 5 (van 20) op.

Vermenigvuldig die gemene.

B. **Probleem:** Vind die KGV van x^3y^2 en x^2y^4

Oplossing: Veranderlikes $x; y$

Hoogste graad $x^3; y^4$

KGV x^3y^4

Lys die veranderlikes in alle terme.

Lys elke veranderlike met die hoogste eksponent.

Vermenigvuldig die veranderlikes met die hoogste graad.

C. **Probleem:** Vind die KGV van $8x^3y^2$ en $20x^2y^4$

Oplossing: KGV $2 \times 2 \times 2 \times 5 \times x^3y^4 = 40x^3y^4$

Volg bloot die proses soos tevore vir die koëffisiënt en die veranderlikes.

Vermenigvuldiging met 1:

As ons 'n getal met een vermenigvuldig, bly dit altyd dieselfde: $x \times 1 = x$.

Om breuke op te tel of af te trek, moet die noemers dieselfde wees. Vermenigvuldig elke term van die algebraïese breuk met $\frac{\text{KGV}}{\text{KGV}}$, ons herskryf die terme as ekwivalente breuke met dieselfde noemer.

$\frac{1}{2} \times \frac{5}{5} = \frac{5}{10}$ want $\frac{5}{5} = 1$, dus is $\frac{1}{2}$ en $\frac{5}{10}$ ekwivalente breuke.

Dieselfde sal geld vir $\frac{1}{a} \times \frac{b}{b} = \frac{b}{ab}$.

Uitgewerkte voorbeeld

Probleem: Vereenvoudig $\frac{a}{2b}+\frac{b}{3a}-\frac{a^2+2b^2}{6ab}$

Oplossing: KGV $2 \times 3 \times a \times b = 6ab$

$\frac{a}{2b}+\frac{b}{3a}-\frac{a^2+2b^2}{6ab}$

Nou vermenigvuldig ons elke term met $\frac{\text{KGV}}{\text{KGV}}$

$=\left(\frac{a}{2b}\times\frac{6ab}{6ab}\right)+\left(\frac{b}{3a}\times\frac{6ab}{6ab}\right)-\left(\frac{a^2+2b^2}{6ab}\times\frac{6ab}{6ab}\right)$

$=\frac{3a^2}{6ab}+\frac{2b^2}{6ab}-\frac{a^2+2b^2}{6ab}$ Gebruik die eienskap $\frac{A\times C}{B\times C}=\frac{A}{B}$ as $B\neq 0$ en $C\neq 0$ om te vereenvoudig.

$=\frac{3a^2+2b^2-(a^2+2b^2)}{6ab}$ Vereenvoudig hakies

$=\frac{3a^2+2b^2-a^2-2b^2}{6ab}$ Tel gelyksoortige terme op

$=\frac{2a^2}{6ab}$ Gebruik die eienskap $\frac{ax}{a}=x$ as $a\neq 0$ om die algebraïese breuk te vereenvoudig

$=\frac{a}{3b}$ if $a\neq 0$ of $b\neq 0$

Oefening

46 Waar moontlik, vereenvoudig die volgende algebraïese breuke en gee die uitgeslote waardes van die veranderlikes:

(a) $\frac{a+1}{2}-\frac{(a-1)}{3}$

(b) $x-\frac{x-y}{2}$

(c) $\frac{2a}{3}+\frac{4a-1}{5}+a$

(d) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$

(e) $\frac{2a+b}{b}-\frac{a-b}{a}$

(f) $\frac{2a+b}{a}-\frac{a-b}{b}$

(g) $1-\frac{a+b}{2a}-\frac{a-b}{3a}$

(h) $\frac{a+1}{ab}+\frac{c-1}{bc}$

(i) $\frac{x+3}{x^2y}-\frac{y-3}{xy^2}$

(j) $\frac{2k-3}{6km}-\frac{3m+2}{9m^2}$

(k) $\frac{x+1}{3x^2}-\frac{x+1}{4x^4}+\frac{x+1}{5x^5}$

(l) $\frac{3a+b}{a^2b}+\frac{a-4b}{a^2b^2}-\frac{a^2+b^2}{a^3b^2}$

Faktorisering is 'n belangrike vaardigheid wanneer ons met algebraïese uitdrukkings werk. Om die KGV van twee terme te vind is ook belangrik. Dus sal ons eers hersiening hiervan doen:

Oefening

47 Vind die kleinste gemene veelvoud (KGV) van die volgende uitdrukkings:

(a) $(x^2 + 5x + 6)$ en $(2x^2 + 7x + 6)$

(b) $(x^2 + x - 6)$ en $(x^2 - 8x + 12)$

(c) $(3x - 6y)$ en $(mx - 2my)$

(d) $(mx + my)$ en $(nx + ny)$

(e) $(ax + 2a)$ en $(bx + 2x)$

(f) $(7a + 21b)$ en $(4a + 12b)$

(g) $(3x + 3y)$ en $(7x + 7y)$

(h) $(9ax^2 + 9bx^2)$ en $(ay^2 + by^2)$

Wenk: Voor ons die KGV kan find, moet ons eers die uitdrukkings faktoriseer.

Uitgewerkte voorbeelde

A. **Probleem:** Vereenvoudig $\frac{6}{3x + 6y} + \frac{3}{2x + 4y}$

Oplossing:

$$\frac{6}{3x + 6y} + \frac{3}{2x + 4y}$$

$$= \frac{6}{3(x + 2y)} + \frac{3}{2(x + 2y)}$$

Haal eers die gemeenskaplike faktore uit.

$$= \frac{2}{(x + 2y)} + \frac{3}{2(x + 2y)}$$

Gebruik die eienskap $\frac{ax}{a} = x$ as $a \neq 0$ is om elke breuk te vereenvoudig

KGV $2 \times (x + 2y) = 2(x + 2y)$.

$$= \left(\frac{2}{(x + 2y)} \times \frac{2(x + 2y)}{2(x + 2y)}\right) + \left(\frac{3}{2(x + 2y)} \times \frac{2(x + 2y)}{2(x + 2y)}\right)$$

Nou kan ons elke term vermenigvuldig met $\frac{\text{KGV}}{\text{KGV}}$

Gebruik die eienskap $\frac{A \times B}{B \times C} = \frac{A}{C}$ as $B \neq 0$ en $C \neq 0$ is om algebraïese breuke te vereenvoudig.

Let op die gebruik van die hakies.

$$= \frac{4}{2(x + 2y)} + \frac{3}{2(x + 2y)}$$

Gebruik die eienskap $\frac{ax}{a} = x$ as $a \neq 0$ is om elke breuk te vereenvoudig.

$$= \frac{4 + 3}{2(x + 2y)}$$

$$= \frac{7}{2(x + 2y)} \text{ as } x \neq 0 \text{ of } y \neq 0$$

Onthou die eksponensiële wette:
$a^m \times a^n = a^{m+n}$
$a^m \div a^n = a^{m-n}$

B. **Probleem:** Vereenvoudig $\frac{ax}{ax^2 + axy} + \frac{2ax + 2bx}{3(y + x)(a + b)}$

Oplossing: Haal eers die gemeenskaplike faktore uit.

$$\frac{ax}{ax^2 + axy} + \frac{2ax + 2bx}{3(x + y)(a + b)}$$

$$= \frac{ax}{ax(x + y)} + \frac{2x(a + b)}{3(x + y)(a + b)}$$

$$= \frac{1}{(x + y)} + \frac{2x}{3(x + y)}$$

KGV $3 \times (x + y) = 3(x + y)$.

$$= \left(\frac{1}{(x + y)} \times \frac{3(x + y)}{3(x + y)}\right) + \left(\frac{2x}{3(x + y)} \times \frac{3(x + y)}{3(x + y)}\right)$$

Ons vermenigvuldig nou elke term met $\frac{\text{KGV}}{\text{KGV}}$

$$= \frac{3}{3(x + y)} + \frac{2x}{3(x + y)}$$

$$= \frac{3 + 2x}{3(x + y)}$$

Oefening Oefen wat jy geleer het

48 Vereenvoudig waar moontlik die volgende algebraïese breuke en gee die uitgeslote waardes van die veranderlikes:

(a) $\frac{12}{6x + 6y} + \frac{1}{2x + 2y}$

(b) $\frac{bx^2}{bx^3 + bx^2y} + \frac{2ax + 2bx}{4(b - a)(a + b)}$

(c) $\frac{r + r^2}{s + sr} - \frac{r^2 + sr}{r^2 - sr}$

(d) $\frac{x}{a + b} + \frac{a - b}{bx - ax}$

(e) $\frac{x + 1}{(a - b)x + a - b} - \frac{4(y - 1)}{(a - b)y - 2a + 2b}$

(f) $\frac{3x(2x - 3) - (3 - 2x)}{3 - 2x} - \frac{18x^3}{9x^3 - 27x^2 + x - 3}$

(g) $\frac{3x + 3}{xy + x + y + 1} + \frac{(y^2 - 4y) + (3y - 12)}{2y - 8}$

(h) $\frac{2ab + 2b^2}{x(a + b) + y(b - a)} + \frac{x - y}{x + y}$

(i) $\frac{2x + 2y + 6}{(x + y)^2 + 3(x + y)} - \frac{3x}{x^2 + xy}$

(j) $\frac{10x^2y^3 + 20x^3y^2}{50x^2y^2} + \frac{x + y}{x - y}$

(k) $\frac{x^2 - y^2}{3x + 3y} + \frac{3ay - 3a}{xy - y}$

(l) $\frac{x^2 - y^2}{x^2 - 2xy + y^2} - \frac{x + y}{y - x}$

Uitgewerkte voorbeeld

Probleem: Vereenvoudig $\frac{x+3}{x^2-2x-15} - \frac{x-7}{x^2-4x-21}$

Oplossing:

$$\frac{x+3}{(x+3)(x-5)} - \frac{x-7}{(x+3)(x-7)}$$

$$= \frac{1}{x-5} - \frac{1}{x+3}$$

$$= \left(\frac{1}{x-5} \times \frac{(x-5)(x+3)}{(x-5)(x+3)}\right) - \left(\frac{1}{x+3} \times \frac{(x-5)(x+3)}{(x-5)(x+3)}\right)$$

$$= \frac{x+3}{(x-5)(x+3)} - \frac{(x-5)}{(x-5)(x+3)}$$

$$= \frac{x+3-(x-5)}{(x-5)(x+3)}$$

$$= \frac{x+3-x+5}{(x-5)(x+3)}$$

$$= \frac{8}{(x-5)(x+3)}$$

Oefening

49 Vereenvoudig die volgende algebraïese breuke waar moontlik en gee die uitgeslote waardes van die veranderlikes:

(a) $\frac{x-3}{x^2-2x-15} - \frac{x-7}{x^2-4x-21}$

(b) $\frac{x-1}{2x+3} + \frac{x+2}{x^2-9x-22}$

(c) $\frac{x+2}{3x-2} + \frac{x^2+15x+56}{x+7}$

(d) $\frac{x^2+12x+35}{x^2+4x-5} - \frac{2x^2-9x-5}{x^2+4x-5}$

(e) $\frac{3xy+6y}{x^2+5x+6} - \frac{2xy-4y}{x^2+2x-8}$

(f) $\frac{x^2+5x}{x^2-5x-50} + \frac{x^3-x^2-30x}{3x^2+18x}$

(g) $\frac{x^2-16x+15}{x^2-13x-30} + \frac{2x+3}{2x^2+5x+3}$

(h) $\frac{x^2-4}{3x-6} - \frac{x+7}{x^2+15x+56}$

(i) $\frac{x^2-y^2}{3x^2+3xy} - \frac{5x+4y}{25x^2-16y^2}$

(j) $\frac{x^2-xy+y^2}{x^3+y^3} + \frac{y+1}{x-1}$

(k) $\frac{x^2+xy+y^2}{3ax^3-3ay^3} + \frac{x+1}{x^2-1}$

(l) $\frac{6ax^3-6ay^3}{2a^2x^2+2a^2xy+2a^2y^2} - \frac{x-1}{y-x}$

2154 TechMaths Afr G10 LB.indb 121 2015/11/25 4:13 PM

4.13 Vermenigvuldig algebraïese breuke

Vermenigvuldig eenvoudige algebraïese breuke

Gebruik die eienskap $\frac{a}{b} \times \frac{x}{y} = \frac{ax}{by}$ as $b \neq 0$ en $y \neq 0$ is, om die algebraïese breuke te vermenigvuldig wat nie faktorisering benodig nie.

Oefeninge Vermenigvuldig algebraïese breuke

50 Voltooi die berekeninge:

(a) $\frac{3}{5} \times \frac{2}{3}$ (b) $\frac{1}{3} \times \frac{6}{7}$ (c) $\frac{9}{4} \times \frac{3}{5}$ (d) $\frac{11}{5} \times \frac{9}{3}$

51 Probeer nou om die volgende algebraïese breuke te vereenvoudig:

(a) $\frac{a^2}{3} \times \frac{6}{a}$ (b) $\frac{a^2}{a} \times \frac{6}{3}$ (c) $\frac{b^3}{ab} \times \frac{a^2}{b}$ (d) $\frac{5c^2}{cd} \times \frac{d^2}{15c}$

Uitgewerkte voorbeeld

Probleem: Vereenvoudig $\frac{3a^3}{ac} \times \frac{6bc}{ab^2}$

Oplossing:

$\frac{3a^2}{c} \times \frac{6c}{ab}$

$= \frac{3a}{1} \times \frac{6}{b}$

$= \frac{18a}{b}$

Oefening Oefen om breuke te vermenigvuldig

52 Vereenvoudig, waar moontlik, die volgende algebraïese breuke en gee die uitgeslote waardes van die veranderlikes:

(a) $\frac{2x^3}{x} \times \frac{x}{2x^2}$ (b) $\frac{-x}{x^2} \times \frac{2y^3}{y}$ (c) $\frac{-2x^5}{6x^3} \times \frac{3x^2}{-4}$ (d) $\frac{4n^2}{m^7} \times \frac{m^5}{-2n^3}$

(e) $\frac{a^2b^2}{-3} \times \frac{b}{b^3}$ (f) $\frac{2m^7}{m^2n^3} \times \frac{n^2}{4}$ (g) $\frac{6}{x^3y^2} \times \frac{-2x^2y^5}{y^2}$ (h) $\frac{5a^3b^2}{7} \times \frac{2a^2b^2}{-10b^5}$

(i) $\frac{m^2n^2}{n^2} \times \frac{8}{4m^2n^3}$ (j) $\frac{13x^5y^7}{y^2} \times \frac{x^3y^2}{2x^2y^2}$ (k) $\frac{a^2b^2}{2a^5b^5} \times \frac{7a^3b^7}{b^2}$ (l) $\frac{16m^2n^3}{2m^5n^7} \times \frac{3m^7n^2}{4m^4n^2}$

Vermenigvuldig algebraïese breuke wat faktorisering vereis

Gebruik die eienskap $\frac{a}{b} \times \frac{x}{y} = \frac{ax}{by}$ as $b \neq 0$ en $y \neq 0$ is, om die algebraïese breuke wat faktorisering vereis, te vermenigvuldig.

Oefeninge Hersien

53 Faktoriseer die volgende:

(a) $x^2 + 4x + 4 - y^2$

(b) $8x^3 + 1$

54 Vereenvoudig die volgende algebraïese breuke:

(a) $\dfrac{a^2 - b^2}{a + b} \times \dfrac{4}{2}$

(b) $\dfrac{x^2 - 9}{(x - 2)^2} \times \dfrac{x^2 - 4x + 4}{x - 3}$

Uitgewerkte voorbeeld

Probleem: Vereenvoudig $\dfrac{x^2 - x - 2}{x^2 + x - 6} \times \dfrac{x^2 + 3x}{x^2 + 3x + 2}$

Oplossing:

$$\frac{(x+1)(x-2)}{(x+3)(x-2)} \times \frac{x(x+3)}{(x+1)(x+2)}$$

$$= \frac{(x+1)}{(x+3)} \times \frac{x(x+3)}{(x+1)(x+2)}$$

$$= \frac{x}{x+2}$$

Oefening Oefening en probleme

55 Vereenvoudig, waar moontlik, die volgende algebraïese breuke en gee die uitgeslote waardes van die veranderlikes:

(a) $\dfrac{3k - 5}{2k + 1} \times \dfrac{6k + 3}{6k - 10}$

(b) $\dfrac{10p - 14}{15p + 20} \times \dfrac{3p + 4}{5p - 7}$

(c) $\dfrac{5a + 35}{a^2 - 25} \times \dfrac{3a + 15}{a^2 - 49}$

(d) $\dfrac{5x + 15}{3x - 12} \times \dfrac{7x + 21}{2x - 8}$

(e) $\dfrac{a^3 - 5a}{-3a - 6} \times \dfrac{4a + 8}{a^2 - 5a}$

(f) $\dfrac{2a}{2a + b} \times \dfrac{2ab + b^2}{6a^2}$

(g) $\dfrac{x^2 - 5x + 6}{x} \times \dfrac{x + 2}{x^2 - 3x}$

(h) $\dfrac{x^2 - xy}{xy + y^2} \times \dfrac{xy - y^2}{x^2 + xy}$

(i) $\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 - 2xy + y^2} \times \dfrac{xy - y^2}{xy + y^2}$

(j) $\dfrac{x^2 - 25a^2}{x^2 - 3ax - 10a^2} \times \dfrac{x^2 - 4a^2}{x^2 + 3ax - 10a^2}$

(k) $\dfrac{a^2 - 4a - 5}{a^3 - 8} \times \dfrac{a^2 + 2a + 4}{a^2 - 4a}$

(l) $\dfrac{3x^3 + 81}{x + 3} \times \dfrac{4}{2x^2 - 6x + 18}$

4.13 Deling van algebraïese breuke

Ons gebruik die multiplikatiewe inverse om twee algebraïese breuke te deel en ons sal algebraïese breuke deel wat nie faktorisering vereis nie.

In wiskunde is ’n multiplikatiewe **inverse** of **resiprook** vir ’n getal x, aangedui deur $\frac{1}{x}$ of x^{-1}, ’n getal wat, wanneer dit met x vermenigvuldig word, dit die **multiplikatiewe identiteit**, 1 gee.

Die multiplikatiewe inverse van ’n breuk $\frac{a}{b}$ is $\frac{b}{a}$.

Vir die multiplikatiewe inverse van ’n reële getal, deel 1 deur die getal.
Die resiprook van 5 is byvoorbeeld $\frac{1}{5}$, en die resiprook van $\frac{1}{4}$ is 1 gedeel deur $\frac{1}{4}$, of 4.

Oefeninge Deling van algebraïese breuke

56 Voltooi die berekeninge:

(a) $\frac{3}{5} \div \frac{3}{2}$ (b) $\frac{1}{3} \div \frac{7}{6}$

57 Probeer nou om die volgende algebraïese breuke te vereenvoudig:

(a) $\frac{a^2}{3} \div \frac{a}{6}$ (b) $\frac{a^2}{a} \div \frac{6}{3}$

Uitgewerkte voorbeeld

Probleem: Vereenvoudig $\frac{3a^3}{ac} \div \frac{ab^2}{6bc}$

Oplossing: Deling is die inverse van vermenigvuldiging, $\frac{a}{b} \div \frac{x}{y} = \frac{a}{b} \times \frac{y}{x}$ as $b \neq 0$ $x \neq 0$ en $y \neq 0$ is.

$= \frac{3a^3}{ac} \times \frac{6bc}{ab^2}$

$= \frac{3a^2}{c} \times \frac{6c}{ab}$ Gebruik die eienskap $\frac{ax}{a} = x$ as $a \neq 0$ is om die algebraïese breuke te vereenvoudig.

$= \frac{3a}{1} \times \frac{6}{b}$ Gebruik die eienskap $\frac{A \times C}{B \times C} = \frac{A}{B}$ as $B \neq 0$ en $C \neq 0$ is om die algebraïese breuke te vereenvoudig.

$= \frac{18a}{b}$ Gebruik die eienskap $\frac{a}{b} \times \frac{x}{y} = \frac{ax}{by}$ as $b \neq 0$ en $y \neq 0$ is om die breuke te vermenigvuldig, mits a, b of $c \neq 0$ is.

Oefening Oefen deling van algebraïese breuke

58 Vereenvoudig, waar moontlik, die volgende algebraïese breuke en gee die uitgeslote waardes van die veranderlikes:

(a) $\frac{2x^3}{x} \div \frac{x}{2x^2}$ (b) $\frac{-x}{x^2} \div \frac{2y^3}{y}$ (c) $\frac{-2x^5}{6x^3} \div \frac{3x^2}{-4}$

(d) $\frac{4n^2}{m^7} \div \frac{m^5}{-2n^3}$ (e) $\frac{a^2b^2}{-3} \div \frac{b}{b^3}$ (f) $\frac{2m^7}{m^2n^3} \div \frac{n^2}{4}$

(g) $\frac{6}{x^3y^2} \div \frac{-2x^2y^5}{y^2}$ (h) $\frac{5a^3b^2}{7} \div \frac{2a^2b^2}{-10b^5}$ (i) $\frac{m^2n^2}{n^2} \div \frac{8}{4m^2n^3}$

(j) $\frac{12x^5y^7}{y^2} \div \frac{x^3y^2}{2x^2y^2}$ (k) $\frac{a^2b^2}{2a^5b^5} \div \frac{7a^3b^7}{b^2}$ (l) $\frac{16m^2n^3}{2m^5n^7} \div \frac{3m^7n^2}{4m^4n^2}$

Gebruik die multiplikatiewe inverse om algebraïese breuke te deel en algebraïese breuke wat faktorisering vereis te deel.

Oefening Deling deur faktorisering te gebruik

59 Faktoriseer die volgende:

(a) $x^2 - 4x + 4$ (b) $x^2 - 9$ (c) $a^2 - b^2$

Vereenvoudig nou die volgende algebraïese breuke:

(d) $\frac{a^2 - b^2}{a + b} \times \frac{4}{2}$ (e) $\frac{x^2 - 9}{(x-2)^2} \times \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 3}$

Uitgewerkte voorbeeld

Probleem: Vereenvoudig $\frac{x^2 - x - 2}{x^2 + x - 6} \div \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + 3x}$

Oplossing:

$$\frac{x^2 - x - 2}{x^2 + x - 6} \div \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + 3x}$$

$$= \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + x - 6} \times \frac{x^2 + 3x}{x^2 + 3x + 2}$$

$$= \frac{(x+1)(x-2)}{(x+3)(x-2)} \times \frac{x(x+3)}{(x+1)(x+2)}$$

$$= \frac{1}{1} \times \frac{x}{x+2}$$

$$= \frac{x}{x+2}$$

Oefening Oefen deling deur faktorisering te gebruik

60 Vereenvoudig, waar moontlik, die volgende algebraïese breuke en gee die uitgeslote waardes van die veranderlikes:

(a) $\frac{6k - 10}{2k + 1} \div \frac{3k - 5}{2k + 1}$ (b) $\frac{10p - 14}{5p - 7} \div \frac{15p + 20}{3p + 4}$ (c) $\frac{5a + 35}{a^2 - 25} \div \frac{a - 1}{a - 5}$

(d) $\frac{5x + 15}{3x - 12} \div \frac{3 - x}{x - 4}$ (e) $\frac{a^3 - 5a^2}{-3a - 6} \times \frac{-3}{a^2} \div \frac{a^2 - 5a}{a^3 - 5a^2}$ (f) $\frac{3a}{2a + b} \times \frac{2ab + b^2}{b} \div \frac{6a^2}{2a}$

(g) $\dfrac{x^2-5a^2}{3a^2} \div \dfrac{x}{x+2} \times \dfrac{a^2}{x^2-3x}$

(h) $\dfrac{7}{xy+y^2} \div \dfrac{x^2-xy}{xy-y^2} \times \dfrac{4}{x^2+xy}$

(i) $\dfrac{x^2-2xy+y^2}{xy-y^2} \div \dfrac{x^2-y^2}{y} \times \dfrac{-x}{xy+y^2}$

(j) $\dfrac{x^2+3ax-10a^2}{x^2-4a^2} \div \dfrac{x^2-25a^2}{x^2-3ax-10a^2} \times \dfrac{x-a}{3x-3a}$

(k) $\dfrac{a^2-4a-5}{a^3-8} \times \dfrac{a^2-9}{a+3} \div \dfrac{a^2-4a}{a^2+2a+4}$

(l) $\dfrac{3x^3+81}{x+3} \times \dfrac{6}{x^2-6x+18} \div \dfrac{x-3}{2x}$

As A, B, X en Y veelterme is, is:

$\dfrac{A}{B} \times \dfrac{X}{Y} = \dfrac{AX}{BY}$ as $B \neq 0$ en $Y \neq 0$

$\dfrac{A}{B} \div \dfrac{X}{Y} = \dfrac{A}{B} \times \dfrac{Y}{X} = \dfrac{AY}{BX}$

as $B \neq 0$, $X \neq 0$ en $Y \neq 0$

$\dfrac{A \times C}{B \times C} = \dfrac{A}{B}$ as $B \neq 0$ en $C \neq 0$

$\dfrac{AX}{A} = X$ as $A \neq 0$

4.14 Opsomming

- **Wiskundige notasie** is 'n skryfsisteem wat ons gebruik vir die optekening van begrippe in wiskunde. Hierdie notasie maak gebruik van simbole of simboliese uitdrukkings, met die doel om 'n bepaalde betekenis te hê.
- Ons verwys soos volg na algebraïese begrippe: Die bekende waarde word die **konstante** genoem, die onbekende waarde word die **veranderlike** genoem, en die handelinge wat ons met hierdie waardes uitvoer, noem ons die **bewerking**.
- Ons verwys na die proses waarmee ons die uitdrukking voltooi deur 'n waarde aan die veranderlike toe te ken, as **evaluasie van die uitdrukking**.
- Algebraïese uitdrukkings wat dieselfde numeriese waarde vir dieselfde waarde van x het, maar wat anders lyk, is **ekwivalente uitdrukkings**.
- Die dele wat opgetel word, word die **terme van die uitdrukking** genoem. As optel en/of aftrek die laaste stap in die evaluasie van 'n algebraïese uitdrukking is, word die uitdrukking 'n **som-uitdrukking** genoem.
- Die dele wat vermenigvuldig word, word die **faktore van die uitdrukking** genoem. As vermenigvuldiging die laaste stap in die evaluasie van 'n algebraïese uitdrukking is, word die uitdrukking 'n **produk-uitdrukking** genoem. As deling die laaste stap in die evaluasie van 'n algebraïese uitdrukking is, word die uitdrukking 'n **kwosiënt-uitdrukking** genoem.
- Uitdrukkings met meer as een term word **veelterme** genoem. Een term is 'n **eenterm**, twee terme is 'n **tweeterm**, en drie terme is 'n **drieterm**.
- Ons maniupleer uitdrukkings deur die optel en aftrek van **gelyksoortige terme** om uitdrukkings te vereenvoudig. Gelyksoortige terme is terme wat dieselfde lettersimbole het, met dieselfde eksponent.
- Ons gebruik die **kommutatiewe eienskap** van getalle om gelyksoortige terme saam te groepeer. Ons gebruik die **assosiatiewe eienskap** van getalle om gelyksoortige terme op

2154 TechMaths Afr G10 LB.indb 126 2015/11/25 4:13 PM

te tel of af te trek. Ons gebruik die **distributiewe eienskap** van getalle om veelterme te vermenigvuldig of uit te brei.

- Vermenigvuldiging is herhaalde optel, en eksponente is herhaalde vermenigvuldiging.
- Die proses van die skryf van 'n som-uitdrukking (veelterm) as 'n produk, word **faktorisering** genoem. Dit is die inverse van uitbreiding. Elke deel van 'n produk word 'n **faktor van die uitdrukking** genoem. Faktorisering beteken dat 'n veelterm as 'n ekwivalente eenterm geskryf word.
- **Koëffisiënt** is 'n getal of simbool vermenigvuldig met 'n veranderlike of onbekende grootheid in 'n algebraïese term.
- $a^2 - b^2$ word die verskil tussen twee kwadrate genoem. $(a - b)(a + b)$
- $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ en $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ word die som en verskil van derdemagte genoem.
- 'n **Algebraïese breuk** is 'n breuk met 'n veranderlike in sy teller en noemer.

4.16 Konsolideringsoefeninge

1 Stel die volgende voor
   (i) op 'n getallelyn
   (ii) in intervalnotasie
   (iii) in versamelingskeurdernotasie.

   (a) $-5 < x \leq 2$ (b) $0 \geq x > -4$ (c) $-1 > x > -6$
   (d) $2 < x < 8$ (e) $m \neq 3$ (f) $k > 1$

2 Bereken die waardes van die volgende waar $x = 3$ is.

   (a) $(x + 3)(x - 2)$ (b) $2x + 5$ (c) $2x(4x - 1)$
   (d) $x^2 - 5x - 6$ (e) $(x + 5)(x - 6)$ (f) $(x + 6)^2$

3 Vereenvoudig die volgende:

   (a) $\frac{ab}{b}$ (b) $\frac{a}{ab}$ (c) $\frac{15y}{3}$
   (d) $\frac{x^2 - 1}{x - 1}$ (e) $\frac{24q + 6}{4q + 1}$ (f) $\frac{3(x + y)^2}{9(x + y)^3}$
   (g) $\frac{12ab}{24a^2b}$ (h) $\frac{x^6}{(x + y)^2}$

4 As $x = 2$, $y = -1$ en $z = -3$ is, wat sal die waarde van die volgende wees?

   (a) $\frac{x^3y^4}{z^2}$ (b) $\frac{-3x^4y^2z^3 + 6x^2yz^2}{9xyz - 3x^2y^2z}$

5 Vereenvoudig die volgende algebraïese breuke:

(a) $\frac{3y - y}{y}$ (b) $\frac{3y + y^2}{y}$ (c) $\frac{a + a}{2}$

(d) $\frac{b - b}{b}$ (e) $\frac{5z - 2z}{5z^3}$ (f) $\frac{x - 3}{3}$

6 Vereenvoudig:

(a) $\frac{5x - 15}{5}$ (b) $\frac{2y^2 + 6xy}{2y(y + 3x)}$ (c) $\frac{a(a - 5) - 2a(a - 5)}{1 - a}$

(d) $\frac{b^2 - 4b + 4}{(x - 2)^2}$ (e) $\frac{1 - x - y}{1 - (x + y)^2}$ (f) $\frac{(p - q)^2 - 8q^2}{4p^2 - 16pq}$

7 (a) Wat sal die breedte van 'n reghoek wees as die oppervlakte $q^2 - 4q + 4$ is, en die lengte $(q - 2)^2$ is?

(b) Wat sal die breedte van die reghoek wees as $q = 4$ is?

8 Vereenvoudig die volgende:

(a) $\frac{4a^2}{12a} \times \frac{3}{a}$ (b) $\frac{27b^3}{-9b} \times \frac{4b^2}{-16b}$ (c) $\frac{x^5}{5y^3} \times \frac{15y^4}{2x^3}$

(d) $\frac{3a^3b^2}{c^5} \times \frac{c^3}{9ab}$ (e) $\frac{a}{b^2} \times c$ (f) $\frac{a^2}{b} \div c^3$

(g) $\frac{2x^3y^2}{6x} \div \frac{3xy}{x^2y}$ (h) $\frac{4pq^3}{2} \div \frac{5p^3q^4}{15p}$ (i) $\frac{ab}{c} \div \frac{a^3}{bc^2} \div abc$

(j) $\frac{3x^2y}{6y^3} \times \frac{4y^6z^5}{2z} \div \frac{2z^3}{x^4y^2}$

9 Vereenvoudig die volgende.

(a) $\frac{a^2 + a - 12}{4a^2 - 16a} \div \frac{a^3 + 4a^2}{a^2 - 16} \times \frac{1}{a + 4}$ (b) $\frac{3x - 2y}{x - 2y} \div \frac{6x + 2y}{x - 2y} \div \frac{2x - 3y}{3x - y}$

(c) $\frac{2x^2 - 4x - 6}{3x^2} \div \frac{x^2 - x - 6}{3(x - 1)^2}$ (d) $\frac{x^3 + y^3}{2x^3 - x^2y - 3xy^2} \div \frac{x^3y - x^2y^2 + xy^3}{4x^4 - 9x^2y^2}$

10 Vereenvoudig.

(a) $\frac{2}{x} + \frac{3y - 2}{xy}$ (b) $1 + \frac{a - 3}{4}$ (c) $\frac{1}{3a} - \frac{3}{6a} + \frac{5}{9a}$

(d) $\frac{4x}{x^2 - 9} - \frac{2}{x + 3} - \frac{1}{3 - x}$ (e) $5 + \frac{p}{q}$ (f) $\frac{y + 1}{y} - \frac{y + 3}{4y}$

11 Faktoriseer die volgende uitdrukkings:

(a) $x^2 - 16$ (b) $x^2 - 8x + 12$ (c) $x^2 - x - 6$

(d) $p^2 + 2p - 3$ (e) $x^2 - 25$ (f) $y^2 - 24p + 144$

(g) $ac + bc + bd + ad$ (h) $m(x - y) + 3(y - x)$ (i) $(x - 1) - a(1 - x)$

(j) $3x - 2ym - mx + 6y$ (k) $x^2y - x^2 - xy^2 + xy$ (l) $1 - 3x - 3xy - y^2$

5 Vergelykings en ongelykhede

In hierdie hoofstuk gaan jy:

- liniêre vergelykings en kwadratiese vergelykings deur faktorisering hersien
- gelyktydige liniêre vergelykings met twee veranderlikes oplos
- notasies (interval, versamelingskeurdernotasie, getallelyn, vesamelings) hersien
- eenvoudige liniêre ongelykhede oplos (en oplossings grafies aandui)
- formules (tegnies-verwant) manipuleer, woordprobleme oplos wat liniêre, kwadraatvergelykings, of gelyktydige liniêre vergelykings bevat, oplos

5.1 Maak gereed om te leer

Werk met die getalleverhoudings

Wanneer ons met veranderlikes werk, moet ons onthou hoe ons met getalle werk. Ons gebruik presies dieselfde reëls vir veranderlikes.

Uitgewerkte voorbeeld

Die getalsinne in elk van die voorbeelde hieronder, is herrangskik. Lees die voorbeelde aandagtig deur en bespreek:

A. Wat het ons met elke vergelyking gedoen om die wyse waarop dit geskryf is, te verander?

B. Bly die vergelykings in elke geval waar?

$8 + 5 = 13$

$8 = 13 - 5$

$5 = 13 - 8$

$6 \times 4 = 24$

$6 = \frac{24}{4}$

$4 = \frac{24}{6}$

$9 \times 3 + 7 = 34$

$9 \times 3 = 34 - 7$

$9 = \frac{34 - 7}{3}$

$3 = \frac{34 - 7}{9}$

5.2 Werk met vergelykings

'n Vergelyking in x beteken 'n vergelyking wat die veranderlike x bevat. Dit is 'n uitnodiging om alle moontlike waardes van x te bereken sodat die twee gegewe uitdrukkings aan elke kant van die gelykaanteken, aan mekaar gelyk is. Enige getal wat ons gebruik om x mee te vervang wat die gelykheid waar maak, word 'n **oplossing** genoem.

Liniêre vergelykings in een veranderlike

Om 'n vergelyking in een veranderlike op te los, veronderstel ons dat ons weet wat die oplossing is. Ons rangskik dan die vergelyking om te bereken wat die veranderlike is.

Hier is 'n voorbeeld waar ons die letters a, b, en c gebruik as die bekende getalle:

$x + b = c$

$x = c - b$

$ax + b = c$

$ax = c - b$

$x = \frac{c - b}{a}$

$ax = b$

$x = \frac{b}{a}$

Uitgewerkte voorbeelde

Los op vir x. Toets jou antwoord in elke geval.

A. Probleem: $x + 4 = 7$

Oplossing: $x = 7 - 4$

$x = 3$ Toets: $3 + 4 = 7$

B. Probleem: $2x = 5$

Oplossing: $x = \frac{5}{2}$ Toets: $2\left(\frac{5}{2}\right) = 5$

$x = 2\frac{1}{2}$

C. Probleem: $2x + 5 = 11$

Oplossing: $2x = 11 - 5$

$x = \frac{11 - 5}{2}$

$x = \frac{6}{2}$

$x = 3$ Toets: $2 \times 3 + 5 = 6 + 5 = 11$

Oefeninge

1 Los op vir x en toets jou antwoord in elke geval.

(a) $x + 2 = 0$ (b) $x + 2 = -4$ (c) $2x = 0$

(d) $2x = -4$ (e) $\frac{1}{3}x = 9$ (f) $x - 2 = -4$

2 Los op vir x in elk van die volgende:

(a) $4x + 1 = 9$ (b) $4x + 1 = -7$ (c) $4x + 1 = 2$

(d) $4x + 1 = 0$ (e) $4x + 1 = -2$ (f) $4x + 1 = 4$

(g) $4x + 1 = 1$ (h) $4x + 1 = -11$

Meer vergelykings

Liniêre vergelykings in die vorm $Ax + B = Cx + D$; (A, B, C, en D is konstantes, en $C \neq A$.) Ons veronderstel dat x 'n getal is, sodat $Ax + B = Cx + D$, dan:

$$Ax - Cx = D - B$$

$$(A - C)x = D - B$$

$$x = \frac{D - B}{A - C}$$

2154 TechMaths Afr G10 LB.indb 131 2015/11/25 4:13 PM

Uitgewerkte voorbeelde

A. Probleem: Los op vir x: $3x + 4 = 2x + 1$

Oplossing: $3x + 4 = 2x + 1$

$$3x - 2x = 1 - 4$$

$$(3 - 2)x = 1 - 4$$

$$x = \frac{1 - 4}{3 - 2}$$

$$x = \frac{-3}{1} = -3$$ Toets: $3(-3) + 4 = -9 + 4 = -5$, and $2(-3) + 1 = -6 + 1 = -5$

Dus $x = -3$ is die oplossing vir $3x + 4 = 2x + 1$

B. Probleem: Los op vir x: $\frac{x}{5} + 1 = 2x - 8$

Oplossing: $\frac{x}{5} + 1 = 2x - 8$

$$\frac{x}{5} - 2x = -8 - 1$$

$$\left(\frac{1}{5} - 2\right)x = -8 - 1$$

$$x = \frac{-8 - 1}{\frac{1}{5} - 2}$$

$$x = \frac{-9}{\frac{-9}{5}}$$

$$x = 5$$ Toets: $x = \frac{5}{5} + 1 = 2$, en $2(5) - 2 = 10 - 8 = 2$

Dus $x = 5$ is die oplossing vir $\frac{x}{5} + 1 = 2x - 8$

Oefening

3 Los op vir x.

(a) $5x = 3x + 2$

(b) $5x - 1 = 3x + 13$

(c) $-7x + 8 = 2 - 13x$

(d) $x + 3 = 2x - 4$

(e) $\frac{x}{3} + 4 = 2x - 1$

(f) $\frac{x}{3} - 7 = 9 - x$

(g) $\frac{x}{2} + 10 = 85 - 7x$

(h) $5 + \frac{x}{4} = -2x + \frac{1}{2}$

Oplos van vergelykings met breuke

Soms doen 'n liniêre uitdrukking homself voor as 'n rasionale uitdrukking soos $\frac{x-3}{3x+1} = 2$. In gevalle soos dié, moet ons seker maak dat ons nie besig is om deur 0 te deel nie. Ons neem daarom slegs die waardes in ag wat verseker dat die deler nie 0 is nie. Ons moet met ander woorde 'n beperking op die deler plaas, sodat dit nie gelyk is aan 0 nie.

Uitgewerkte voorbeeld

Probleem: Los op vir x in $\frac{x-3}{3x+1} = 2$, waar $x \in \mathbb{Q}$

Oplossing: $\frac{x-3}{3x+1} = 2$, beperking vir die vergelyking om waar te wees $3x + 1 \neq 0$, $\therefore\ x \neq -\frac{1}{3}$

$x - 3 = 2(3x + 1)$

$x - 3 = 6x + 2$

$-5x = 5$

$x = -1$ Toets: $\frac{-1-3}{3(-1)+1} = \frac{-4}{-2} = 2$

Ook: $-1 \neq -\frac{1}{3}$ (beperking)

$\therefore\ x = -1$ is die oplossing vir $\frac{x-3}{3x+1} = 2$

Oefening

4 Los op vir x, waar $x \in \mathbb{Q}$ (dui die beperking op die deler aan).

(a) $\frac{x+1}{2} = 6$ (b) $\frac{2}{x+1} = 6$

(c) $\frac{3x+1}{x} = 2$ (d) $\frac{5x-2}{6x+3} = 3$

(e) $\frac{9x-3}{x-1} = 3$ (f) $\frac{x-1}{x+1} = -2$

5.3 Gelyktydige vergelykings

Liniêre vergelykings met twee veranderlikes

Ons sê dat 'n paar liniêre vergelykings soos $2x + y = 5$ en $3x + 2y = 4$ 'n stelsel van liniêre vergelykings of gelyktydige vergelykings in x en y is.

Om gelyktydige vergelykings op te los, moet ons al die geordende getalpare vind wat oplossings van albei vergelykings is. So 'n geordende paar word die oplossing van die stelsel genoem.

Uitgewerkte voorbeeld

Probleem: Ondersoek die vergelyking $2x + y = 5$. Watter getalpaar/getalpare van x en y maak die vergelyking waar?

Daar is talle pare, soos (3; –1); (0; 5); (2; 1); $\left(\frac{5}{2}; 0\right)$; (6; –7); $\left(\frac{3}{2}; 2\right)$. Ondersoek in die vergelyking $x + 2y = 4$ watter getalpaar/getalpare van x en y, maak die vergelyking waar? Weereens, daar is talle sulke pare, sommige daarvan word hieronder gegee:

$\left(1; \frac{1}{2}\right)$; (0; 2); $\left(\frac{1}{3}; \frac{3}{2}\right)$; (6; –7); (–2; 5); (4; –4)

Van die twee stelle geordende getalpare is (6;–7) algemeen tot albei vergelykings. Ons kan dus sê dat (6; –7) ’n oplossing is vir albei vergelykings.

A. Los x en y gelyktydig op:

Los op vir x en y: $2x + y = 5$ en

$3x + 2y = 4$

Noem die eerste vergelyking (1) en die tweede vergelyking (2):

$2x + y = 5$ ....(1)

$3x + 2y = 4$ ....(2)

Skryf vergelyking (1) in terme van y:

$y = 5 - 2x$ ....(3)

Ons kan nou hierdie vergelyking vir y vervang in vergelyking (2):

$$3x + 2(5 - 2x) = 4$$
$$3x + 10 - 4x = 4$$
$$3x - 4x = 4 - 10$$
$$-x = -6$$
$$x = 6$$

Om die waarde van y te bereken, vervang die oplossing hierbo, $x = 6$, in (3):

$y = 5 - 2(6)$

$y = -7$

Die oplossing is (6; –7).

B. Los vir *x* en *y* gelyktydig op:

Los op vir x en y: $2x + y = 5$ en

$3x + 2y = 4$

Noem die eerste vergelyking 1, en die tweede vergelyking 2:

$2x + y = 5$ ....(1)

$3x + 2y = 4$ ....(2)

Ons gaan nou vergelyking (1) met –2 vermenigvuldig sodat die grootheid van die koëffisiënt van y in vergelyking (1) die optel inverse van die koëffisiënt van y in vergelyking (2) is. Vergelyking (1) word:

$-4x - 2y = -10$ ....(3)

Indien ons nou vergelyking (2) en (3) bymekaar optel, verdwyn die terme wat y insluit:

$$\begin{array}{rl} 3x + 2y &= 4 \\ \underline{-4x - 2y} &\underline{= -10} \\ -x &= -6 \\ \therefore\ x &= 6 \end{array}$$

Ons gebruik die oplossing, $x = 6$ en vervang dit in vergelyking (2) om die waarde van y te bereken:

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 4 \\ 3(6) + 2y &= 4 \\ 18 + 2y &= 4 \\ 2y &= 4 - 18 \\ 2y &= -14 \\ y &= \frac{-14}{2} \\ y &= -7 \end{aligned}$$

Die oplossing is (6; –7)

Die **optel inverse** van 'n getal a, is die getal wat, wanneer dit by a getel word, dit gelyk is aan nul, bv. $2 + (-2)$ en $-2y + 2y$.

Oefening

5 Los die volgende gelyktydige vergelykings op:

(a) $5x + 3y = 8$ en $9x - y = 9$

(b) $6x + 11y = 1$ en $5x - y = 1$

(c) $x + 4y = 11$ en $2x + 3y = 7$

(d) $-3x + 2y = 1$ en $7x - 6y = -1$

(e) $\frac{1}{2}x + 3y = 8$ en $5x + 6y = 18$

(f) $-x + 10y = 5$ en $-6x - y = 30$

(g) $0{,}8x + 1{,}2y = 14$ en $0{,}1x - 0{,}6y = 7$

(h) $\frac{2}{5}x - \frac{y}{3} = 3$ en $5x - 3y = 16$

5.4 Liniêre ongelykhede

’n Mens kom meer dikwels as wat jy dink uitdrukkings van ongelykhede teë. Byvoorbeeld, voordat ’n program op televisie vertoon word, word daar dikwels ouderdomsbeperkings van wie die program mag kyk of nie mag kyk nie, aangegee. As inleiding tot hierdie gedeelte, dink na oor die situasie wat hieronder geskets word:

(a) Indien die ouderdomsbeperking van ’n bepaalde program op televisie as 13 jaar aangegee word, is dit moontlik om ’n lys te maak van al die moontlike ouderdomme van mense wat dit mag kyk?

(b) Amantha speel sokker vir die onder 17 Nasionale Dames Sokkerspan. Hoe oud is Amantha?

Oefeninge Hersiening

6 Vir die uitdrukking $2x + 1$, maak ’n lys van 10 moontlike waardes van x:

(a) indien $x \in \mathbb{R}$

(b) indien $x \in \mathbb{Z}$

(c) indien $x \in \mathbb{N}$

(d) indien $x \in \mathbb{N}_0$

(e) indien $x \in \mathbb{Q}$

7 (a) Kan die versameling getalle hieronder deel wees van die versameling reële getalle ($\mathbb{R}$)? Verduidelik waarom jy so sê.

$\left\{-6; -3{,}6; -2\frac{1}{5}; 0; 3; 5{,}18; 10\frac{3}{5}\right\}$

(b) Kan die versameling getalle hieronder deel vorm van die versameling van heelgetalle ($\mathbb{Z}$)? Verduidelik jou antwoord.

$\{-6; -5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 58; 600\}$

(c) Kan die versameling getalle hieronder deel wees van die versameling natuurlike getalle ($\mathbb{N}$)? Verduidelik jou antwoord.

$\{-20; -10; 0; 1; 2; 60; 416\}$

(d) Kan die versameling getalle hieronder deel uitmaak van die versameling van heelgetalle ($\mathbb{N}_0$)? Verduidelik jou antwoord.

$\{0; 100; 200; 300; 600\}$

(e) Kan die versameling getalle hieronder deel uitmaak van die versameling van rasionale getalle ($\mathbb{Q}$)? Verduidelik jou antwoord.

$\left\{-152; \frac{-13}{200}; 0; \sqrt[3]{125}; 100\right\}$

Verwys na die tabel hieronder om oefeninge 8 tot 10 te beantwoord.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$2x + 1$	-5	-3	-1	1	3	5	7

2154 TechMaths Afr G10 LB.indb 136 2015/11/25 4:13 PM

8 Die tabel hierbo verskaf inligting met betrekking tot die uitdrukking $2x + 1$, waar x 'n reële getal is. Verwys na die tabel om die vrae hieronder te beantwoord.

(a) Vir watter waarde(s) van x is $2x + 1 = 1$?

(b) Vir watter waarde(s) van x is $2x + 1 = -5$?

(c) Vir watter waarde(s) van x is $2x + 1 = 3$?

9 (a) Vir watter waarde(s) van x is $2x + 1$ groter as -1? $2x + 1 > -1$

(b) Vir watter waarde(s) van x is $2x + 1$ groter as 1? $2x + 1 > 1$

(c) Vir watter waarde(s) van x is $2x + 1$ groter as -5? $2x + 1 > -5$

(d) Vir watter waarde(s) van x is $2x + 1$ kleiner as -1? $2x + 1 < -1$

(e) Vir watter waarde(s) van x is $2x + 1$ kleiner as 1?

(f) Vir watter waarde(s) van x is $2x + 1$ kleiner as -3?

10 (a) Vir watter waarde(s) van x is $2x + 1 = 0$?

(b) Vir watter waarde(s) van x is $2x + 1$ groter as 0?

11 (a) Wys die tabel al die waardes waarvoor $2x + 1$ groter as 1 is?

Probeer $x = 10$ of $x = 807$.

(b) Wys die tabel al die waardes waarvoor $2x + 1$ kleiner as 1 is?

Probeer $x = -10$, of $x = -501$.

Lys moontlike waardes

Maak 'n lys van al die moontlike waardes van k wat aan die ongelykheid $0 < k \leq 2$ voldoen, k is 'n heelgetal.

Die teken $\leq$ beteken dat k kleiner kan wees as 2 of gelyk kan wees aan 2.

Die teken $<$ beteken k kan groter wees as 0.

Dus, daar is slegs twee sulke heelgetalle: $\{1; 2\}$

Oefening

12 Skryf al die heelgetalle neer wat aan elkeen van die volgende ongelykhede voldoen:

(a) $4 < k < 9$

(b) $-1 < k < 1$

(c) $-5 < k < 2$

(d) $-5 < k \leq 2$

(e) $-5 \leq k < 2$

(f) $-5 \leq k \leq 2$

> beteken 'groter as'
< beteken 'kleiner as'
≥ beteken 'groter as of gelyk aan'
≤ beteken 'kleiner as of gelyk aan'

Versamelingskeurdernotasie

Dit is nie altyd moontlik om 'n lys te maak van al die moontlike waardes in 'n versameling oplossings nie, soos byvoorbeeld wanneer daar 'n oneindige aantal oplossings is.

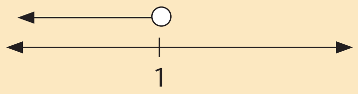
Die beste ding wat ons kan doen, is om te sê hoe ons die lys kan saamstel. Daarvoor gebruik ons versamelingskeurdernotasie.

Uitgewerkte voorbeelde

A. Probleem: $\{x \in \mathbb{Z} \mid x < 0\}$ beteken die versameling van alle heelgetalle vir x om minder as 0 te wees

Oplossing: Dit kan geskryf word as $\{x \in \mathbb{Z} \mid x < 0\} = \{-1, -2, -3, \ldots\}$

Ons kan dit aandui deur van die getallelyn gebruik te maak.



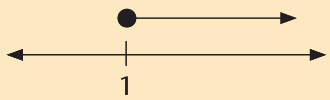
Gebruik die intervalnotasie: $(-\infty; 1)$

B. Probleem: $\{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq 1\}$ beteken alle reële getalle sodat x groter of gelyk is aan 1.

Oplossing: Dit kan geskryf word as $\{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq 1\} = \left\{1; 1\frac{1}{2}; 2; \ldots\right\}$

Ons kan dit ook op ander maniere voorstel, byvoorbeeld:

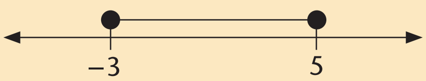
(a) Deur die getallelyn te gebruik:



(b) Deur gebruik te maak van intervalnotasie: $[1; \infty)$

C. Probleem: Stel die versameling getalle wat hieronder op die getallelyn voorkom voor in:

(a) versamelingskeurdernotasie (b) intervalnotasie



Oplossing:

(a) $\{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq 5\}$ (b) $[-3; 5]$

Oefeninge

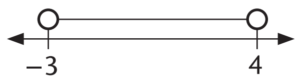
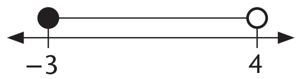
13 S = {–1, 0, 1, 2, 3, ...} S is ’n versameling van heelgetalle.

(a) Stel S voor in ’n versamelingskeurdernotasie.

(b) Stel S voor deur intervalnotasie te gebruik.

(c) Gebruik die getallelyn om S voor te stel.

14 Teken die volgende tabel oor en voltooi dit. Een voorbeeld is reeds vir jou gedoen.

Woorde	Intervalnotasie	Versamelingskeurdernotasie	Getallelyn
A. Versameling van reële getalle tussen –3 en 4	$(-3; 4)$	$\{x \mid -3 < x < 4; x \in R\}$	
	$(-3; 4]$		
		$\{x \mid -3 \leq x \leq 4; x \in \mathbb{R}\}$	
			

15 Oorweeg die stelling: ‘Alle reële getalle van nul tot en insluitend 10’. Watter stelling(s) hieronder beskryf die situasie die beste?

(a) $0 \leq x < 10$

(b) $(0; 10]$

(c) $0 < x < 10$

(d) $[x \in \mathbb{Z} \mid 0 < x \leq 10]$

16 Hoe lees jy die stelling, $[x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 7]$?

(a) die getalle 3, 4, 5, 6?

(b) ’n getal tussen 2 en 7?

(c) ’n reële getal tussen 2 en 7, insluitend sowel 2 as 7?

(d) ’n getal groter as 2 maar kleiner as 7?

17 Wat is die verskil tussen

(a) (2; 7] en [2; 7]? (b) (2; 7) en {2; 7} (c) [2; 7) en (2; 7)

18 Stel elk van bogenoemde in oefening 17 (a) – (c) voor, deur gebruik te maak van:

(a) versamelingskeurdernotasie (b) die getallelyn

19 Watter waardes van x verteenwoordig elke ongelykheid hieronder? Verduidelik dit in woorde en wys dit ook op 'n getallelyn.

(a) $5 < x < 8$ (b) $x < 5$ of $x > 8$

20 (a) Indien die ongelykhede $x \geq 2$ en $x \leq 2$ albei waar is, beskryf die moontlike waardes vir x.

(b) Dui op 'n getallelyn die moontlike waardes van x vir hierdie situasie aan. Verduidelik jou antwoord.

5.5 Oplos van liniêre ongelykhede

Om 'n ongelykheid op te los, is om al die moontlike waardes van x te bereken wat een uitdrukking in x groter as, kleiner as, of gelyk aan, die ander te maak.

Uitgewerkte oefeninge

Oplossing van 'n vergelyking

Probleem:

Los op vir x, $x \in \mathbb{R}$

Oplossing:

$$\begin{aligned} 5x - 4 &= 3x + 2 \\ 5x - 3x &= 2 + 4 \\ 2x &= 6 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Toets: $5 \times 3 - 4 = 11$ en $3 \times 3 + 2 = 11$

$\therefore x = 3$ is 'n oplossing van $5x - 4 = 3x + 2$

Oplos van 'n ongelykheid

Probleem:

Los die ongelykheid op: $5x - 4 > 3x + 2$, $x \in \mathbb{R}$

Oplossing:

$$\begin{aligned} 5x - 4 &> 3x + 2 \\ 5x - 3x &> 4 + 2 \\ 2x &> 6 \\ x &> 3 \end{aligned}$$

Toets: met die oplossing $x > 3$, kom ons veronderstel dat $x = 4$

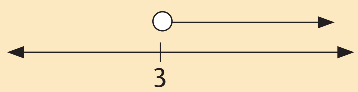
$5 \times 4 - 4 = 16$

$3 \times 4 + 2 = 14$

$16 > 14$

$\therefore x > 3$ is 'n oplossing van $5x - 4 > 3x + 2$

Grafies:



Oplos van 'n ongelykheid

Probleem: Los die ongelykheid op: $5x - 4 \geq 3x + 2,\ x \in \mathbb{R}$

Oplossing:

$$5x - 4 \geq 3x + 2$$
$$5x - 3x \geq 4 + 2$$
$$2x \geq 6$$
$$x \geq 3$$

Toets: met die oplossing $x \geq 3$, kom ons veronderstel dat $x = 4$

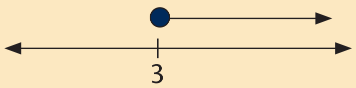
$5 \times 4 - 4 = 16$

$3 \times 4 + 2 = 14$

$16 \geq 14$

$\therefore\ x \geq 3$ is 'n oplossing van $5x - 4 \geq 3x + 2$

Grafies:



Die oplos van ongelykhede verskil nie van die oplossing van vergelykings nie.

Oefeninge

21 Los die ongelykhede hieronder op waar x 'n reële getal is. Stel die oplossing ook grafies voor.

(a) $5x < 10$
(b) $-5x \leq 10$
(c) $5x \geq -10$
(d) $3x \leq -6$
(e) $7x > -14$
(f) $-14x < -7$

22 Los die ongelykhede hieronder op waar x 'n reële getal is. Stel die oplossing ook grafies voor.

(a) $3x + 1 \leq 4$
(b) $2x + 1 > 5x - 2$
(c) $4x + 6 < 2x$
(d) $2x - 6 \geq 5$
(e) $x + 1 \leq -1$
(f) $-\frac{1}{2}x - 2 < \frac{1}{2}$

5.6 Oplossing van kwadratiese vergelykings deur faktorisering

Uitgewerkte voorbeeld

A. Probleem: Los die vergelyking $x^2 - 4x + 4 = 0$ op.

Oplossing: Om die vergelyking $x^2 - 4x + 4 = 0$ op te los, skryf dit as 'n produk van liniêre faktore.

Wanneer jy twee getalle of twee uitdrukkings vermenigvuldig, kan die antwoord slegs gelyk wees aan 0 indien één van die getalle of uitdrukkings 0 is, of indien albei 0 is.

$$(x - 2)(x - 2) = 0$$

Dus, $x - 2 = 0 \therefore x = 2$

Ons los nou die twee liniêre vergelykings op. Ons moet seker maak of ons inderdaad 'n oplossing het deur die waardes van x in die vergelyking te vervang.

Indien $x = 2$, $x^2 - 4x + 4 = 2^2 - 4 \times 2 + 4 = 4 - 8 + 4 = 0$, $\therefore x = 2$ is die oplossing.

B. Probleem: Los op vir x indien $x^2 + 3x = 0$

Oplossing: $x^2 + 3x = 0$

$$x(x + 3) = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x + 3 = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x = -3$$

Toets: Indien $x = 0$; $x^2 + 3x = 0^2 + 3(0) = 0$

Toets: Indien $x = -3$; $x^2 + 3x = (-3)^2 + 3(-3) = 9 - 9 = 0$

Die oplossing is $x = 0$ of $x = -3$.

C. Probleem: Los op vir x indien $x^2 - 121 = 0$

Oplossing: $x^2 - 121 = 0$

$(x - 11)(x + 11) = 0$ Dit is die verskil van twee kwadrate.

$$x - 11 = 0 \text{ of } x + 11 = 0$$

$$\therefore x = 11 \text{ of } x = -11$$

Toets: Indien $x = 11$, $x^2 - 121 = 11^2 - 121 = 0$

Toets: Indien $x = -11$, $x^2 - 121 = (-11)^2 - 121 = 0$

Die oplossing is $x = 11$ of $x = -11$.

2154 TechMaths Afr G10 LB.indb 142 2015/11/25 4:13 PM

Oefening

23 Los die vergelykings hieronder op; x is 'n reële getal.

(a) $x^2 - 9x + 20 = 0$
(b) $x^2 + 6x + 8 = 0$
(c) $x^2 - 10x + 21 = 0$
(d) $x^2 + 4x - 12 = 0$
(e) $x^2 - 2x - 35 = 0$
(f) $x^2 + 6x + 5 = 0$
(g) $x^2 - 1 = 0$
(h) $x^2 - 16 = 0$
(i) $x^2 - 81 = 0$
(j) $x^2 - 25 = 0$
(k) $x^2 - 169 = 0$
(l) $x^2 - 225 = 0$
(m) $x^2 + 5x = 0$
(n) $x^2 - 5x = -14$
(o) $x^2 - x = 0$
(p) $x^2 + 3x - 4 = 0$
(q) $x^2 + 3x = 10$
(r) $-6x = -x^2 + 27$

5.7 Onderwerp van die formule

Ons gebruik formules om kwantiteite met mekaar in verband te bring. Formules verskaf reëls sodat, indien ons die waarde van 'n bepaalde kwantiteit ken, ons die waardes van die ander kan bereken.

Uitgewerkte voorbeeld

Probleem: Maak die kwantiteit wat in hakies aangedui word, die onderwerp van die formule:

$v = u + at$ [u]

Oplossing: $v = u + at$

$u + at = v$

$u = v - at$

Om 'n kwantiteit die onderwerp van die formule te maak, beteken om 'n formule te herrangskik sodat ons die waarde van een van die kwantiteite kan bereken. Dit is dieselfde as om 'n vergelyking op te los.

Oefening

24 Herrangskik elk van die volgende formules om die kwantiteit wat in hakies aangedui is, die onderwerp van die formule te maak.

(a) $v = u + at$ [t]
(b) $v = u + at$ [a]
(c) $I = \frac{V}{R}$ [V]
(d) $I = \frac{V}{R}$ [R]
(e) $C = \frac{5(F - 32)}{9}$ [F]
(f) $A = \pi r^2$ [r]
(g) $A = \pi(R - r)$ [R]
(h) $R = \frac{PQ}{P + Q}$ [Q]
(i) $R = \frac{PQ}{P + Q}$ [P]
(j) $E = mc^2$ [m]
(k) $E = mc^2$ [c]
(l) $P = I^2R$ [R]
(m) $P = I^2R$ [I]

2154 TechMaths Afr G10 LB.indb 143 2015/11/25 4:13 PM

5.8 Woordprobleme

Wanneer ons woordprobleme oplos, is dit ’n goeie idee om die volgende hulpmiddels in gedagte te hou:

- Identifiseer die kwantiteite betrokke in ’n gegewe scenario. Gebruik letter simbole vir die onderskeie kwantiteite wat jy geïdentifiseer het.
- Skep ’n vergelyking wat die verwantskap tussen die kwantiteite in die betrokke situasie aandui.
- Los die vergelyking op.
- Maak seker dat jy inderdaad ’n oplossing het.

Uitgewerkte voorbeeld

Probleem: Die som van die twee getalle is 45. Een getal is vier maal die waarde van die ander.

Oplossing: Laat een van die getalle x wees

Die ander getal is $4x$.

$$x + 4x = 45$$
$$5x = 45$$
$$x = 9$$

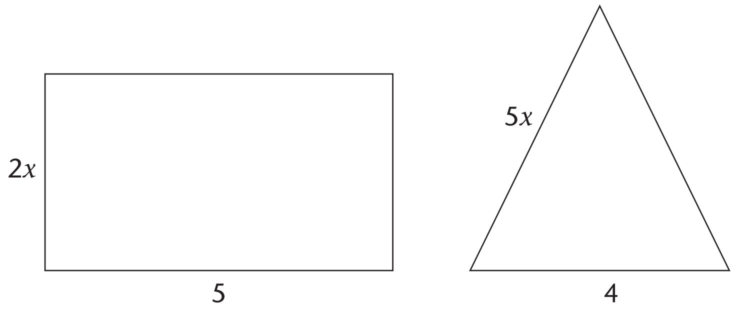
Toets: $9 + 4 \times 9 = 9 + 36 = 45$

Die getalle is dus 9 en 36.

Oefeninge

25 Die reghoek en die gelykbenige driehoek hieronder het albei dieselfde omtrek.

Bereken die waarde van x.



26 Die som van drie opeenvolgende onewe getalle is 45. Wat is die getalle?

2154 TechMaths Afr G10 LB.indb 144 2015/11/25 4:13 PM

27 Twee ouers gaan saam met hul twee kinders na ’n skoolkonsert. Gedurende pouse ontmoet hulle ’n buurman wat vier van sy kinders saamgebring het. Uit hulle gesprek blyk dit dat elke familie dieselfde totale bedrag vir die konsertkaartjies betaal het. Indien die kinders se kaartjies R10 elk gekos het, hoeveel het elke volwassene se kaartjie gekos?

28 Daar is twee getalle. Die som daarvan is 24. Een getal is drie maal dié van die ander een. Wat is die getal?

29 By ’n konsert is daar 100 kaartjies verkoop. Kaartjies vir volwassenes kos R150, kinders se kaartjies kos R75. ’n Somtotaal van R12 225 is ingesamel. Hoeveel kaartjies van elke tipe is verkoop?

30 ’n Toets bevat 21 vrae met ’n totaal van 150 punte. Die toets bestaan uit veelvoudigekeusevrae van 4 punte elk en opsteltipe vrae van 15 punte elk. Hoeveel vrae van elke soort bevat die toets?

31 Die lengte van ’n reghoekige hoenderhok is 2 meter meer as sy breedte. Die oppervlakte van die reghoek is 10 vierkante meter. Wat is die afmetings van die hoenderhoek?

32 Die produk van twee opeenvolgende heelgetalle is 42. Bereken die heelgetalle.

33 Een besending van allooi A word gemaak deur 3 ton geraffineerde chroom-erts met 5 ton geraffineerde vanadiumerts te smelt.

Een besending van allooi B word gemaak deur 2 ton geraffineerde chroom-erts met 6 ton geraffineerde vanadiumerts te smelt.

(a) Hoeveel van elke soort erts is nodig vir 5 besendings van allooi A plus 3 besendings van allooi B?

(b) Indien 37 ton chroom-erts, en 38 ton vanadiumerts beskikbaar is, hoeveel besendings van elke soort allooi kan vervaardig word?

34 Die lengte van ’n metaalstaaf A in cm, word aangegee in die formule $13{,}4 + 0{,}023t$, waar t die temperatuur in grade Celsius is. Die lengte van die metaalstaaf B word aangegee as $18{,}6 + 0{,}026t$. As die afstand tussen die eindpunte 1,4 cm van mekaar af is by 3 °C, teen watter temperatuur sal die eindpunte aan mekaar raak?

5.9 Opsomming

- ’n **Vergelyking** is ’n gelykheid tussen getalle. Om ’n vergelyking met een veranderlike op te los, is dit nodig om die vergelyking te rangskik sodat ons die veranderlike kan bereken.
- Ons los liniêre vergelykings in die vorm $Ax + B = Cx + D$ op deur x die onderwerp van die vergelyking te maak, mits A nie gelyk is aan C nie.
- Waar oplossing van vergelykings breuke insluit, moet ons seker maak dat ons nie deur 0 deel nie. Dit doen ons deur slegs daardie waardes in aanmerking te neem waarvoor die deler nie 0 is nie.
- Om gelyktydige vergelykings op te los, moet ons al die geordende pare getalle wat oplossings van albei vergelykings is, vind. Ons noem hierdie geordende pare die **oplossing van die stelsel**.
- Om ’n ongelykheid op te los, is om al die moontlike waardes van die veranderlike te bereken wat een uitdrukking in x groter as, kleiner as, of gelyk aan, die ander maak.
- Om kwadratiese vergelykings op te los, maak ons gebruik van faktorisering. Jy skryf dit as ’n produk van liniêre faktore. Wanneer jy twee getalle of twee uitdrukkings vermenigvuldig, kan die uitkoms slegs gelyk wees aan 0 indien een van die getalle of uitdrukkings 0 is, of wanneer albei 0 is.
- Om die kwantiteit die **onderwerp van die formule** te maak, beteken dat ons die formule herrangskik om die waarde van een van die kwantiteite te bereken.

5.10 Konsolideringsoefeninge

1 Los op vir x:

(a) $11 + x = 5$ (b) $x - 3 = 10$ (c) $2x = 7$

(d) $3x = 5 + 2$ (e) $4x - 1 = 2$ (f) $\frac{1}{2}x = 9$

(g) $11x = 0$ (h) $4x + 2 = 10$

2 Los op vir x:

(a) $7x = 2x + 3$ (b) $6x - 2 = 3x + 15$ (c) $-5 - 3x = 4x + 7$

(d) $x - 1 = 3x + 2$ (e) $\frac{2x}{3} + 5 = 3x - 1$ (f) $7 - \frac{x}{2} = 12 + x$

(g) $\frac{3x}{2} + 4 = \frac{x}{5} - 5$ (h) $-9 - \frac{5}{2x} = 2x - 2$

3 Los op vir x, waar $x \in Q$ (stel die beperking op die deler):

(a) $\frac{x+2}{3} = 6$ (b) $\frac{2}{x-1} = 4$ (c) $\frac{4x-3}{x} = 5$

(d) $\frac{3x+2}{7x-3} = 4$ (e) $\frac{3x+9}{2x-4} = 1$ (f) $\frac{x-1}{x+1} = -2$

4 Los die volgende gelyktydige vergelykings op:

(a) $7x - 2y = 4$ en $3x + 2y = 6$ (b) $5x + 6 = 2y$ en $x - 3y = 4$

(c) $-2x - 8 = 5y$ en $-2y + 6x = 3$ (d) $\frac{3}{4}x + 2y = 2$ en $7x - 5 = 2y$

(e) $0{,}9x - 3 = 1{,}6y$ en $0{,}2x + 6y = 1$

5 Skryf al die heelgetalle neer wat elke ongelykheid bevredig:

(a) $6 < k < 8$ (b) $-2 < k \leq 3$

(c) $-4 \leq k < 1$ (d) $0 \leq k \leq 5$

(e) $1 < k < 4$ (f) $-3 \leq k < 2$

6 M = {–2, –1, 0, 1, 2, ...} M is ’n versameling heelgetalle.

(a) Druk M uit in versamelingskeurdernotasie.

(b) Druk M uit as in intervalnotasie.

(c) Druk M uit op ’n getallelyn.

7 Watter stelling verteenwoordig alle reële getalle vanaf nul, tot by en insluitend 10?

(a) $0 \leq x < 10$

(b) (0; 10]

(c) $0 < x < 10$

(d) $[x \in Z \mid 0 < x \leq 10]$

8 Los die ongelykhede hieronder op, waar x ’n is reële getal is; stel dan die oplossings grafies voor.

(a) $6x < 12$

(b) $-4x \leq 12$

(c) $3x > 9$

(d) $3x \leq -6$

(e) $7x > 21$

(f) $-9 \geq 6x$

(g) $4x + 3 \leq 5$

(h) $3x - 1 > -2x + 5$

(i) $8x + 4 \leq 3x$

(j) $2x + 6 \leq 5$

(k) $x - 1 > 1$

(l) $-\frac{1}{4}x + 2 < \frac{1}{2}$

9 Los die vergelykings hieronder op, x is ’n reële getal.

(a) $x^2 - 7x + 12 = 0$

(b) $x^2 + 6x + 8 = 0$

(c) $x^2 - 9 = 0$

(d) $x^2 - 4x - 12 = 0$

(e) $x^2 - 7x = 0$

(f) $x^2 + 7x = 0$

(g) $x^2 - x = 0$

(h) $x^2 + 6x + 5 = 0$

(i) $x^2 + 25 = 0$

10 Herrangskik die volgende formules sodat die kwantiteit , gegee in hakkies, die onderwerp van die formule word.

(a) $y = u + at$ [a]

(b) $v = u + ut$ [t]

(c) $I = \frac{V}{R}$ [R]

(d) $I = \frac{V}{R}$ [V]

(e) $R = \frac{PQ}{P + Q}$ [Q]

(f) $A = \pi r^2$ [r]

(g) $P = I^2R$ [I]

(h) $E = mc^2$ [m]

(i) $A = \pi (R - r)$ [r]

6 Trigonometrie

Hierdie hoofstuk handel oor 'n baie belangrike groep funksies wat ons **trigonometriese funksies** noem. Die deel van wiskunde wat met hierdie funksies van wiskunde te make het, word **trigonometrie** genoem.

- Jy het dalk al trigonometriese funksies in jou tegniese vakke toegepas. Indien wel, weet jy *wat* hierdie funksies doen. Jy is egter dalk onseker oor *hoe* en *hoekom* hulle dit doen. Enigiets wat jy nie oor hulle verstaan nie, sal vir jou duidelik word namate jy deur hierdie hoofstuk werk. Dit is baie belangrik om terug te gaan na die plekke waar jy trigonometrie gebruik het om seker te maak dat jy *verstaan hoe* en *hoekom* die funksies gewerk het.

In hierdie hoofstuk gaan jy leer dat:

- die ooreenkomstige sye van gelykvormige reghoekige driehoeke in dieselfde verhouding is (NB: dit is gewoonlik waar vir alle gelykvormige veelhoeke)
- in reghoekige driehoeke verbind trigonometriese funksies inset-skerphoeke met uitset-lengteverhoudings van die sye van die driehoek
- in die Cartesiese vlak vestig trigonometriese funksies die verband tussen insethoeke van alle groottes en verhoudings, ook bekend as kwosiënte, wat koördinate insluit

In hierdie hoofstuk gaan jy leer:

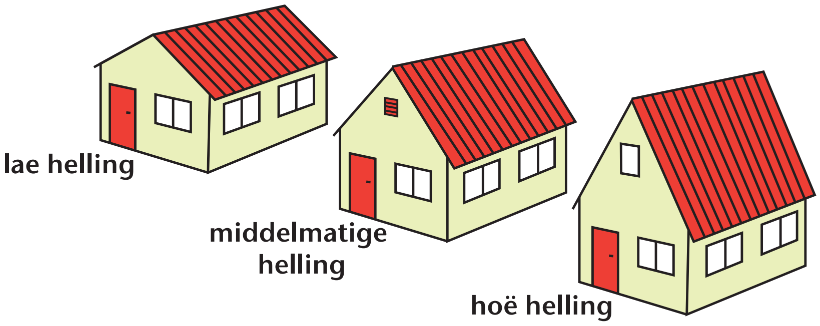
- om inset- en uitsetwaardes van trigonometriese funksies te bepaal deur diagramme, afmetings en berekeninge te gebruik
- om trigonometrie te gebruik om vergelykings op te los, asook probleme wat met hoeke, lengtes of koördinate te doen het
- om grafieke, diagramme en algebra te gebruik om trigonometriese funksies voor te stel.

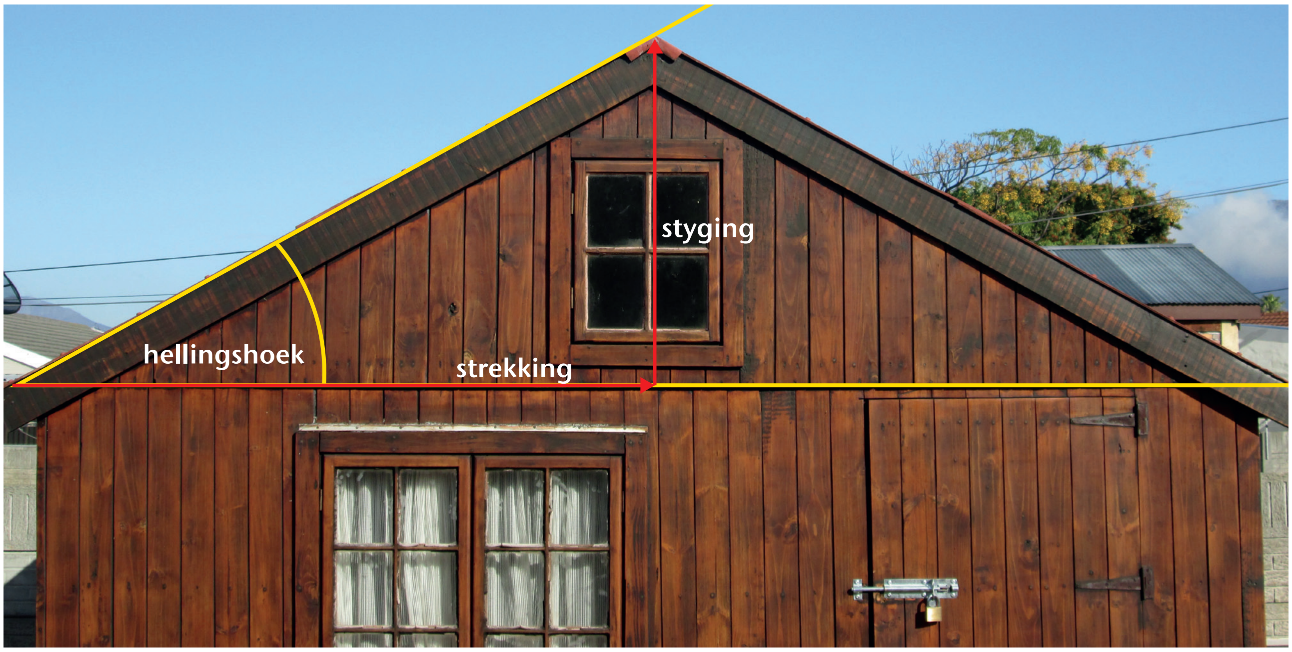
Hou in gedagte dat om trigonometrie te verstaan en dit effektief as 'n hulpmiddel te kan gebruik, jou as 'n tegniese persoon sal bemagtig.

2154 TechMaths Afr G10 LB.indb 149 2015/11/25 4:13 PM

6.1 Bekendstelling van twee situasies

Dakhelling





Die helling van 'n dak is 'n aanduiding van hoe steil die dak is. Helling kan op twee maniere gemeet word, as:

- 'n hoek, gemeet in grade of radiale, of
- 'n helling, 'n dimensielose verhouding van vertikale styging tot horisontale strekking.

'n Belangrike wiskundige vraag:
Hoe kan ons omskakel tussen die helling as 'n hoek en die helling as 'n *styging* : *strekking*-verhouding?

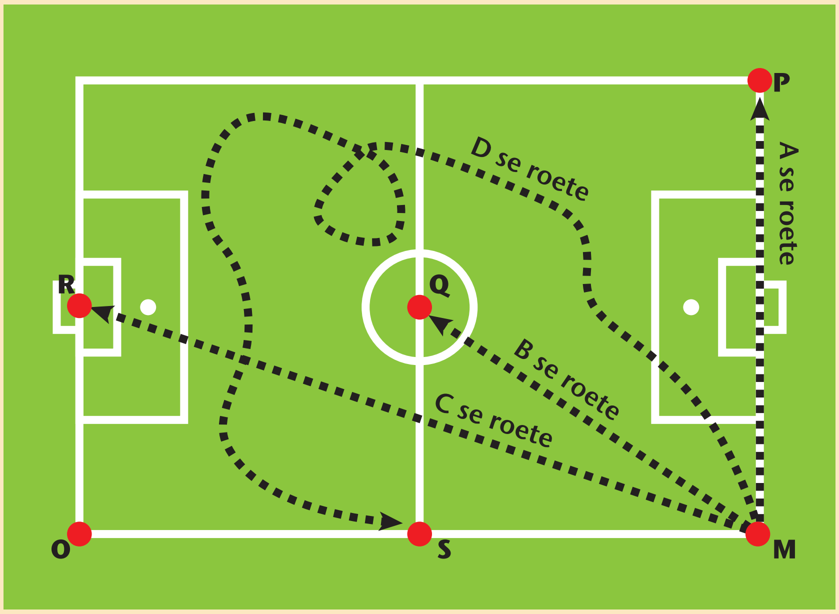
Ons sal die bogenoemde vraag aanspreek soos wat ons deur die hoofstuk werk. In die proses, sal ons ook nuwe wiskunde leer.

6.2 Hersiening van hoeke, lengtes, lengteverhoudings en gelykvormigheid

Vergelyking van hoeke en lengtes

Voorbeeld Hoeke en lengtes

Muvhuso staan by posisie O op 'n sokkerveld:



Vier van haar vriende, A, B, C en D, beweeg vanaf posisie M langs die roetes soos hierbo getoon.

Maak seker dat jy saamstem met die volgende soos vanuit haar posisie by O gesien:

- C eindig die verste van haar beginposisie by M.
- B het die kortste afstand afgelê, m.a.w. B se roete het die kortste lengte.
- A en B het deur dieselfde hoek beweeg. Vanuit haar posisie by O gesien, is die rigting van hulle beginposisie dieselfde en is die rigting van hulle eindposisie dieselfde.
- Die verandering in die rigting van die posisie van C is 90°, soos vanuit haar posisie by O gesien.
- D se roete is beslis die langste. Maar die rigting van sy eindposisie soos gesien vanuit haar posisie by O, is dieselfde as die rigting van sy beginposisie; dus kan die hoekverskil as 0° gesien word vanuit haar posisie by O.

2154 TechMaths Afr G10 LB.indb 151 2015/11/25 4:13 PM

Lengteverhoudings

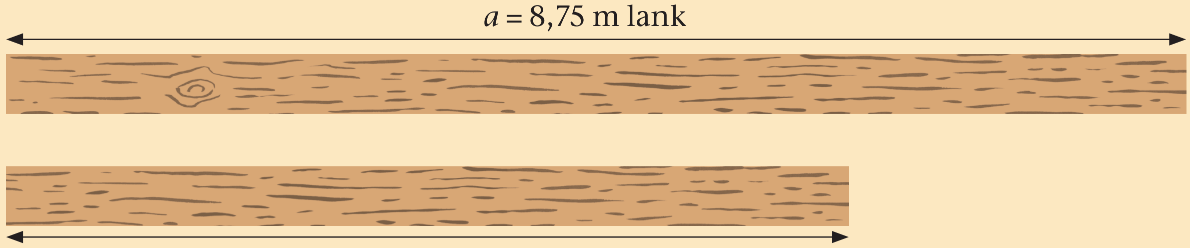
'n **Verhouding** is een manier om twee waardes te vergelyk. Verhoudings wys ons hoeveel keer groter of kleiner een afmeting in vergelyking tot 'n ander afmeting is. Verhoudings is **dimensieloos**, m.a.w. hulle het geen eenheid nie.

In trigonometrie is ons veral geïnteresseerd in lengteverhoudings in reghoekige driehoeke.

Daar is nog 'n manier om twee afmetings met mekaar te vergelyk, deur die **verskil** tussen hul waardes te bepaal. 'n Verskil dui aan *hoeveel groter of kleiner* een waarde in vergelyking met die ander is. Verskille het dieselfde eenheid as die twee waardes.

Voorbeeld Lengteverhouding

Houtbalke: balk P het 'n lengte van a en balk Q se lengte is b.



Die verhouding van die lengte van balk P tot die lengte van balk Q kan soos volg geskryf word:

In verhouding notasie: $a:b = 8{,}75:6{,}25$

As 'n *heelgetal verhouding*: $8{,}75 \div 0{,}25 = 35$ en $6{,}25 \div 0{,}25 = 25$, dus $a:b = 35:25$

Eenvoudigste heelgetal verhouding: 5 is die grootste gemene deler van 35 en 25.
Dus $a:b = 7:5$. Ons lees dit as a is tot b soos 7 tot 5 is.

In rasionale vorm (kwosiënt vorm): $\frac{a}{b} = \frac{8{,}75}{6{,}25} = \frac{7}{5}$

Ons kan die rasionale vorm na desimale vorm verander, want $7 \div 5 = 1{,}4$. Dan is $\frac{a}{b} = 1{,}4$.

Desimale vorm is baie nuttig. Dit wys dat balk P 1,4 keer langer as balk Q is. Ons kan ook die verhouding as $a:b = 1{,}4:1$ skryf deur verhouding notasie te gebruik.

Ons kan ook die **resiproke verhouding** weergee, naamlik die verhouding van die lengte van balk Q tot die lengte van balk P:

In verhouding notasie as $b:a = 5:7 = 1:1{,}4 = 0{,}71:1$

In rasionale vorm en in desimale vorm as $\frac{b}{a} = \frac{6{,}25}{8{,}75} = \frac{5}{7}$.

Dit wys dat die lengte van balk Q die breuk 0,71 van die lengte van balk P is.

Let wel: Balk P is 2,50 m langer as balk Q. Dit is NIE 'n verhouding stelling nie. Dit is 'n *verskil stelling*. Balk M met lengte 7,50 m is ook 2,50 m langer as balk N met lengte 5,0 m. Maar die verhouding van die lengtes van balk M en balk N is 7,5:5 = 3:2 = 1,5:1. Balk M is dus 1,5 keer langer as balk N, wat nie dieselfde is as vir balk P en balk Q nie, waar dit 1,4:1 is.

Reghoekige driehoeke: die dakhelling

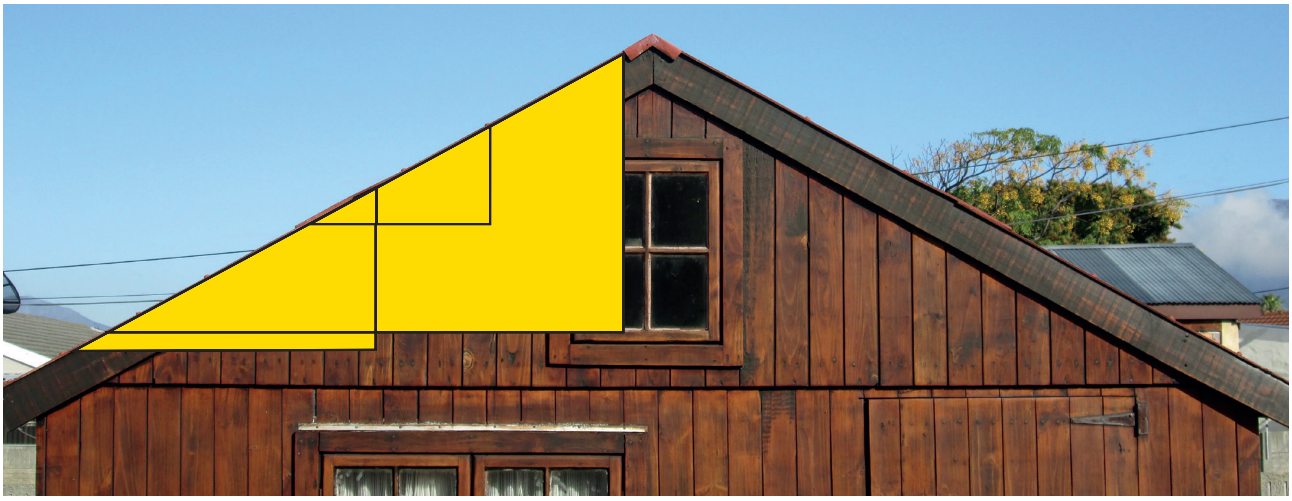
’n Baie belangrike vaardigheid wat jy in trigonometrie moet aanleer, is om die verskuilde reghoekige driehoeke in situasies te kan raaksien. Wanneer jy dit eers baasraak, is sake redelik voor-die-hand-liggend.

Ons begin met die dakhelling situasie, die skuinste of helling van ’n dak.

Dakmakers gebruik twee maniere om die helling (skuinste) van ’n dak te beskryf:
- Die hellingshoek
- Die *styging* : *strekking*-verhouding.

Is hierdie twee ekwivalent, met ander woorde, op ’n sekere manier dieselfde? Is daar verskillende maniere om dieselfde ding uit te druk?

Kyk na die volgende gewelspits van die gebou in die dakhelling situasie:

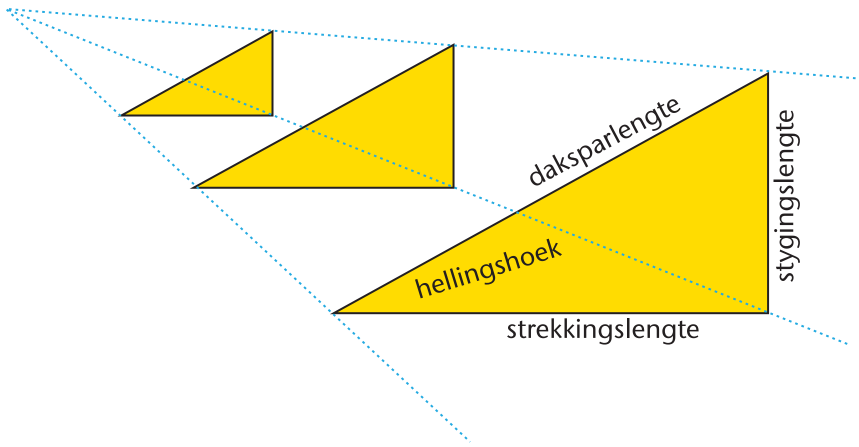


Drie geel driehoeke is oor die prent geteken. Hulle skuinssye lê al met die helling van die dak langs. Die oorblywende sye is horisontaal (parallel met die grond) en vertikaal (reguit op van die grond af).

Vir ’n dakhelling word die horisontale sy die strekkingslengte genoem, die vertikale sy die stygingslengte en die skuinssy die daksparlengte. Ons kan hierdie drie driehoeke voorstel as projeksies van mekaar deur ’n verdwynpunt te gebruik en te verseker dat die ooreenkomstige sye parallel aan mekaar is:

Let wel: Ons sal die term ‘daksparlengte’ gebruik om die afstand tussen twee punte al langs die helling van die dak aan te dui wat ooreenstem met die spesifieke styging en strekking waarna ons kyk, en *nie slegs* om na die lengte van die daksparre as sodanig te verwys nie.

2154 TechMaths Afr G10 LB.indb 153 2015/11/25 4:13 PM



Let wel: Die driehoeke is almal op die vlak van die bladsy. Dit is 'n 2-D diagram, nie 'n 3-D diagram nie.

Die drie ooreenkomstige skerphoeke is ewe groot, en ook gelyk aan die hellingshoek van die dak. Wat kan jy sê omtrent die ander drie ooreenkomstige skerphoeke?

Die stygings-, strekkings- en daksparlengtes van die drie driekhoeke is nie dieselfde nie.

Oefeninge

1 Gebruik die geel driehoeke op die foto hierbo vir hierdie oefening. Meet die drie hellingshoeke sorgvuldig, tot die naaste graad. Meet die lengtes van die drie sye van elk van die drie driehoeke tot die naaste millimeter. Wat kan gesê word omtrent die:

(a) hellingshoek van die driehoeke?

(b) die 'strekkingslengte', die 'stygingslengte' en die 'daksparlengte' van die driehoeke?

(c) verhouding van styging tot strekking, styging tot 'daksparlengte' en strekking tot 'daksparlengte' in elke driehoek in verhouding vorm en in rasionale vorm?

2 Konstrueer jou eie stel gelykvormige reghoekige driehoeke. Teken ten minste drie. Meet al die hoeke en sye, en bepaal die drie verhoudings genoem in (c) vir elke driehoek. Kry jy die resultate wat jy verwag het?

Hier is nog ’n manier om dieselfde drie gelykvormige driehoeke voor te stel:

Maak seker dat jy met die volgende stellings saamstem:

- Die groen en blou driehoeke is projeksies van die rooi driehoek deur die verdwyningspunt, geleë by die hoekpunt van die hellingshoek.
- Dit is duidelik dat die driehoeke dieselfde hellingshoek het.
- Die ‘daksparlengtes’ is die skuinssye wat op dieselfde lyn parallel met die helling van die dak lê.
- Die ‘strekkings’ is op dieselfde horisontale lyn, die onderste rand van die gewelplanke.
- Die ‘stygings’ is almal vertikaal en parallel aan mekaar en die lang sye van die gewelplanke.

Iets belangriks en nuttig omtrent verhoudings: Verhoudings tree op as vermenigvuldigers. As ons sê die hellingsverhouding $\frac{\textit{styging}}{\textit{strekking}} = 0{,}67$, bedoel ons dat die styging 0,67 van die strekking is. Dus, wanneer ons 10 cm horisontaal ‘strek’, ‘styg’ die dak vertikaal met 6,7 cm. Indien die strekking 25 cm is, sal die styging $0{,}67 \times 25$ cm = 16,75 cm wees, ens. Ons sê dat die verhouding ’n vermenigvuldiger, of vermenigvuldigingsfaktor, of ’n skaalfaktor is, omdat ons die strekking daarmee vermenigvuldig om die styging te kry.

Maak seker dat jy die volgende vrae met vertroue kan beantwoord voordat jy verder gaan:

- Iemand teken ’n vierde reghoekige driehoek met dieselfde hellingshoek as dié van die dak op die foto. Is hierdie reghoekige driehoek gelykvormig aan die drie reghoekige driehoeke op die foto?
- Is die lengteverhoudings van ooreenkomstige sye vir alle moontlike reghoekige driehoeke wat dieselfde hellingshoek het, dieselfde?
- Iemand teken twee gelykvormige reghoekige driehoeke. Sal die twee pare ooreenkomstige nie-regte hoeke in die twee driehoeke ewe groot wees?

Oefeninge Meet hellings

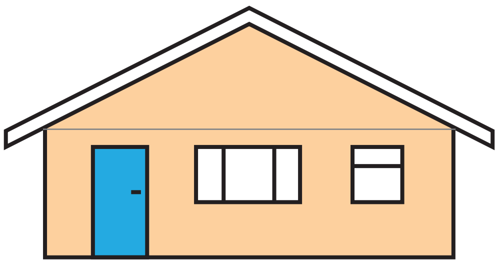
3 Die volgende diagramme stel deursnit-aansigte van geboue met staandakke voor. Voor jy verder gaan, rangskik die hellings volgens toenemende grootte.

Neem nou die nodige afmetings direk op die diagramme en skryf dan die helling van die dak neer:

- as 'n hoek
- as 'n verhouding van *styging* : *strekking* met strekking = 10 lengte-eenhede
- as 'n desimale getal.

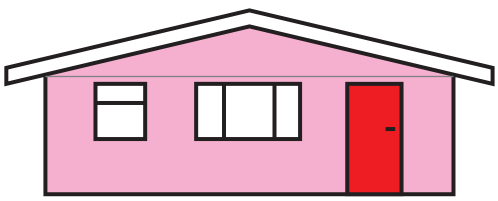
Let wel: Wanneer ons van ooreenkomstige hoeke en sye praat, bedoel ons hoeke en sye wat in ooreenkomstige posisies in twee verskillende driehoeke is. Indien die twee driehoeke gelykvormig is, is die twee langste sye in ooreenkomstige posisies, asook die twee middelgrootte hoeke, die twee grootste hoeke, die twee kortste sye, ens. Kyk ook na die afdelings oor kongruensie en gelykvormigheid in Hoofstuk 8.

(a)

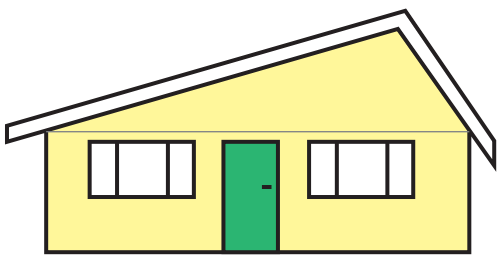


(b)

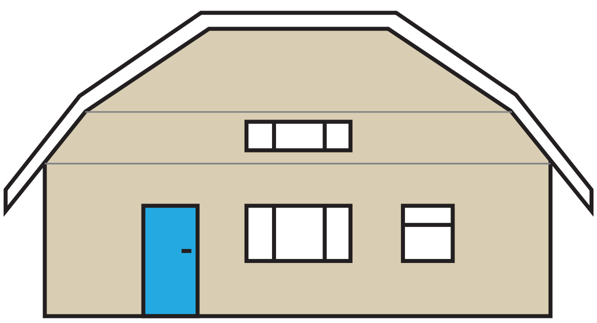
(c)



(d)



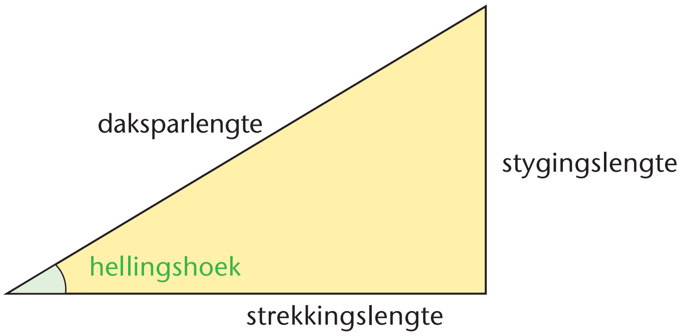
(e)



(f) Wat is die helling van die vertikale mure van die huise?

6.3 Oorskakeling tussen hellingshoeke en verskillende daklengteverhoudings met die sinus-, kosinus- en tangensfunksies

Ons gaan ses wiskundige funksies gebruik. Soos jy sal opmerk, kan hulle gebruik word om daklengtes en hellingshoeke te bepaal.



Die **sinusfunksie** met die hellingshoek as inset, gee as uitset die verhouding van die stygingslengte en daksparlengte van die dak, met die verhouding

stygingslengte : daksparlengte $= \dfrac{\textit{stygingslengte}}{\textit{daksparlengte}}$

$$\sin \textit{hellingshoek} = \frac{\textit{stygingslengte}}{\textit{daksparlengte}}$$

Die **kosinusfunksie** met die hellingshoek as inset, gee as uitset die verhouding van die strekkingslengte en daksparlengte van die dak, met die verhouding

strekkingslengte : daksparlengte $= \dfrac{\textit{strekkingslengte}}{\textit{daksparlengte}}$

$$\cos \textit{hellingshoek} = \frac{\textit{strekkingslengte}}{\textit{daksparlengte}}$$

Die **tangensfunksie** met die hellingshoek as inset, gee as uitset die verhouding van die stygingslengte en strekkingslengte (hellingsverhouding) van die dak, met die verhouding

stygingslengte : strekkingslengte $= \dfrac{\textit{stygingslengte}}{\textit{strekkingslengte}}$

$$\tan \textit{hellingshoek} = \frac{\textit{stygingslengte}}{\textit{strekkingslengte}}$$

As jy die drie funksie-definisies hierbo sorgvuldig beskou, sal jy opmerk dat hulle elkeen 'n verhouding van drie eienskappe van die dakhelling is, dus kan spesifieke waardes bereken word. As jy byvoorbeeld 'n hellingshoek en 'n stygingslengte het, dan kan die daksparlengte sowel as die strekkingslengte bereken word deur die sinus- en tangensfunksies te gebruik.

2154 TechMaths Afr G10 LB.indb 157 2015/11/25 4:13 PM

Uitgewerkte voorbeeld Skaaltekening – konstrueer verhoudingsuitsette vir sinus, kosinus en tangens vanaf insethoeke

Probleem: Gestel 'n bepaalde dak het 'n hellingshoek van 40°. Bepaal die daklengte verhoudings deur konstruksie. Met ander woorde, bepaal die waarde van sin 40°, cos 40° en tan 40° deur skaaltekening:

Konvensie: Daar is verskillende konvensies vir die skryf van die trigonometriese funksies en hulle insetwaardes. Een is om hakies te gebruik: sin(60°). Soos jy binnekort sal sien, is dit die konvensie wat deur jou sakrekenaar en in ander elektroniese formate gebruik word. Dit is 'n ware funksie-notasie. Ons sal egter die konvensie volg om sin 60° te skryf, met ander woorde sonder die hakies.

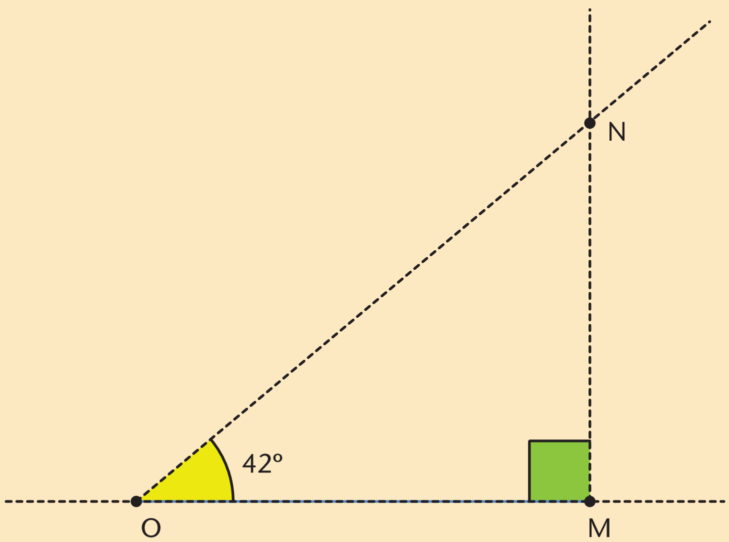
Oplossing:

Stap 1: Konstrueer 'n horisontale lynsegment, OM, van enige lengte, hoe langer, hoe beter (waarom?).

Stap 2: Konstrueer 'n straal loodreg op OM by M.

Stap 3: Konstrueer 'n straal vanaf O teen die verlangde hoek, hier 40°.

Stap 4: Merk die punt N waar die twee strale sny; ons het nou 'n reghoekige △OMN.



Stap 5: Meet lengtes MN, ON en OM op jou konstruksie.

As jy jou afmetings gebruik, kan jy bevestig dat die volgende waar is vir alle △OMN:

Die verhouding van die stygingslengte tot daksparlengte (*styging*: *dakspar*) sal wees:

MN : ON = sin 40° = 0,64

Die verhouding van die strekkingslengte tot daksparlengte (*strekking*: *dakspar*) sal wees:

Die hellingsverhouding (*styging*: *strekking*) sal wees MN: OM = tan 40° = 0,84

2154 TechMaths Afr G10 LB.indb 158 2015/11/25 4:13 PM

Uitgewerkte voorbeeld

Die inverse vraag: Konstrueer hoekuitsette vir verhoudingsinsette

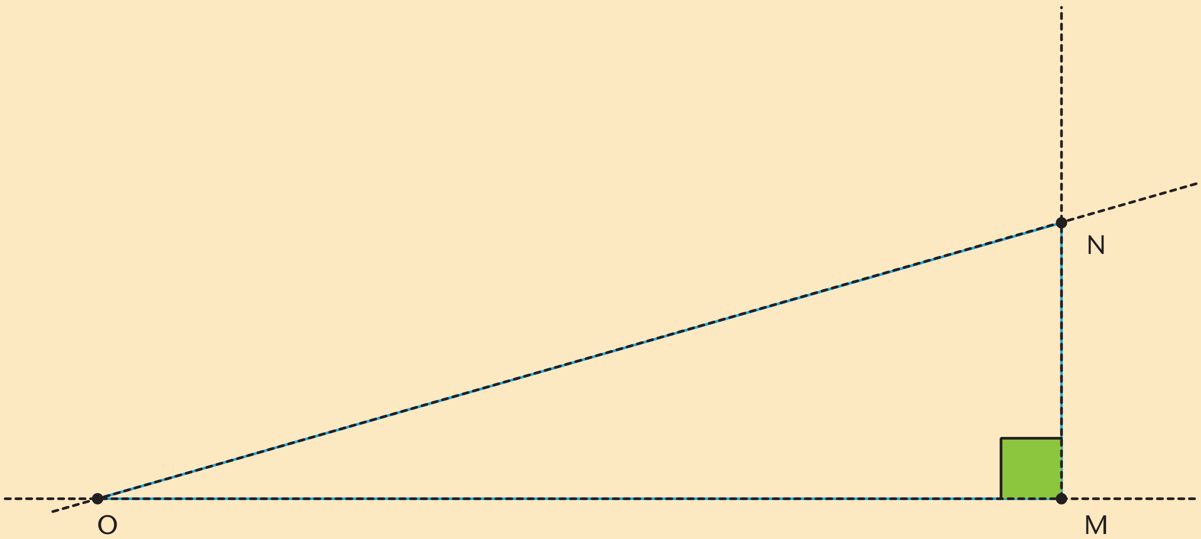
Probleem: ’n Dak het ’n styging-tot-strekking-verhouding van 2 cm vir elke 7 cm, m.a.w. ’n verhouding 2:7 = 0,29. Bepaal die hellingshoek van die dak deur skaaltekening.

Oplossing:

Stap 1: Konstrueer OM soos vantevore, sê 10 cm lank.

Stap 2: Konstrueer ’n straal loodreg op OM by M.

Stap3: Konstrueer punt N 2,9 cm $\left(\frac{2}{7} \times 10 \text{ cm} = 2{,}9 \text{ cm}\right)$ vanaf M met die straal langs.



Stap 4: Verbind O en N.

Stap 5: Meet die $\triangle$NOM.

Jou hellingshoekmeting behoort naastenby 16° te wees.

Deur die $\tan^{-1}$ funksie en die hellingsverhouding van 2:7 (0,29) te gebruik, kan die dak se hellingshoek bereken word as $\tan^{-1}$ (0,29) = 16°

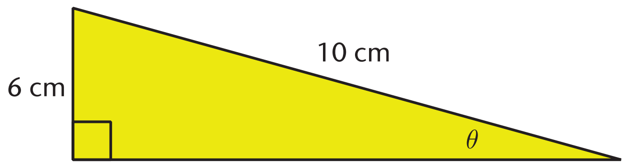
2154 TechMaths Afr G10 LB.indb 159 2015/11/25 4:13 PM

Oefeninge Oefen om insette en uitsette te konstrueer

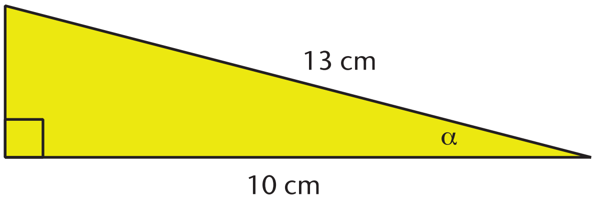
4 Vind die ontbrekende insette en uitsette vir die sinus-, kosinus-, en tangensfunksies in die volgende reghoekige driehoeke, deur skaaltekening.

Belangrik: In hierdie vraag praat ons nie meer van dakhelling nie. Ons het die daksituasie gebruik as 'n *inleiding tot* trigonometrie. Gebruik jou begrip van wat ons in daardie konteks gedoen het om die volgende op te los..

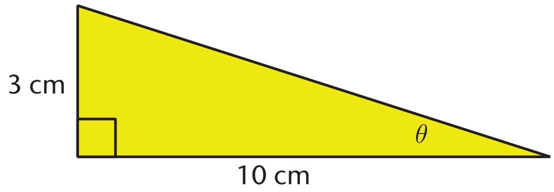
(a) Bepaal θ tot een desimale plek



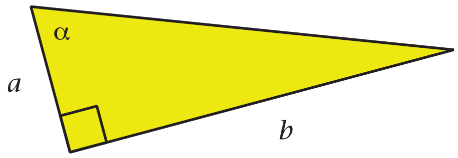
(b) Bepaal α tot een desimale plek



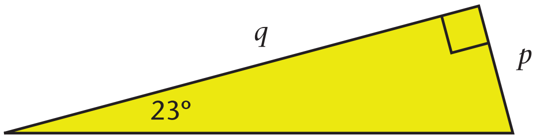
(c) Bepaal θ tot een desimale plek



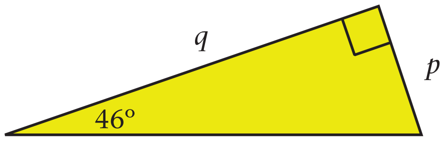
(d) Bepaal a as gegee word dat $\frac{a}{b} = \frac{2}{13}$



(e) Bepaal $p : q$ in desimale vorm, afgerond tot twee desimale plekke



(f) Bepaal $p : q$ in desimale vorm, afgerond tot twee desimale plekke



Berekening van verskillende waardes met die trigonometriese funksies

Elkeen van die drie trigonometriese funksies hierbo is ’n berekening wat twee lengtes en een hoek behels. Dit beteken dat vir ’n bepaalde situasie die **sinusfunksie** gebruik kan word om die volgende te bereken:

- stygingslengte deur gebruik te maak van *stygingslengte* = *daksparlengte* × sin *hellingshoek*, indien die **daksparlengte** en **hellingshoek** bekend is
- daksparlengte deur daksparlengte = $\dfrac{\textit{stygingslengte}}{\sin \textit{hellingshoek}}$ te gebruik indien die stygingslengte en hellingshoek bekend is.

Om die **hellingshoek** te bereken wanneer die stygings- en daksparlengtes bekend is, gebruik ons die sinusfunksie-inverse – die arcsin-funksie. Die arcsin-funksie staan ook bekend as $\sin^{-1}$. Die meeste sakrekenaars gebruik $\sin^{-1}$ om die sinusfunksie-inverse aan te dui in plaas van arcsin.

Hierdie omgekeerde funksie $\sin^{-1}$ neem as inset die verhouding $\sin^{-1} \dfrac{\textit{stygingslengte}}{\textit{daksparlengtes}}$ van die dak se stygingslengte en daksparlengtes $\dfrac{\textit{stygingslengte}}{\textit{daksparlengtes}}$’

en gee as uitset die hellingshoek in grade.

Let wel: f^{-1} is ’n manier waarop wiskundiges die inverse funksie van ’n funksie aandui wat insette en uitsette omruil. Dit kan baie verwarrend wees omdat ons dieselfde notasie gebruik om die resiprook van ’n getal aan te dui. Verstaan dus duidelik dat die ‘$^{-1}$’ in ‘$\sin^{-1}$’ *nie* ’n mag, soos in eksponente, aandui nie, maar eerder die inverse van die sinusfunksie.

Die hellingshoek kan derhalwe bereken word:

- **hellingshoek** = $\sin^{-1} \dfrac{\textit{stygingslengte}}{\textit{daksparlengtes}}$’ indien die **stygingslengte** and **daksparlengtes** bekend is.

Trigonometriese funksies is baie belangrik. Hulle is so belangrik dat hulle in jou sakrekenaar se versameling van funksies opgeneem is.

- Kyk op jou sakrekenaar.
- Vind die sin-, cos-, en tangens-knoppies.
- Let daarop dat dit reg daarbo sê $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$, en $\tan^{-1}$.

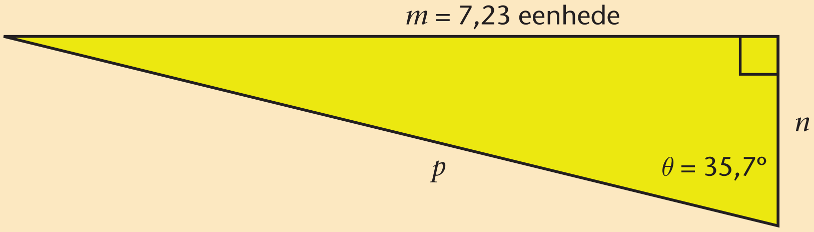
Jy kan baie maklik oorskakel tussen verhoudings en hoeke in reghoekige driehoeke deur jou sakrekenaar te gebruik.

Belangrik: Maak eers seker dat jou sakrekenaar op grade gestel is. Jy sal ’n klein ‘D’ (vir degrees) op jou vertoonskerm sien om te bevestig dat dit in graadmodus is. (Maak seker dat jy jou sakrekenaar se gebruikershandleiding lees, of vra jou onderwyser om jou te help.)

Let wel: Grademeting verdeel ’n volle omwenteling in 360° van rotasie. Radiaan meting verdeel ’n volle omwenteling in 2π eenhede, of 2π rad (sien Hoofstuk 10). Gradiaan meting verdeel ’n volle omwenteling in 400 eenhede, of 400 grad. In hierdie hoofstuk sal ons slegs trigonometrie met hoeke in grade doen.

Uitgewerkte voorbeeld

Probleem: Bereken die onbekende sye, n en p, van die reghoekige driehoek:



Oplossing: (afgerond tot twee desimale plekke)

Stap 1: m is oorkant die hoek θ (oriënteer jouself in die driehoek).

Stap 2: Besluit watter een van p of n om eerste te bereken (dit maak eintlik nie saak nie!); ons sal p kies.

Stap 3: Besluit watter trigonometriese funksie p en m insluit; omdat m die teenoorstaande sy is en p die skuinssy is in terme van die hoek θ, moet die trigonometriese funksie sin θ wees.

Stap 4: Skryf die korrekte verhouding tussen p, m, en θ neer en bereken p:

$$\frac{m}{p} = \sin \theta$$

$$\frac{7{,}23}{p} = \sin 35{,}7°$$

$$p = \frac{7{,}23}{\sin 35{,}7°}$$

$$= 12{,}38987043\ldots \text{ eenhede}$$

Stap 5: Bereken n

Benadering 1: Gebruik trigonometrie

$$\tan \theta = \frac{m}{n}$$

$$\tan 35{,}7° = \frac{7{,}23}{n}$$

$$n = \frac{7{,}23}{\tan 35{,}7°}$$

$$= 10{,}06160968\ldots \text{ eenhede} \approx 10{,}06 \text{ eenhede}$$

Benadering 2: Gebruik die Stelling van Pythagoras:

$$n^2 + m^2 = p^2$$

$$n^2 = p^2 - m^2$$

$$n = \sqrt{(12{,}39)^2 - (7{,}23)^2}$$

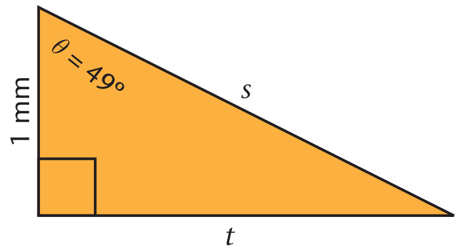
$$= 10{,}06 \text{ eenhede}$$

Let wel: Dit is nie nodig om die hoek van 35,7° tussen hakies te plaas nie; jou sakrekenaar verstaan dat 35,7 die hoek is, maar indien jy so verkies, kan jy dit insit

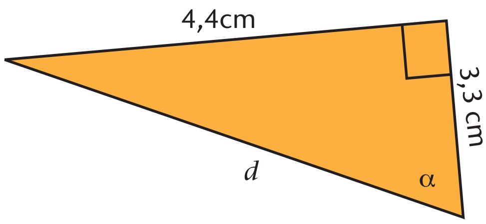
Oefening

5 Bepaal die onbekende groothede in die volgende reghoekige driehoeke. Maak seker dat jy jou werk netjies uiteensit, op 'n georganiseerde wyse, soos ons in die uitgewerkte voorbeelde gedoen het (rond jou finale numeriese antwoorde af tot een desimale plek).

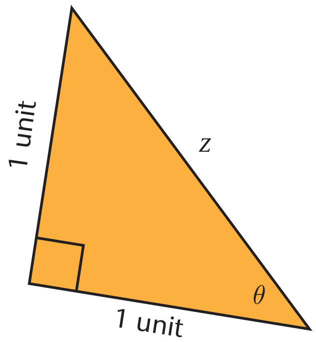
(a) s en dan t



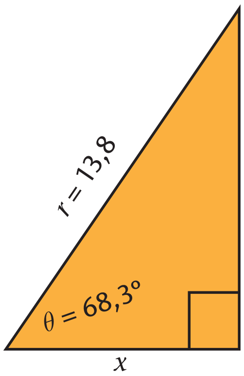
(b) d en dan $\cos\alpha$



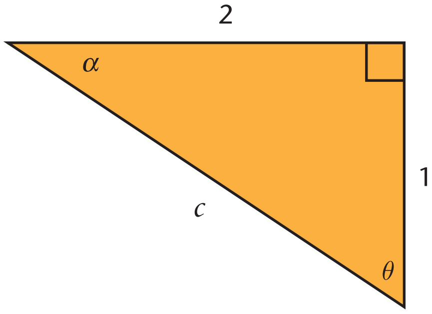
(c) θ en dan z



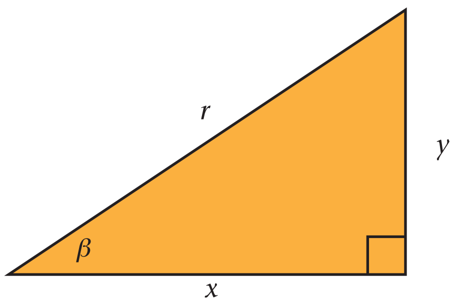
(d) x en y sonder Pythagoras



(e) θ, α en c (jy kies die volgorde)



(f) Gegee $x{:}r = 4{:}5$ en $y = 2$. Bepaal x, r en β (jy kies die volgorde)



6.4 Reghoekige driehoeke

Die laaste oefening dui op iets baie belangrik.

Ons kan onsself losmaak daarvan om slegs in terme van 'n situasie, soos 'n dakhelling, of enigiets anders, te dink.

Dit beteken dat ons die sinus-, kosinus-, en tangensfunksies op *enige reghoekige driehoek* kan gebruik. Dit is 'n hulpmiddel om 'n verhouding vanaf 'n skerphoek te bereken.

Belangrike vraag:
Waarom reghoekige driehoeke? Waarom nie ander driehoeke nie? Baie lank gelede het wiskundiges ooreengekom om te fokus op die verband tussen hoeke en verhoudings van sye van reghoekige driehoeke. Dit is gedoen omdat dit die wiskunde wat daaruit gevolg het, die maklikste en duidelikste gemaak het (onthou byvoorbeeld dat reghoekige driehoeke voldoen aan die Stelling van Pythagoras). Verder blyk dit dat ons kan voorstel dat nie-reghoekige driehoeke uit twee reghoekige driehoeke kan bestaan. Ook kan enige veelhoek voorgestel word om uit verskeie driehoeke te bestaan. Dus kan enige veelhoek ook in reghoekige driehoeke opgedeel word.

Konvensionele name vir die sye van reghoekige driehoeke

Ons gee spesiale name aan die sye van reghoekige driehoeke. Jy ken moontlik reeds hierdie name:

- **Skuinssy:** die sy oorkant die regte hoek; dit is altyd die langste sy van 'n reghoekige driehoek. (Waarom?)

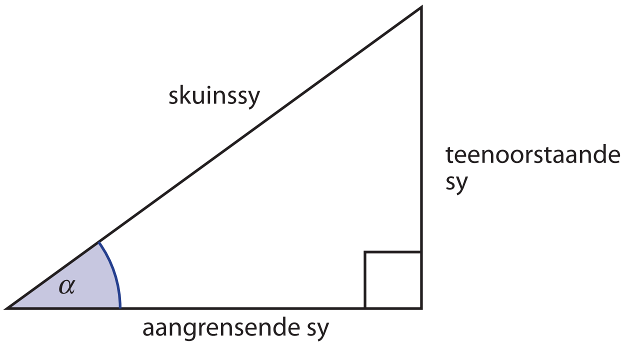
In trigonometrie moet ons 'n manier vind om tussen die twee sye te kan onderskei. Om dit te kan doen, gee ons die sye verskillende name. Die name is nie vasgestel nie. Dit hang af na watter een van die twee skerphoeke ons verwys:

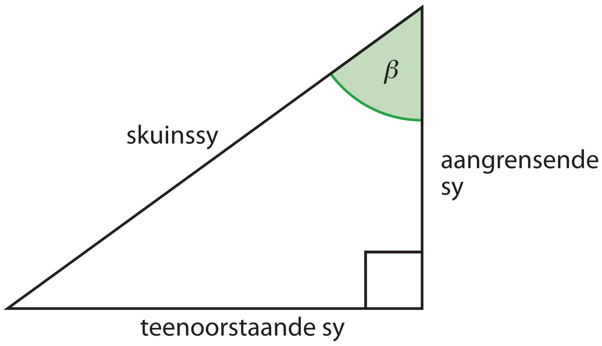
- **Teenoorstaande sy:** oorkant die hoek
- **Aangrensende sy:** langs die hoek: dit vorm een van die bene van die hoek.

Die twee lyne wat 'n hoek vorm, word die bene van die hoek genoem.

Die woord 'aangrensend' beteken 'langs'. Wie sit nou aangrensend aan jou regterkant?

Die benamingskonvensies word in die volgende diagram geïllustreer. In die linkerkantste driehoek neem ons aan dat die skerphoek α die een is waarin ons geïnteresseerd is. In die regterkantste driehoek aanvaar ons dat die ander skerphoek, β, die een is waarna ons kyk.





Om ons skryfwerk minder te maak, gebruik ons die volgende afkortings wanneer ons na die verskillende sye van 'n reghoekige driehoek verwys:

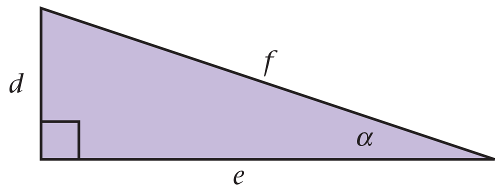
- Teenoorstaande: *teenoorst* of T – die sy oorkant die hoek
- Aangrensende: *aangr* of A – die sy aangrensend tot die hoek
- Skuinssy: *skuins* of S – die sy oorkant die regte hoek.

2154 TechMaths Afr G10 LB.indb 164 2015/11/25 4:13 PM

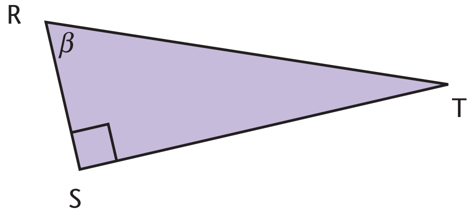
Oefeninge Raak gewoond aan die benamingskonvensies

6 Benoem die sye vir elk van die vier driehoeke hieronder volgens die benamingskonvensies, deur die gegewe hoek as verwysing te gebruik (dui aan skuinssy, teenoorstaande sy, en aangrensende sy met betrekking tot die gegewe hoek):

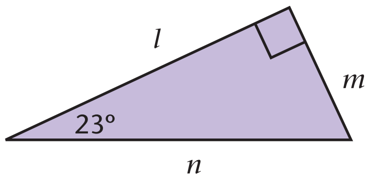
(a)



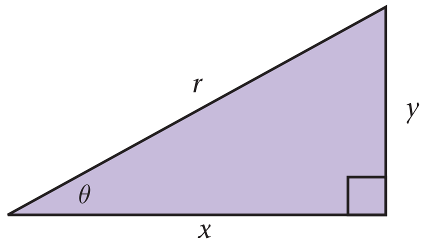
(b)



(c)



(d)



7 Konstrueer $\triangle ABC$ met $\hat{B} = 90°$, $\hat{A} = 36°$, en AB = 15 cm.

(a) Meet die sy BC tot die naaste millimeter.

(b) Gebruik die lengtes van die sye AB en BC om die lengte van die sy AC tot die naaste millimeter te bereken. Bevestig jou berekening deur AC te meet.

(c) Identifiseer die skuinssy, die sy aangrensend tot $\hat{A}$ en die sy teenoorstaande tot $\hat{A}$.

(d) Wat is die grootte van $\hat{C}$?

(e) Herhaal vraag (c) deur $\hat{C}$ in plaas van $\hat{A}$ te gebruik. Vergelyk wat jy so pas gedoen het met wat jy in (c) gedoen het.

(f) Bepaal alle moontlike verhoudings van sy-pare korrek tot twee desimale plekke.

(g) Veronderstel jy teken $\triangle ABC$ met dieselfde hoeke maar met AB = 30 cm. Jou antwoorde in (f) behoort dieselfde te wees. Gee ’n rede waarom.

8 Dink sorgvuldig na oor die volgende stellings en besluit of jy daarmee saamstem:

(a) ’n Hoek tussen 0° en 90° word vir jou gegee. Jy kan ’n reghoekige driehoek met die gegewe hoek konstrueer. Jy kan dan al ses moontlike verhoudings van die sye bepaal.

(b) Die grootte van die driehoek wat jy in (a) teken maak nie saak nie, maar die hoeke moet dieselfde wees. Al die driehoeke wat jy moontlik kan teken, sal gelykvormig wees.

(c) ’n Verhouding tussen enige twee sye van ’n reghoekige driehoek word vir jou gegee. Jy kan die verhouding gebruik om ’n reghoekige driehoek te konstrueer. Jy sal nou in staat wees om die skerphoeke in die driehoek te bepaal asook die ander verhoudings van die sye.

(d) Die grootte van die driehoek wat jy in (c) teken, maak nie saak nie. Al wat belangrik is, is dat die verhoudings van die ooreenkomstige sye dieselfde moet wees. Alle driehoeke wat jy moontlik kan teken, sal gelykvormig wees.

6.5 Definieer die trigonometriese funksies

Definisie: Die **sinusfunksie** vir reghoekige driehoeke: $\sin\theta = \frac{\textit{teenoorst}}{\textit{skuins}}$.
In woorde: die sinusfunksie verbind 'n insethoek θ met die korrekte uitsetverhouding *teenoorst* : *skuins*, die verhouding van die lengte van die teenoorstaande sy tot die lengte van die skuinssy.

Definisie: Die **kosinusfunksie** vir reghoekige driehoeke: $\cos\theta = \frac{\textit{aangr}}{\textit{skuins}}$.
In woorde: die kosinusfunksie verbind 'n insethoek θ met die korrekte uitsetverhouding *aangr* : *skuins*, die verhouding van die lengte van die aangrensende sy tot die lengte van die skuinssy.

Definisie: Die **tangensfunksie** in reghoekige driehoeke: $\tan\theta = \frac{\textit{teenoorst}}{\textit{aangr}}$.
In woorde, die tangensfunksie verbind 'n insethoek θ met die korrekte uitsetverhouding *teenoorst* : *aangr*, die verhouding van die lengte van die teenoorstaande sy tot die lengte van die aangrensende sy.

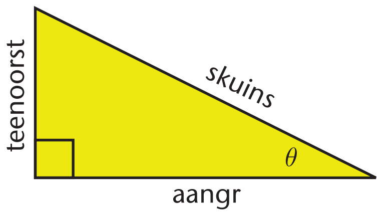
Definieer die drie basiese trigonometriese funksies vir reghoekige driehoeke

Om op te som, vir 'n gegewe reghoekige driehoek is die basiese trigonometriese funksies in reghoekige driehoeke:

$$\sin\theta = \frac{\textit{teenoorstaande}}{\textit{skuinssy}}$$

$$\cos\theta = \frac{\textit{aangrensende}}{\textit{skuinssy}}$$

$$\tan\theta = \frac{\textit{teenoorstaande}}{\textit{aangrensende}}$$



Definieer die inverse trigonometriese funksies vir reghoekige driehoeke

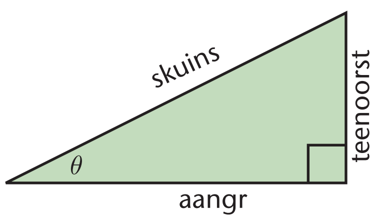
Ons definieer ook die 'inverse funksies' van sinus, kosinus en tangens in reghoekige driehoeke. Hierdie funksies neem die aangrensende, teenoorstaande, en skuinssyverhoudings as die inset, en as uitset die ooreenkomstige hoeke.

Deur die inverse funksies te gebruik, word die hoek θ op drie verskillende maniere bereken:

$$\theta = \arcsin\frac{\textit{teenoorst}}{\textit{skuins}} = \sin^{-1}\frac{\textit{teenoorst}}{\textit{skuins}}$$

$$\theta = \arccos\frac{\textit{aangr}}{\textit{skuins}} = \cos^{-1}\frac{\textit{aangr}}{\textit{skuins}}$$

$$\theta = \arctan\frac{\textit{teenoorst}}{\textit{aangr}} = \tan^{-1}\frac{\textit{teenoorst}}{\textit{aangr}}$$



Notasie: Soos vroeër genoem, sal ons die notasie $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$, en $\tan^{-1}$ eerder as die arc-funksies gebruik, alhoewel hulle dieselfde funksies is. Hulle word ook op die meeste sakrekenaars as $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$, en $\tan^{-1}$ aangedui.

Om op te som, die inverse van die basiese trigonometriese funksies in reghoekige driehoeke wat jou in staat stel om die korrekte driehoeksye se ooreenkomstige hoeke te bereken, is:

$$\theta = \sin^{-1} \frac{\textit{teenoorstaande}}{\textit{skuinssy}}$$

$$\theta = \cos^{-1} \frac{\textit{aangrensende}}{\textit{skuinssy}}$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{\textit{teenoorstaande}}{\textit{aangrensende}}$$

Definieer die trigonometriese resiproke funksies vir reghoekige driehoeke

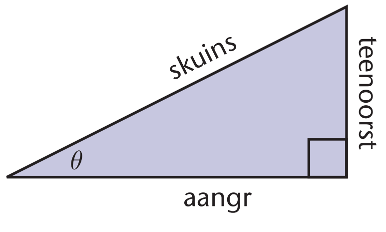
Die drie basiese trigonometriese funksies het elk 'n suster-funksie. Hulle word gedefinieer deur die resiproke verhoudings wat gebruik word vir die basiese funksies:

Definisie: Die **kosekansfunksie** vir reghoekige driehoeke: $\operatorname{cosec} \theta = \frac{\textit{skuins}}{\textit{teenoorst}}$.
In woorde: die kosekansfunksie verbind 'n insethoek θ met die korrekte uitsetverhouding *skuins* : *teenoorst*, die verhouding van die lengte van die skuinssy tot die lengte van die teenoorstaande sy.

Definisie: Die **sekansfunksie** vir reghoekige driehoeke: $\sec \theta = \frac{\textit{skuins}}{\textit{aangr}}$.
In woorde: die sekansfunksie verbind 'n insethoek θ met die korrekte uitsetverhouding *skuins* : *aangr*, die verhouding van die lengte van die skuinssy tot die lengte van die aangrensende sy.

Definisie: Die **kotangensfunksie** in reghoekige driehoeke: $\cot \theta = \frac{\textit{aangr}}{\textit{teenoorst}}$.
In woorde, die kotangensfunksie verbind 'n insethoek θ met die korrekte uitsetverhouding *aangr* : *teenoorst*, die verhouding van die lengte van die aangrensende sy tot die lengte van die teenoorstaande sy.

Om op te som, vir 'n gegewe reghoekige driehoek is die basiese trigonometriese funksies se resiproke in reghoekige driehoeke:



$\operatorname{cosec} \theta$ = beteken dat $\operatorname{cosec} \theta$ dieselfde is as $\frac{1}{\sin \theta}$

$\sec \theta$ = beteken dat $\sec \theta$ dieselfde is as $\frac{1}{\cos \theta}$

$\cot \theta$ = beteken dat $\cot \theta$ dieselfde is as $\frac{1}{\tan \theta}$

Die stellings aan die regterkant is *identiteite*. Met ander woorde, ons sê dat $\operatorname{cosec} \theta$ identies is aan die resiprook van $\sin \theta$ vir alle waardes van θ. Dit is eintlik amper altyd waar. Daar is 'n paar (baie min) waardes van θ waar die twee nie identies is nie. Jy kan ondersoek instel oor wat gebeur wanneer θ 0° of 90° is, vir die drie identiteite.

Die volle name van hierdie funksies is kosekans, sekans, en kotangens.

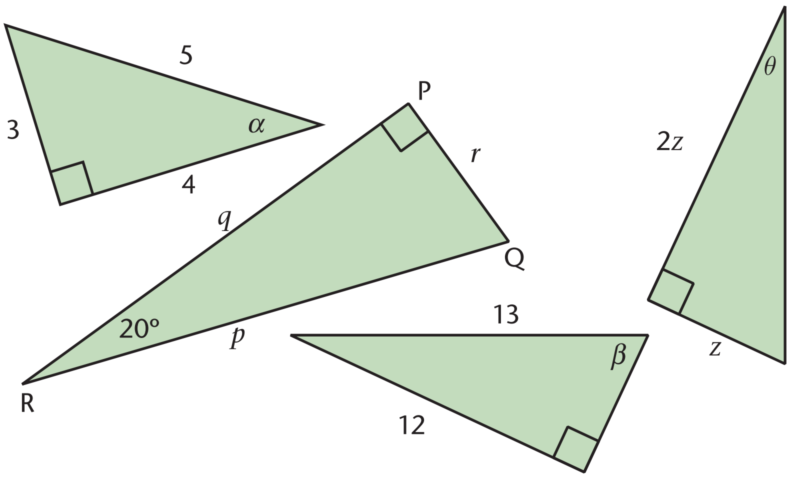
Maak seker dat jy duidelikheid het oor watter verhoudings met watter funksie verband hou. Probeer om self 'n vinnige manier te ontwikkel om sinus-, kosinus-, en tangensverhoudings te memoriseer.

Probeer om dit so eenvoudig moontlik te hou, en dit sal beter wees as jy jou eie manier ontwikkel en iets prakseer wat jou sal help om die definisies korrek te memoriseer.

Wat jy ook al kies om te doen, jy moet die definisies ken voordat jy voortgaan met die res van die hoofstuk.

Oefeninge

9 Hier is enkele roetine-oefeninge om gewoond te raak aan die definisies. NB: memoriseer eers die definisies. Moenie gedurig terugblaai na die vorige bladsye nie. Op daardie manier gaan jy nie veel leer nie.



Bepaal die volgende. In die geval van verhoudings, gee hulle in rasionale vorm asook in desimale vorm waar moontlik. Indien jy oplettend is, sal jy ook sommer baie dinge leer!

(a) $\sin \alpha$
(b) $\cos \alpha$
(c) $\sin \beta$
(d) $\cos \beta$
(e) $\tan \theta$
(f) $\tan (90° - \theta)$
(g) $\sin 20°$
(h) $\sin (90° - \alpha)$
(i) $\tan \beta$
(j) $\cos \theta$
(k) $\cos \alpha$
(l) $\tan 20°$
(m) $\cos \alpha$
(n) $\tan 70°$
(o) $\tan^{-1} \left(\frac{3}{4}\right)$
(p) $\cos^{-1} \left(\frac{q}{p}\right)$
(q) $\sin^{-1} \left(\frac{4}{5}\right)$
(r) $\tan^{-1} \left(\frac{1}{2}\right)$
(s) $\sin^{-1} \left(\frac{12}{13}\right)$
(t) $\tan^{-1} \left(\frac{4}{3}\right)$
(u) $\cos^{-1} (0,6)$
(v) $\cos^{-1} \left(\frac{12}{13}\right)$
(w) $\tan^{-1} (2,4)$

10 Blaai terug na jou konstruksies (skaaltekeninge) in Oefening 4. Bepaal die sinus, kosinus, en tangens van die hoeke in elk van die driehoeke. Jy sal dalk 'n paar ekstra afmetings op jou skaaltekeninge moet maak om dit te kan doen.

11 Verwys na Oefening 9. Druk die volgende uit in terme van die inligting wat in die driehoeke gegee word (pas die definisies direk toe – memoriseer hulle eers!)

(a) cot α

(b) sec α

(c) cosec β

(d) sec β

(e) cot θ

(f) cot $(90° - \alpha)$

(g) sec 20°

(h) cosec α

(i) cot β

(j) sec θ

(k) sec $(90° - \theta)$

(l) cot 20°

(m) sec 70°

(n) cot 70°

’n Bietjie raad: Die eenvoudigste manier om met al drie hierdie funksies te werk, is om hulle neer te skryf in terme van die ander drie basiese funksies, sinus, kosinus, en tangens. Jy sal opmerk dat ons dit toepas in al die voorbeelde wat volg.

Berekening van langer uitdrukkings wat trigonometriese funksies behels

Uitgewerkte voorbeeld

Probleem: Bereken $\frac{\cos(2 \times 30° - 12°)}{3 \tan 21{,}4° + 0{,}5}$ korrek tot twee desimale plekke

Oplossing: Wys jou stappe; vereenvoudig die teller en noemer voordat jy deel:

$$\frac{\cos(2 \times 30° - 12°)}{3 \tan 21{,}4° + 0{,}5} = \frac{\cos 48°}{1{,}176 + 0{,}5}$$

$$= \frac{0{,}669}{1{,}676}$$

$$= 0{,}399$$

$$= 0{,}40$$

Let wel: Die waardes in die stappe word afgerond tot *drie* desimale plekke. Dit is om te verhoed dat ’n afrondingsfout in die finale antwoord insluip. Om aan die veilige kant te wees, rond altyd jou waardes af tot meer beduidende syfers as wat jy in jou finale antwoord benodig.

Oefening

12 Bereken die waarde van die volgende uitdrukkings korrek tot twee desimale plekke:

(a) $\tan(3 \times 25°)$

(b) $3\tan 25°$

(c) $\sin \frac{45°}{2}$

(d) $\frac{\sin 45°}{2}$

(e) $\cos(13° + 18°)$

(f) $\cos 13° + \cos 18°$

(g) $\sin 20° - \cos 70°$

(h) $\tan 75° - \frac{1}{\tan 15°}$

(i) $\cos 53{,}2° - \sin 36{,}8°$

(j) $\tan 30° - 3\tan 10°$

(k) Vergelyk (a) en (b). Vergelyk (c) en (d). Vergelyk (e) en (f). Bestudeer (j). Wat het jy geleer omtrent trigonometriese funksies (oor wat hulle *nie* kan doen nie?)

(l) $\sin 32° \cos 32° + \frac{\sin(2 \times 32°)}{\cos(90° - 2 \times 32°)}$

(m) $\frac{\cos 12° \cos 80°}{\cos 78° \sin 31°}$

(n) $\frac{\cos 12° + \cos 80°}{\cos 78° + \sin 31°}$

(o) As $\beta = 24{,}7°$ bereken die waarde van $\sin 2\beta + 2\sin \beta + (\sin \beta)^2$

(p) As $a = 48°$ en $b = 32°$, bereken die waarde van $\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \sin \left(\frac{\beta - \alpha}{2}\right)$

Berekeninge met die resiproke funksies

Uitgewerkte voorbeeld

Probleem: Bereken cosec 23°

Oplossing: Omdat $\operatorname{cosec} 23° = \frac{1}{\sin 23°}$

$\operatorname{cosec} 23° = \frac{1}{\sin 23°} = 2{,}56$

Oefeninge

13 Gebruik jou sakrekenaar om die volgende te bepaal:

(a) $\cot 45°$

(b) $\operatorname{cosec} 23{,}8°$

(c) $\sec 89°$

(d) $\cot 13{,}2°$

(e) $\sec 66{,}2°$

(f) $\operatorname{cosec} 89°$

(g) $\frac{\operatorname{cosec}(30° - 2 \times 10°)}{1 + \cos 73°}$

(h) $\sec 25° \times \cos 25°$

(i) $\frac{\sec 55°}{\operatorname{cosec} 55°} + \tan 55°$

(j) $\frac{\cot(4 \times 17°) + 4}{4}$

(k) $\frac{\sin 42{,}7° - \operatorname{cosec} 42{,}7°}{\cot 11{,}9° - \tan 11{,}9°}$

2154 TechMaths Afr G10 LB.indb 170 2015/11/25 4:13 PM

14 Los die volgende vergelykings op:

(a) $2 \tan x = 7$

(b) $\sec(2x + 21°) = 7$

(c) $3 \sin x = 4$

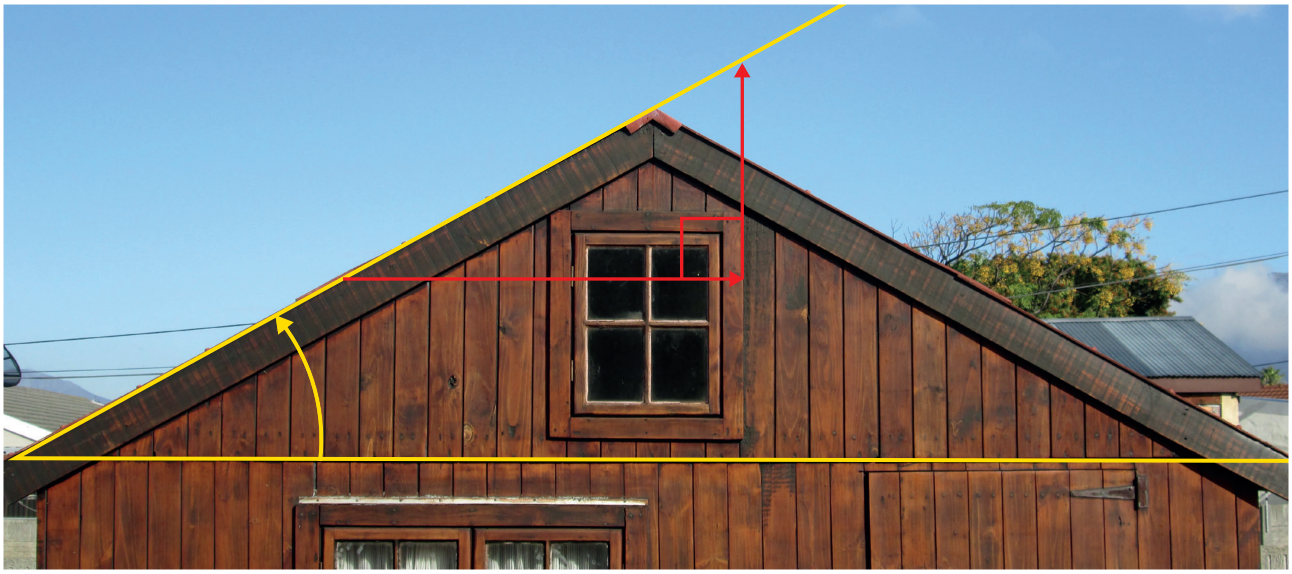
(b) $4 \cos x = 1$

(d) $\dfrac{1 - 5{,}2}{62{,}3 + \dfrac{\cot \alpha}{3}} = 0{,}92$

(e) $5 \operatorname{cosec} \beta - 7 = 1 + 0{,}3 \operatorname{cosec} \beta$

(f) $\dfrac{2}{3} - \dfrac{\tan 5\beta}{7} = \dfrac{11}{\cot 5\beta}$

6.6 Insethoeke van 0° en 90°



Tot dusver het ons toegelaat dat sinus, kosinus, en tangens skerphoek-insette aanneem om verhoudingsuitsette vir reghoekige driehoeke te produseer.

Behalwe vir een of twee wenke het ons insette van 0° en 90° uitgelaat. Die rede hiervoor is eenvoudig. Dit is onmoontlik om 'n driehoek met die oorblywende twee hoeke 0° en 90° te teken. As jy dit nie glo nie, probeer gerus self om een te konstrueer.

Ons behoort egter eintlik daaraan te dink om hulle in te sluit. Kom ons probeer sien waarom en hoe ons dit kan doen.

Oefening   Kyk terug

15 Kyk weer ’n slag na Oefening 3. In 3(e) het die dak twee skuinshellings (hierdie tipe dak word ’n mansarddak genoem – die Parlementsgebou in Kaapstad het een) en is horisontaal bo.

(a) Wat is die hellingshoek van ’n horisontale, plat dak?

(b) Wat is die hellingsverhouding (*styging* : *strekking* of *styging* ÷ *strekking*) vir die horisontale dak?

In 3(f) is jy gevra wat die helling van ’n *vertikale muur* is.

(c) Wat is die hellingshoek van ’n vertikale muur?

(d) Ons kan nie ’n hellingsverhouding vir ’n vertikale muur bereken nie. Verduidelik waarom nie.

Belangrike ekstra eienskappe wat ons graag wil hê tangens moet hê

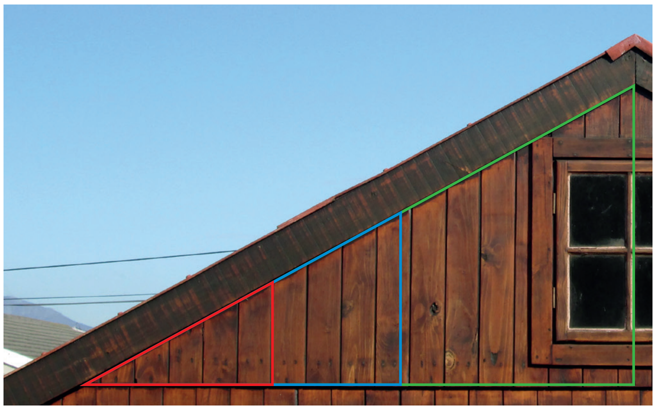
Op grond van die oefening hierbo, wil ons hê die tangensfunksie moet die volgende kan doen:

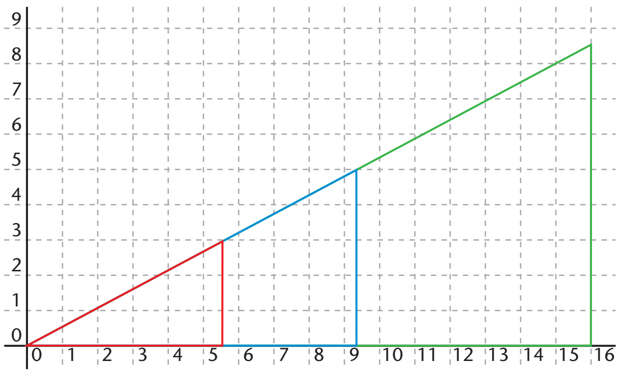
- $\tan 0° = 0$
- $\tan 90°$ is ongedefinieerd.

Hoe kan ons hierdie inset-uitsetpare insluit? Ons kan nie driehoeke gebruik nie. Ons hoef slegs ’n ander manier daarna te kyk, sonder die behoefte aan ‘onmoontlike’ driehoeke.

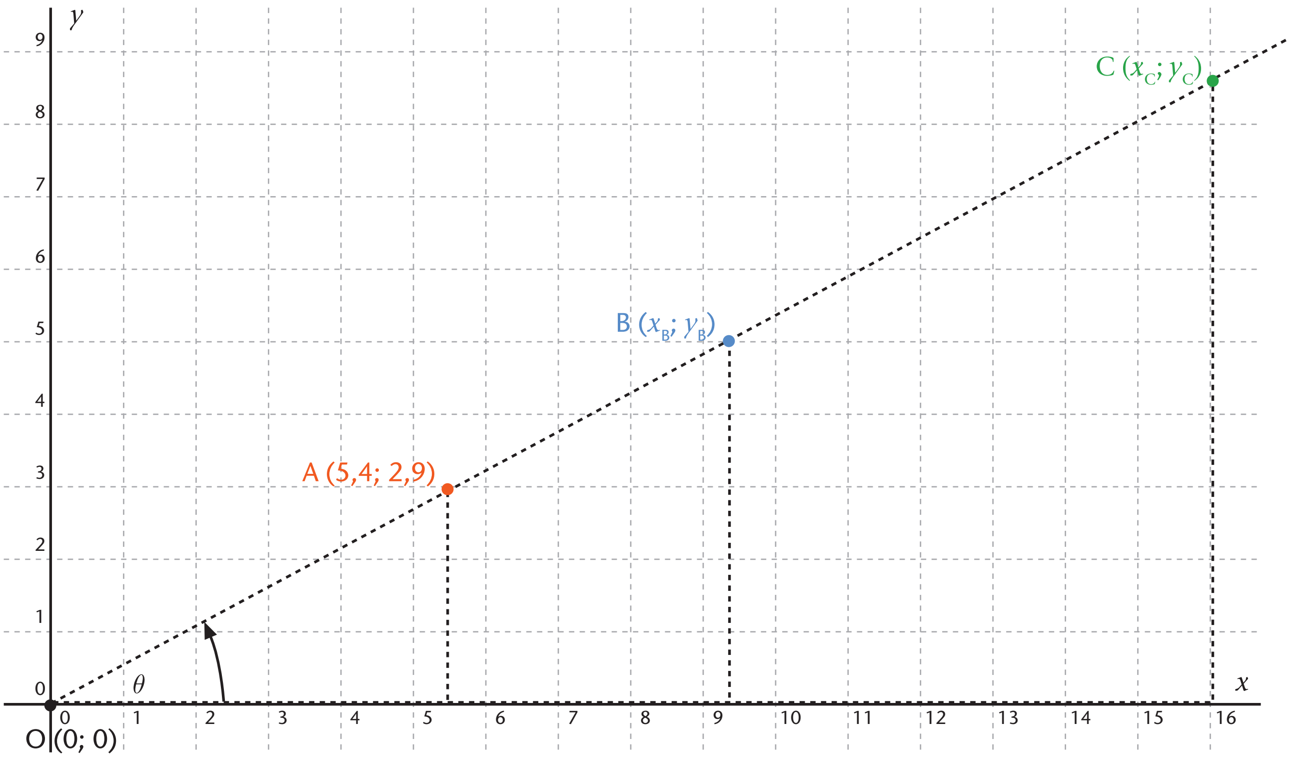
6.7 Die Cartesiese ruitenet: kyk na die tangensfunksie op ’n ander manier

Verwys weer na die dakhelling situasie: die driehoeke is presies dieselfde as wat ons vroeër gesien het. Regs is hulle op ’n Cartesiese ruitenet geplaas met die hellingshoek-snypunt by die oorsprong, die strekking met die x-as langs, en styging parallel aan die y-as.





Hier is die Cartesiese voorstelling vergroot (in verhouding opgeskaal sodat alle lengteverhoudings dieselde is), en met byskrifte:



Die drie driehoeke word in swart gewys, terwyl die koördinate van die boonste hoekpunt in die oorspronklike kleure gehou is.

Dit is gedoen om te wys dat ons nie werklik meer op die driehoeke fokus nie.

Eintlik is al die inligting wat ons benodig in die koördinate vervat.

Let wel: Ons lees iets soos x_A as 'x onderskrif A' of 'x sub A' vir kort. Om die 'A' as 'n onderskrif aan te dui, is 'n maklike manier om te wys dat ons van die x-koördinate van punt A praat. Hierdie notasie is baie nuttig wanneer ons na twee of meer punte wil verwys.

Uitgewerkte voorbeeld **Hoe om akkuraat van ’n Cartesiese ruitenet af te lees**

Probleem: Lees x_A op die vorige diagram.

Oplossing: Jy het ’n liniaal en moontlik ook ’n sakrekenaar nodig.

Stap1: Bepaal die skaal. Om dit te doen, gebruik jou liniaal om enige afstand op die diagram te meet, hoe langer hoe beter. Plaas byvoorbeeld jou liniaal op die x-as met die nul by O. Meet die afstand d vanaf O tot by die punt 16 eenhede vanaf O. Die skaal sal d cm:16 eenhede wees.

Stap 2: Meet die afstand waarvan jy die afmeting moet hê. Hier moet jy byvoorbeeld die afstand langs die x-as vanaf O tot by x_A met jou liniaal meet.

Stap 3: Gebruik jou skaal om die afstand op jou liniaal om te skakel na die waarde van x_A op die Cartesiese ruitenet. Jy behoort 5,4 eenhede te kry (soos dit in die diagram aangedui word).

Tangensfunksie deur die Cartesiese sisteem hierbo te gebruik met koördinate A, B, en C

Oefeninge

16 Beantwoord die vrae wat volg:

(a) Bepaal vanaf die diagram hierbo die koördinate van punte B en C so akkuraat as moontlik.

(b) Bereken die kwosiënte, afgerond tot twee desimale eenhede:

(i) $\frac{y_A}{x_A}$ (ii) $\frac{y_B}{x_B}$ (iii) $\frac{y_C}{x_C}$

(c) Meet die hoek ’n tweede keer (net om seker te maak).

(d) Vergelyk jou resultate hier met die resultate wat jy in Oefening 1 gekry het. As jy noukeurig gewerk het, behoort jy dieselfde resultate gekry het. Is jy verbaas? Waarom is die resultate dieselfde? Verduidelik dit aan jouself, of nog beter, aan iemand anders.

17 Laat P enige punt op die positiewe x-as wees, en Q enige punt op die positiewe y-as.

(a) Wat is die waarde van $\frac{y_P}{x_P}$?

(b) Kan ons $\frac{y_Q}{x_Q}$ bereken?

(c) Vergelyk jou resultate hier met jou resultate in Oefening16.

18 Lewer kommentaar op die volgende twee stellings:

‘Ons kan wat ons in Oefening 16 en 17 sien kombineer en dan sê: tan $\theta = \frac{y}{x}$’

‘As ons dit doen, word die geval waar $\theta = 0°$ outomaties ingesluit, terwyl die geval waar $\theta = 90°$, outomaties uitgesluit word, soos ons vanuit Oefening16 verwag.’

Wat het ons geleer uit die vorige oefeninge?

- Die koördinaatdefinisie gee presies dieselde resultate as die reghoekige driehoekdefinisie vir $0° < \theta < 90°$.
- Die koördinaatdefinisie gee ook vir ons resultate wat ons nie vanuit die driehoekdefinisie kan verkry wanneer $\theta = 0°$ of $90°$ is nie.

Meet hoeke om die oorsprong van die Cartesiese vlak

Konvensie:

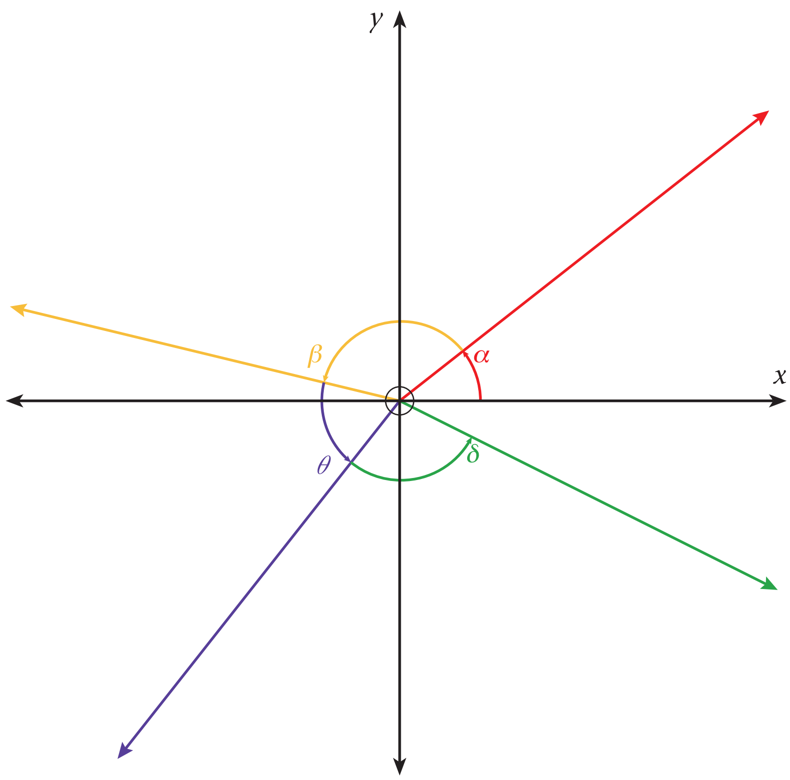
- Gebruik die positiewe x-as as die verwysingsbeen vir die hoek
- Die straal wat van die oorsprong strek vorm die ander been van die hoek
- Meet die hoek deur antikloksgewys van die verwysingsbeen na die ander been van die hoek te beweeg

Oefening Meet hoeke van 0° tot 360° in die Cartesiese vlak

19 Gebruik jou gradeboog, waar nodig, om die volgende te meet:

(a) die hoeke α, β, θ en δ, en

(b) die vyf hoeke wat deur die positiewe en negatiewe x- en y-asse gevorm word. (**Wenk:** die positiewe x-as maak twee verskillende hoeke met himself volgens die konvensie).



Wenk: Wees slim. Jou gradeboog kan dalk slegs party van die hoeke direk meet. Maak 'n plan met die ander.

6.8 Nog toepassings van trigonometriese funksies in die Cartesiese vlak

Voorbeeld

Wanneer ons besig is met die trigonometrie van reghoekige driehoeke, is die definisieversameling van die drie basiese funksies al die hoeke *tussen* 0° en 90°: $0° < \theta < 90°$.

Die waardeversameling van die sinus- en kosinusfunksies is al die reële getalle *tussen* –1 en 1. Die waardeveramelling van die tangensfunksies is al die positiewe reële getalle. Maak seker dat jy hiermee saamstem.

Die Cartesiese definisie van die sinus- en kosinusfunksies

Die sinus- en kosinusfunksies deel soortgelyke eienskappe, dus sal ons hulle sy-aan-sy ontwikkel.

Vir enige punt op die Cartesiese vlak P(x; y) wat *nie* (0; 0) is nie, is:

$\sin\theta = \frac{y}{r}$ en $\cos\theta = \frac{x}{r}$ vir $r = +\sqrt{x^2 + y^2} = OP$

OP is die radiale (straal-) afstand vanaf die oorsprong O na die punt P(x; y).

Eienskappe van die algemene sinus- en kosinusfunksies (verstaan en onthou hulle)

Definisieversameling: Die sinus- en kosinusfunksies wat ons gedefinieer het, het presies dieselfde definisieversameling: alle hoeke begin by 0° en eindig by 360°.

Waardeversameling: Die waardeversameling van die sinusfunksie en die waardeversameling van die kosinusfunksie is identies, en sluit al die reële getalle vanaf –1 tot by 1 in.

Die sinusfunksie het:

A. negatiewe uitsette *binne* kwadrante 3 en 4, waar y negatief is,

B. positiewe uitsette *binne* kwadrante 1 en 2, waar y positief is,

C. nul as uitset enige plek *op* die x-as (y is nul oral op die x-as) BEHALWE by nul, en

D. dit het ’n maksimum uitset van +1 *op* die positiewe y-as, en ’n minimum uitset van –1 *op* die negatiewe y-as (waar $y = \pm r$ is, want $x = 0$).

Die kosinusfunksie het:

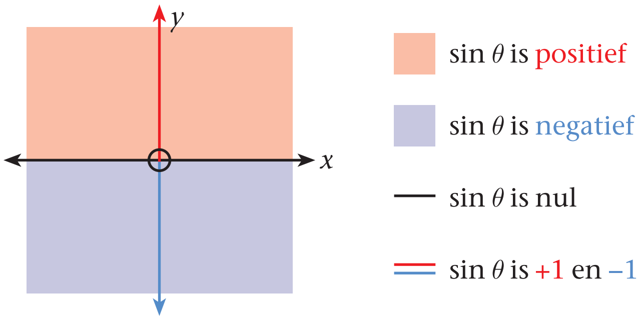
A. negatiewe uitsette *binne* kwadrante 2 en 3, waar x negatief is,

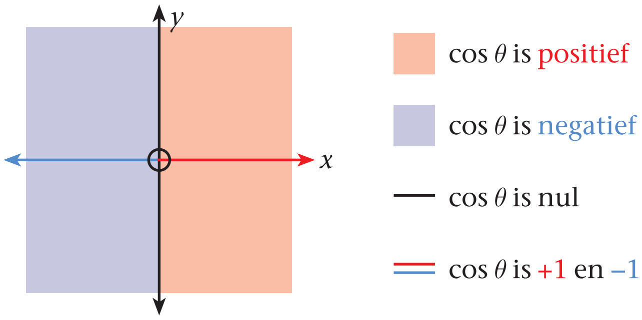
B. positiewe uitsette *binne* kwadrante 1 en 4, waar x positief is,

C. nul as uitset enige plek *op* die y-as (m.a.w. waar x nul is) BEHALWE by nul, en

D. dit het ’n maksimum uitset van +1 *op* die positiewe x-as, en ’n minimum uitset van –1 *langs* die negatiewe x-as (waar $x = \pm r$ want $y = 0$).

Hierdie eienskappe van die sinusfunksie en kosinusfunksie word almal opgesom in die volgende twee diagramme:





Oefening Kyk terug

20 Kyk weer na Oefening 3(e).

(a) Wat is die *styging* : *daksparlengte-verhouding*

- van 'n horisontale, plat dak?
- van 'n vertikale muur?

Maak seker dat die Cartesiese definisie van sinus dieselfde resultate gee as wat jy hier gekry het.

(b) Wat is die *strekking* : *daksparlengte-verhouding*

- van 'n horisontale, plat dak?
- van 'n vertikale muur?

Maak seker dat die Cartesiese definisie van sinus dieselfde resultate gee as wat jy hier gekry het.

Belangrike feit: Die waarde van r word positief gehou sodat die teken van x die teken van die uitset van $\cos\theta$ gee en die teken van y gee die teken van die uitset van $\sin\theta$.

Eienskappe van die algemene tangensfunksie (verstaan en onthou hulle):

Definisieversameling: Die definisieversameling van die tangensfunksie wat ons gedefinieer het, sluit alle hoeke in vanaf 0° tot by 360° behalwe die hoeke 90° en 270°.

Waardeversameling: Die waardeversameling is enige reële getal, insluitend negatiewe getalle.

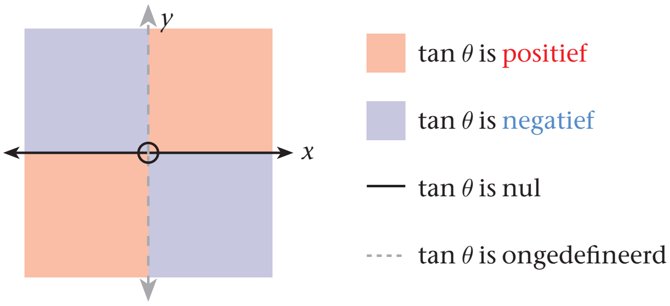
Die tangensfunksie het:

A. negatiewe uitsette *binne* kwadrante 2 en 4
B. positiewe uitsette *binne* kwadrante 1 en 3
C. nul as uitset enige plek *op* die x-as, BEHALWE by nul, en
D. dit het GEEN uitsette *op* die y-as nie (ongedefinieerd hier).

Die Cartesiese definisie van die tangensfunksie

Vir enige punt P(x; y) op die Cartesiese vlak wat nie op die y-as is nie, is $\tan\theta = \frac{y}{x}$

Hierdie eienskappe is almal opgesom in die volgende diagram:



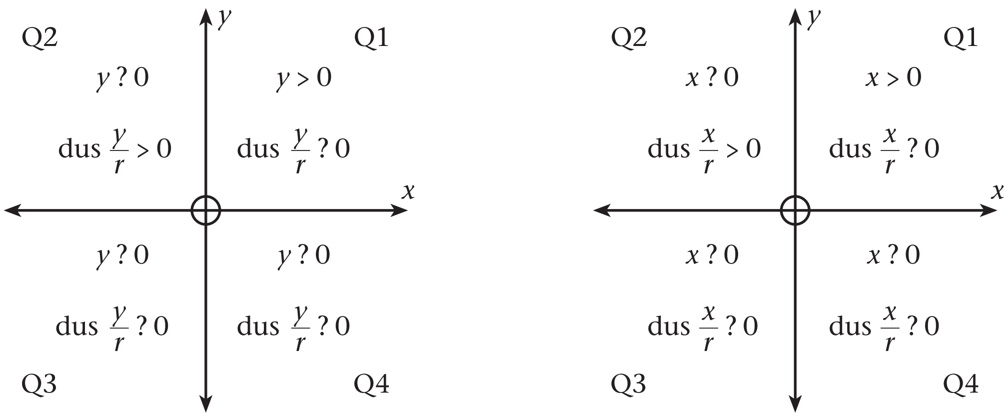
Ons gee nie gewoonlik ’n teken vir die helling van ’n dak nie. Maar ons doen dit vir radiusse vanuit die oorsprong van die Cartesiese vlak. Ons sou kon sê dat die ‘helling’ van ’n radius binne kwadrante 1 of 3 positief is, terwyl die ‘helling’ van ’n radius binne kwadrante 2 of 4 negatief is.

Oefeninge Begin om die eienskappe te verstaan

21 Om die tekens van die trigonometriese funksies in verskillende kwadrante te ken, is ’n baie *handige hulpmiddel*.

Hier is ’n paar maniere om te besluit of die teken van die uitsette van sinus en kosinus + of – is.

(a) Teken die diagramme oor en voltooi dit deur die vraagtekens te vervang met die korrekte ongelykheidsteken vir die volgende diagramme vir die punte (x; y) *binne* K1, K2, K3, en K4. Let op dat $r > 0$ is (altyd, per definisie).

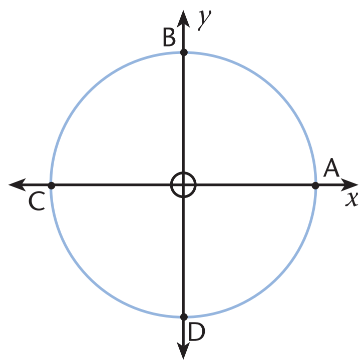


(b) Trek die tabel oor en voltooi dit vir punte (x; y):

(x; y) binne kwadrant:	teken van r:	teken van x:	teken van $x \div r$:	teken van y:	teken van $y \div r$:
1		+		+	+
2					–
3		–			
4				–	

(c) Jy kan ook jou sakrekenaar gebruik om uit te vind wat die teken van die sinus- en kosinusfunksies in die verskillende kwadrante is. Kies 'n paar toets-insethoeke uit elke kwadrant en kyk of jy kry wat verwag word.

22 Die diagram stel 'n Cartesiese stelsel voor met 'n sirkel met radius $r = 1$ eenheid, gesentreer by die oorsprong. Doen die volgende sonder gebruik van 'n sakrekenaar:



(a) Skryf al die x-koördinate van die vier punte A, B, C, en D neer. Gebruik dit om die uitsetwaardes van die kosinusfunksie vir insette van 0° (360°), 90°, 180°, en 270° te bereken.

(b) Skryf die y-koördinate van die punte neer en gebruik dit om die uitsetwaardes van die sinusfunksie by die vyf hoeke te bereken.

Die volgende twee vrae vereis konsentrasie. Gestel jy plaas jou vinger op punt A (of doen dit werklik). Verbeel jou nou jy laat dit stadig al langs die sirkel deur punte B, C, D, en terug na A gly (of laat dit werklik gly).

(c) Hoe verander die waarde van die y-koördinaat van jou vingerpunt as jy:

- dit van A na B laat gly?
- dit van B na C, na D laat gly?
- dit van D na A laat gly?

(d) Hoe verander die waarde van die x-koördinaat van jou vingerpunt as jy:

- dit van A na B, na C laat gly?
- dit van C na D, na A laat gly?

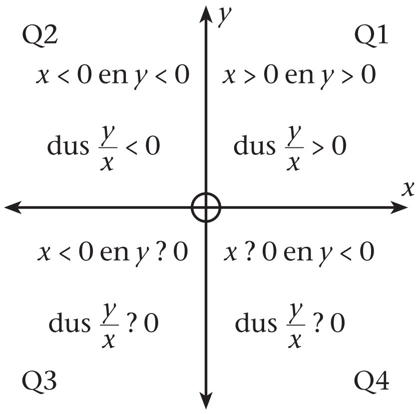
(Wenk: Gebruik die woorde 'neem toe', 'neem af', 'positief', en 'negatief'. Sluit die maksimum waardes van 1 in, die minimum waardes van –1, en die tussen-in waardes van 0 in.)

23 Ander maniere om oor die teken (+ of –) van die uitsette van die tangensfunksie te besluit:

(a) Trek die volgende tabel oor en voltooi dit vir punte (x; y) wat *nie* op die asse lê nie:

(x; y) binne kwadrant:	**teken vir x:**	**teken vir y:**	**teken vir $y \div x$:**
1	+	+	+
2			–
3	–		
4		–	

(b) Teken die volgende diagram oor en voltooi dit vir punte (x; y) *binne* K1, K2, K3 en K4 deur die vraagtekens met die korrekte ongelykheidstekens te vervang:



(c) Maak seker dat jy oortuig is dat jy verstaan waarom die tangensfunksie positiewe uitsette gee binne K1 en K3, en negatiewe uitsette binne K3 en K4.

(d) Jy kan ook jou sakrekenaar gebruik om uit te vind wat die teken van die tangensfunksie in verskillende kwadrante is. Eksperimenteer met ’n paar toets-insethoeke en maak seker dat jy die resultate kry wat jy verwag om te kry.

Berekening met die Cartesiese definisies van die trigonometriese funksies

Oefeninge

24 Gebruik jou sakrekenaar om die uitsetwaardes van tangens vir die volgende hoeke te bepaal. Sê met watter kwadrant die hoek ooreenstem. Kyk of die teken (+ of –) vir jou sin maak.

(a) 140°
(b) 285°
(c) 100°
(d) 269°
(e) 1°
(f) 179°
(g) 181°
(h) 359°
(i) 45°
(j) 135°
(k) 225°
(l) 315°

25 Gee ten minste drie koördinate (x; y) sodat:

(a) $\frac{y}{x} = \tan 0°$ (b) $\frac{y}{x} = \tan 180°$

(c) $\frac{y}{x} = \tan 225°$ (d) $\frac{y}{x} = \tan 135°$

Bepaal in elke geval die drie waardes van r wat ooreenstem met die drie koördinate.

Kan jy in elke geval meer as drie koördinate gee? Hoeveel meer? Is daar 'n perk op die aantal koördinaatpare wat jy kan kies om neer te skryf?

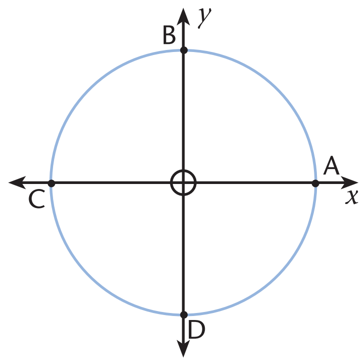
26 Die diagram stel 'n Cartesiese stelsel voor met 'n sirkel met radius 7,23 eenhede, gesentreer by die oorsprong.

(a) Maak gebruik van die diagram om die koördinate van punte A, B, C, en D te bepaal.

(b) Sonder hulp van jou sakrekenaar, gebruik hierdie koördinate om te wys dat

- tan 0° en tan 180° nul is, en
- dat tan 90° en tan 270° ongedefinieerd is.

(c) Dit maak nie saak wat die radius van die sirkel in vraag (b) is nie. Verduidelik waarom dit geen effek het nie.



27 Die diagram toon vier punte op die omtrek van 'n sirkel.

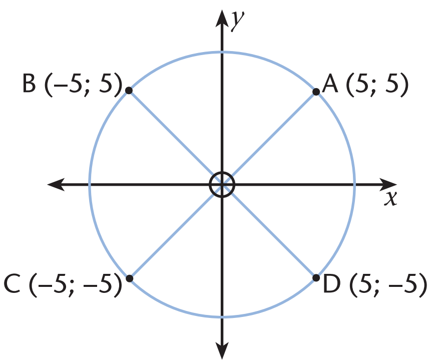
(a) Verduidelik waarom die hoek vir A 45° is.

(b) Gee die hoeke van B, C, en D.

(c) Gebruik die diagram en wat jy verstaan uit (a) en (b) om te wys dat:

- tan 45° en tan 225° = 1 is, en dat
- tan 135° en tan 225° = -1 is.

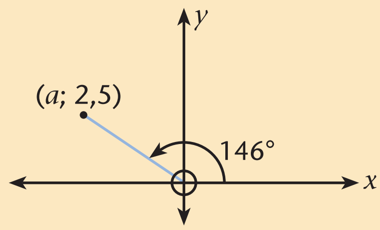
(d) Bereken die radius van die sirkel. (**Wenk:** Soek 'n reghoekige driehoek en gebruik die Stelling van Pythagoras.)



(e) Die radius van die sirkel maak geen verskil aan die waardes van die tangensfunksie in (c) nie. Verduidelik waarom dit geen effek het nie.

Uitgewerkte voorbeeld Vind die onbekende koördinaat

Probleem: Die diagram stel ’n Cartesiese vlak voor, maar dit is nie op skaal geteken nie. Wat is die waarde van *a*?



Oplossing: Dit is nie ’n skaaltekening nie, dus kan ons nie die waarde van *a* daarop afmeet nie.

Stap 1: IIdentifiseer die betrokke trigonometriese verhouding. Ons het reeds *y* en ons moet *x* bereken (hier voorgestel deur *a*). Ons moet dus tan gebruik.

Stap 2: Skryf die vergelyking neer en los op vir *a*:

$$\tan 146° = \frac{2,5}{a}$$

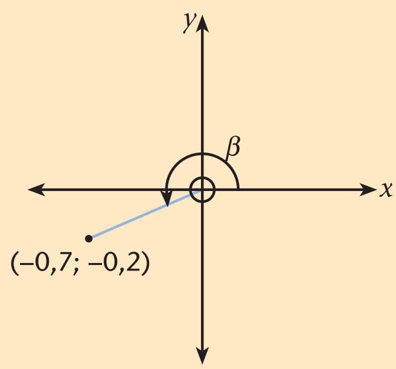
$$a = \frac{2,5}{\tan 146°}$$

$$= -3,706\,402\,421\,\ldots$$

$$= -3,7$$

Uitgewerkte voorbeeld Vind die onbekende hoek

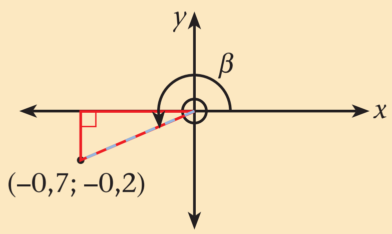
Probleem: Bepaal die waarde van β in die volgende situasie.

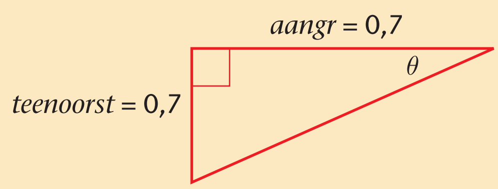


Oplossing: Soos tevore, is dit nie volgens skaal geteken nie. Ons moet dus die antwoord bereken.

Step1: Omdat die *x*- en *y*-waardes gegee word, weet ons dat ons tan moet gebruik.

Step 2: Ons sal ons begrip van trigonometrie in reghoekige driehoeke hier moet gebruik. Begin deur ’n reghoekige driehoek in die diagram te identifiseer:





Ons het die binnehoek by die oorsprong θ genoem. Die aangrensende sy het die onbekende waarde *x*, en die teenoorstaande sy die onbekende waarde *y*.

Stap 3: Bereken die waarde van θ:

$$\tan\theta = \frac{0{,}2}{0{,}7}$$

$$= \tan^{-1}\frac{0{,}2}{0{,}7}$$

$$= 15{,}945\ 395\ 9\ ...°$$

$$= 15{,}9°$$

Stap 4: Gebruik θ om β te bereken:

$$\beta = 180° + \theta = 180° + 15{,}9° = 195{,}9°$$

Let wel: Ongelukkig sal jou sakrekenaar nie vir jou die waarde van β gee as jy $\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ bereken nie. Dit is selfs erger vir K2 en K4. Probeer om $\tan^{-1}$ van 'n negatiewe verhouding van y tot x te bereken. Dit sal 'n negatiewe hoek gee. Die benadering wat in hierdie voorbeeld gegee word, is die duidelikste.

Iets belangriks: In die inleiding tot die hoofstuk is gemeld dat daar 'n verband bestaan tussen die dakhellingsituasie en die Ferriswielsituasie. Hierdie verband is merkbaar in Stap 2, waar die Cartesiese situasie geherinterpreteer is as 'n driehoeksituasie.

Die volgende oefeninge maak gebruik van daardie verband. 'n Deel van die vaardigheid van trigonometrie is om reghoekige driehoeke in Cartesiese probleme te kan raaksien.

Oefeninge Vind ontbrekende hoeke en koördinate

28 Bereken die ontbrekende x- of y- koördinaat of hoek θ (gemeet vanaf die positiewe x-as) vir die volgende punte op die Cartesiese vlak. Begin in elke geval deur die inligting op 'n skets van die Cartesiese stelsel voor te stel, soos in die voorbeelde.

(a) $(x; y) = (-3; 2)$; $\theta = ?$

(b) $(x; y) = (6{,}7; ?)$; $\theta = 285°$

(c) $(x; y) = (?; 0{,}88)$; $\theta = 104{,}8°$

(d) $(x; y) = (-4{,}8; -1{,}3)$; $\theta = ?$

(e) $(x; y) = (2; 0{,}25)$; $\theta = ?$

(f) $(x; y) = (?; -0{,}079)$; $\theta = 234°$

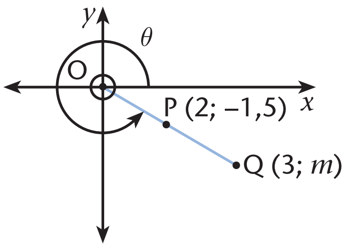
29 O is by die oorsprong en O, P, en Q lê in 'n reguit lyn.

Bereken:

(a) die ontbrekende koördinaat m,

(b) die hoek θ, en

(c) die lengtes OP en PQ. (**Wenk:** PQ = OQ – OP).



30 Gaan terug na die voorbeeld van die sokkerveld aan die begin van paragraaf 6.2. Laat O die oorsprong wees van ’n Cartesiese ruitenet. Laat OM die positiewe x-as wees. Laat OR verleng die positiewe y-as wees. Die veld se grootte is 100 m by 70 m (dus, punt M het bv. $x = 100$ m).

(a) Skryf die koördinate van M, P, θ, R, en S neer.

(b) Skryf die waardes van θ vir posisies M, R, en S neer. Skryf ook die waardes van OM, OR, en OS neer.

(c) Bereken die waarde van θ en OQ vir die posisie Q. Doen dit deur eers die probleem se inligting op ’n skets van ’n assestelsel voor te stel. Wys die stappe van jou berekening.

(d) Gebruik die antwoord wat jy in (c) gekry het om die waardes van θ en OP vir posisie P neer te skryf. Verduidelik hoe jy jou waardes gekry het.

(e) Is dit nodig om die koördinaat-definisies van die trigonometriese funksies te gebruik om die vorige vrae op te los?

Die Cartesiese definisies van kosekans, sekans, en kotangens

Hulle word, soos in reghoekige driehoeke, gedefinieer as die resiproke van sin θ, cos θ, en tan θ:

$\text{cosec}\,\theta = \frac{r}{y}$ ongedefinieerd by $y = 0$; dieselfde as om te sê wanneer $\theta = 0°; 180°; 360°$

$\sec\theta = \frac{r}{x}$ ongedefinieerd by $x = 0$; dieselfde as om te sê wanneer $\theta = 90°; 270°$

$\cot\theta = \frac{x}{y}$ ongedefinieerd by $y = 0$; dieselfde as om te sê wanneer $\theta = 0°; 180°; 360°$

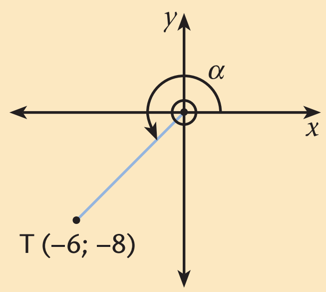
Maak seker van die stellings by die definisies wat sê waar die funksies ongedefinieerd is. Maak seker dat jy daarmee saamstem.

Uitgewerkte voorbeeld Verhoudingsuitsette van koördinate

Probleem: Die punt T (–6; –8) lê teen ’n hoek α vanaf die positiewe α vanaf die positiewe x-as. Bepaal sin α, sec α, and cot α.

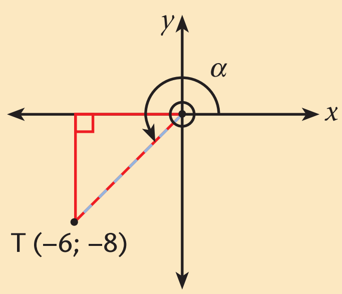
Oplossing:

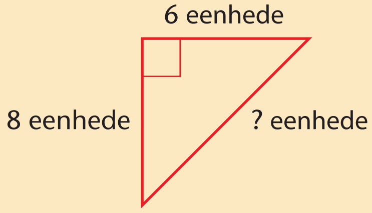
Stap 1: Stel die situasie voor in ’n skets:



Stap 2: Ons het r nodig om sin α en sec α te bereken

Identifiseer ’n reghoekige driehoek in jou Cartesiese voorstelling en gebruik die Stelling van Pythagoras:





Die bene van die reghoekige driehoek het lengtes van 6 eenhede en 8 eenhede (ons kry dit van die koördinaatwaardes).

Dus, die skuinssy se lengte is $\sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ eenhede

Dus, in die Cartesiese voorstelling aan die linkerkant is $r = 10$.

Stap 3: Bereken die drie verhoudings deur gebruik te maak van die definisies:

$\sin \alpha = \frac{y}{r} = \frac{-8}{10} = -\frac{4}{5}$ of presies –0,8 as jy desimale verkies.

$\sec \alpha = \frac{r}{x} = \frac{10}{-6} = -\frac{5}{3}$ of –1,67 afgerond tot twee desimale plekke in desimale.

$\cot \alpha = \frac{x}{y} = \frac{-6}{-8} = \frac{3}{4}$ of presies 0,75 in desimale.

Maak seker dat jy tevrede is met die tekens van die waardes deur na te gaan of hulle te pas by die eienskappe.

Oefeninge Oefen om uitsette van koördinate te bepaal

31 Bereken sin θ, cos θ, tan θ en hulle resiproke vir die volgende punte:

(a) $(x; y) = (2{,}5; -7{,}5)$

(b) $(x; y) = (0{,}16; 0{,}12)$

(c) $(x; y) = (-1; 4)$

(d) $(x; y) = (-2{,}5; -7{,}5)$

(e) $(x; y)$ in die tweede kwadrant met $y = 5{,}34$ en $r = 7{,}65$

(f) $(x; y)$ in die vierde kwadrant met $x = 1{,}1$ en $r = 1{,}5$

(g) $(x; y)$ in die derde kwadrant met $x = -5$ en $r = 13$

(h) $(x; y)$ in die tweede kwadrant met $y = 0{,}33$ en $r = 0{,}77$

32 Gebruik jou sakrekenaar om die volgende te bepaal (rond af tot 2 desimale plekke).

(a) sin 92,81° (b) sin 219,4° (c) sin 30°

(d) sin 150° (e) sin 210° (f) sin 330°

(g) cos 92,81° (h) cos 219,4 (i) cos 88,3°

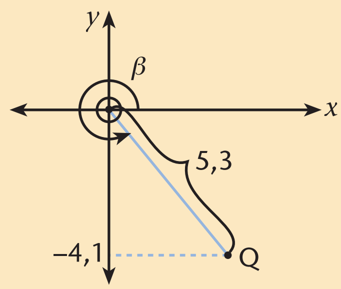
(j) cos 91,7° (k) cos 266,3° (l) cos 271,7°

33 Bereken die waardes van sin α en cos α vir $\alpha = 45°$, 135°, 225° en 315°.

34 Vir watter waardes van β sal sin β = cos β wees?

Uitgewerkte voorbeeld Vind die onbekende hoek

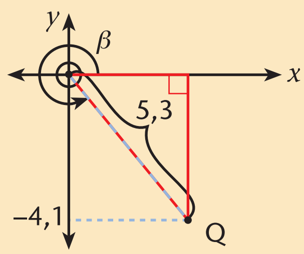
Probleem: Punt α lê in die derde kwadrant, ’n afstand 5,3 eenhede vanaf die oorsprong en het ’n y-koördinaat –4,1. Bepaal die waarde van β, sy hoekposisie, tot die naaste tiende van ’n graad:

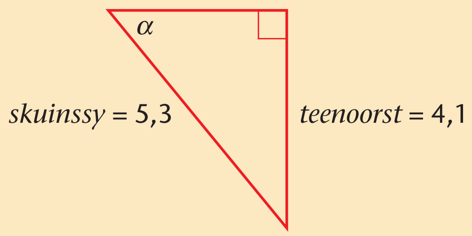


A. Standaardoplossing

Stap1: Identifiseer die trigonometriese verhouding. Aangesien y en r gegee word, weet ons dat ons sinus sal kan gebruik.

Stap 2: Gebruik die trigonometrie van reghoekige driehoeke. Identifiseer die reghoekige driehoek verskuil in die Cartesiese vlak, waar y jou die lengte van die teenoorstaande sy sal gee:





Let wel: Ons het die driehoek vergroot om dit duideliker te maak. Dit is gelykvormig aan die een links; dus is al die verhoudings dieselfde.

Let wel: Ons het die lengtes van die *skuinssy* en *teenoorstaande* sy van r en y af gekry.

Stap 3: Bepaal α

$\sin \alpha = \frac{4,1}{5,3}$

$\alpha = \sin^{-1}\frac{4,1}{5,3}$

$= 50,676\,910\,82\ldots°$

$= 50,7°$

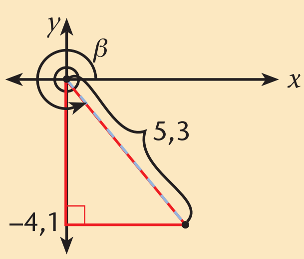
Stap 4: Interpreteer die waarde van α om die waarde van β te kry:

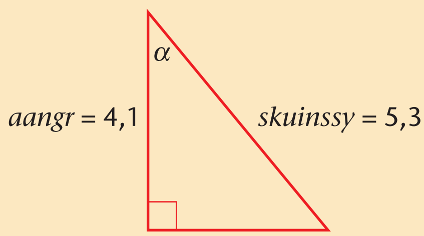
$\beta = 360° - \alpha = 360° - 50,7° = 309,3°$

B. Alternatiewe oplossing

Stap1: Besef dat jy ook kosinus kan gebruik om β te kry:

Stap 2: Dit kan soos volg gedoen word deur die ander verskuilde reghoekige driehoek te gebruik:





Let wel: Die y-waarde word gebruik om die lengte van die aangrensende sy van β te kry.

Stap 3: Dit beteken dat ons vir α oplos deur $\cos \alpha = \frac{4,1}{5,3}$. Dit gee $\alpha = 39,3°$.

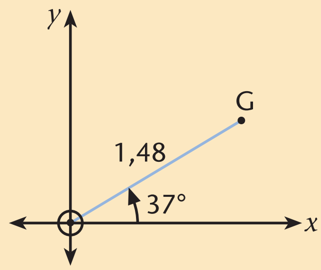
Stap 4: $\beta = 270° + \alpha = 270° + 39,3° = 309,3°$

Uitgewerkte voorbeeld Vind die onbekende koördinate

Probleem: ’n Punt G is 1,48 eenhede van die oorsprong en die lynsegment tussen die punt en die oorsprong vorm ’n hoek van 37° met die positiewe x-as. Bepaal die koördinate van G tot twee desimale plekke.

Oplossing:

Stap 1: Maak ’n skets



Let wel: Die skets lyk geloofwaardig: 37° is minder as 45°; trek dus die straallyn nader aan die x-as as aan die y-as. Probeer om sover moontlik realistiese diagramme te teken – dit is ’n goeie gewoonte en sal probleemoplossing en die nagaan van jou oplossing makliker maak.

Stap 2: Besluit watter koördinaat om eerste te bereken. Kom ons begin met x. Die hoek θ is aan ons bekend en ons het r, dus kan ons kosinus gebruik.

Stap 3: Stel ’n vergelyking op en los dit op:

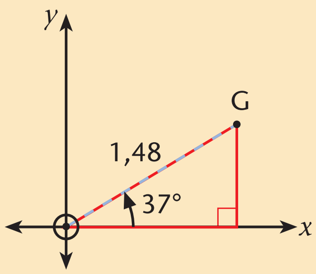
$$\frac{x}{1{,}48} = \cos 37°$$

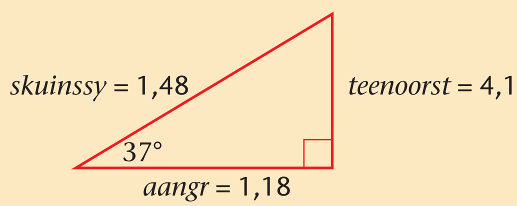
$$x = 1{,}48 \cos 37°$$

$$= 1{,}181\ 980\ 555\ \ldots$$

$$= 1{,}18$$

Stap 4: Bepaal nou y. Daar is twee maniere om dit te doen. Ons kan sin 37° gebruik en dit op ’n soortgelyke manier as in Stap 3 oplos. Ons kan die Stelling van Pythagoras gebruik. Daarvoor benodig ons ’n reghoekige driehoek. Identifiseer die driehoek in jou skets:





Stap 5: Los op vir y en kry die koördinate van G:

$$teenoorst^2 = (1{,}48)^2 - (1{,}18)^2$$

$$teenoorst = \sqrt{(1{,}48)^2 - (1{,}18)^2}$$

$$= 0{,}893\ 308\ 457\ 4\ldots$$

$$= 0{,}89$$

Dus, $y = 0{,}89$ en die koördinate van G is (1,18; 0,89).

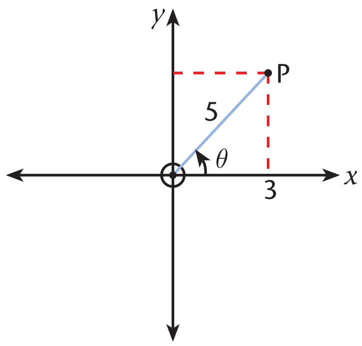
Nuttige kennis: vir enige punt op die Cartesiese vlak is daar vier getalle: x en y, die Cartesiese koördinate, en r en θ. Elke trigonometriese funksie hou verband met drie kwantiteite: θ en enige twee van x, y, en r. As jy dus enige twee van x, y, r, of θ het, kan jy die ander twee bereken.

In Oefening 35, in die probleme (a) – (h), word twee van die vier veranderlikes in elke vraag gegee en jy moet die ander twee bepaal.

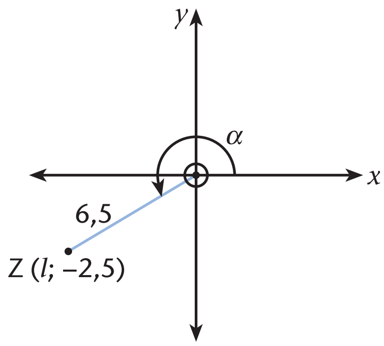
Oefening 35 Vind hoeke, koördinate, en radiaalafstande

35 Los die onbekende waardes in die volgende op (lengtes en Cartesiese koördinate tot twee desimale plekke, en hoeke tot een desimale plek waar nodig):

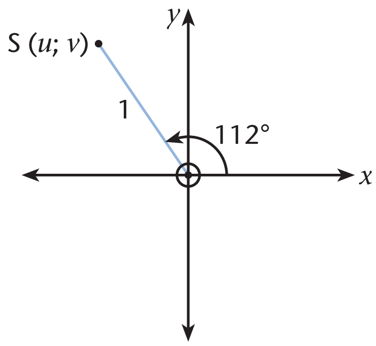
(a)



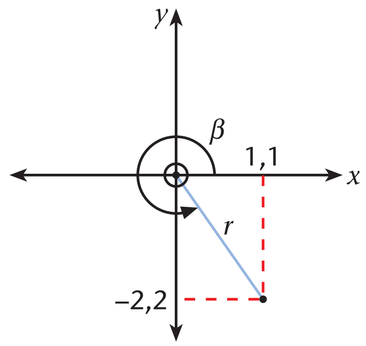
(b)



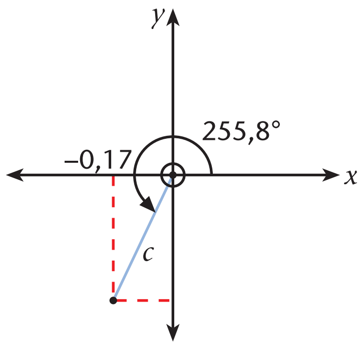
(c)



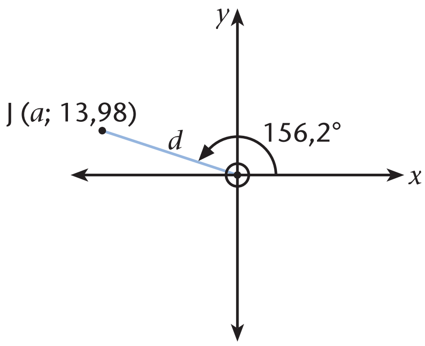
(d)



(d)



(e)



(g) Punt D(e; f) is 10 eenhede van die oorsprong teen ’n hoek van 325°.

(h) Punt F(3; 5,20) is p eenhede van die oorsprong teen ’n hoek α.

Die volgende twee is ’n bietjie meer van ’n uitdaging. Probeer hulle en kyk hoe ver jy kan kom.

(i) Punt W(a; f) is 2 eenhede van die oorsprong teen ’n hoek $\theta \in (90°; 360°)$, sodanig dat $\tan \theta = 1{,}2$ is.

(j) Punt C(m; e) is 5 eenhede van die oorsprong teen ’n hoek β, sodanig dat $\sin \beta = 0{,}6$ en $\cos \beta = -0{,}8$ is.

Voorbeeld ’n Ander tipe probleem op dieselfde tema

Probleem: Bepaal die waardes van $\cos \theta$ en $\tan \theta$, as $\sin \theta = \frac{3}{5}$ en $90° \leq \theta \leq 360°$.

Oplossing: Geen punt of lengte word gegee nie, slegs een verhouding en ’n definisieversameling vir θ.

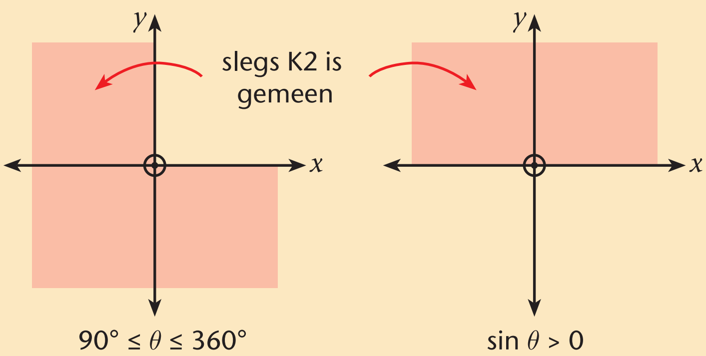
Stap1: Bepaal watter kwadrant met θ ooreenstem.

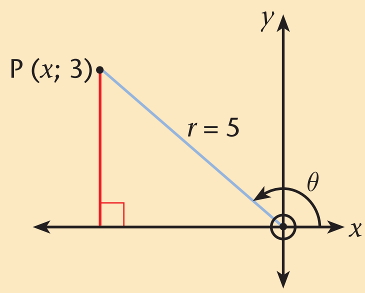
Twee belangrike dinge word vir ons gesê:

dat $90° \leq \theta \leq 360°$, wat K2, K3, en K4, behels, en

dat $\sin \theta$ is positief, wat K1 en K2 behels (waar y positief is).

Ons kan dit visualiseer deur die diagramme te gebruik:





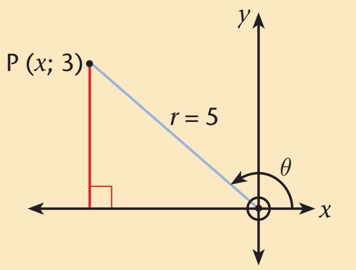
Ons kan dus sien dat ons in kwadrant 2 moet wees (dit is die enigste kwadrant wat aan albei vereistes voldoen).

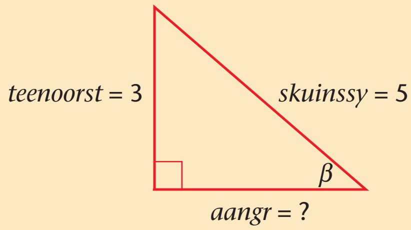
Stap 2: Stel die inligting voor op ’n Cartesiese diagram:

Ons benodig ’n manier om die inligting in die verhouding $\frac{y}{r} = \frac{3}{5}$ te wys. Aangesien die werklike grootte van ons diagram geen verskil maak nie, kan ons eenvoudig $y = +3$ en $r = 5$ maak (die maklikste keuse).

Let wel: Ons kon net sowel $y = 6$ en $r = 10$ gemaak het, of $y = 1{,}5$ en $r = 2{,}5$, of $y = 0{,}6$ en $r = 1$. Dit maak regtig geen verskil nie omdat die trigonometriese funksies uitsetverhoudings lewer.

Stap 3: Jy het nou ’n keuse: jy kan x bereken en dan $\cos\theta$ en $\tan\theta$, of jy kan θ bereken en dan $\cos\theta$ en $\tan\theta$. In albei gevalle is dit nodig om ’n reghoekige driehoek in die situasie te identifiseer:





Benadering 1: Bereken eers x en bepaal dan $\cos\theta$ en $\tan\theta$.

Doen dit deur ’n reghoekige driehoek te identifiseer en gebruik dan die Stelling van Pythagoras om x te bepaal (soos ons tevore gedoen het):

$aangr = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$

Dus is $x = -4$ (omdat dit op die negatiewe x-as is.) Derhalwe is:

$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{-4}{5} = -\frac{4}{5}$ en $\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{3}{-4} = -\frac{3}{4}$

Ons het die oplossings in rasionale vorm gelaat. Ons het glad nie die waarde van θ hier gebruik nie. Ons kan dit bereken indien ons wil, maar dit word nie gevra nie, dus sal ons dit nie doen nie.

Benadering 2: Bereken eers β en bepaal dan $\cos\theta$ en $\tan\theta$.

Doen dit deur ’n reghoekige driehoek te identifiseer (soos ons alreeds hierbo gedoen het) waar teenoorstaande ooreenstem met y, en gebruik $\sin\theta = \frac{3}{5}$ om β te bereken.

In ons reghoekige driehoek is:

$\sin\beta = \frac{teenoorst}{skuinssy} = \frac{3}{5}$

$\beta = \sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$

$= 36{,}869\ 897\ 65\ \ldots°$

$= 36{,}9°$

Dus is, $\theta = 180° - \beta = 180° - 36{,}9° = 143{,}1°$.

Daarom is $\cos\theta = \cos 143{,}1° = -0{,}799\ 684\ 585 \approx -0{,}80$

en $\tan\theta = \tan 143{,}1° = -0{,}750\ 821\ 238\ \ldots \approx -0{,}75$

Oefening

36 Gee die waardes van die volgende *sonder om* die waarde van die onbekende hoek te bereken.

Gebruik waar nodig sketse van die Cartesiese vlak om te wys hoe jy die kwadrant, of as, wat jy moet gebruik, bepaal, soos in die voorbeeld hierbo.

Skets ook 'n Cartesiese stelsel vir die berekenings wat jy doen, wys die hoek, straalafstand, en punt met koördinate.

Gee waar moontlik jou antwoorde in rasionale vorm.

(a) Gegee cosec $\alpha = -1{,}4$; $90° \leq \alpha \leq 270°$. Bepaal die waarde van sin α, cos α, en tan α.

(b) Bepaal cos β en cot β indien dit bekend is dat sin $\beta = 0$ en sec $\beta < 0$.

(c) Die hoek θ is stomp, met $\tan \theta = -\frac{5}{2}$. Bepaal cosec θ, sec θ, en cot θ.

(d) Vind die waardes van sin θ en cot θ indien $\cos \theta = \frac{5}{13}$ en $90° \leq \theta \leq 360°$.

(e) As $\sin \beta < 0$, $\cos \beta > 0$, en $\tan \beta = -0{,}5$ bepaal $\sin \beta + \cos \beta$.

(f) Gegee $3 \tan A - 17 = 0$ en $A \in (0°; 90°)$. Bepaal die waardes van sin A, cos A, $2 \sin A - \cos A$, en $3 \cot A.\sin A$.

(g) $\frac{5}{3} \sin \beta - 1 = \frac{1}{3}$ en $90° \leq \beta \leq 360°$. Gebruik dit om die waardes van: $\tan \beta$, $\frac{\sin \beta}{\cos \beta}$, $\sin \beta. \cos \beta$, en $\frac{1}{1 + \operatorname{cosec} \beta}$ te bepaal.

(h) Dit is bekend dat $\tan \theta = 1$ en $180° \leq \theta \leq 360$. Bepaal die waarde van sin θ, cos θ, en $\frac{\sec \theta}{\operatorname{cosec} \theta}$.

6.9 Oplossing van vergelykings wat trigonometriese funksies vir hoeke tussen 0° en 90° behels

Oefening Leer die trigonometriese funksies beter ken

37 Gebruik jou sakrekenaar om die volgende vergelykings op te los. Die hoeke is meestal skerp, soos jy tot dusver gesien het, maar sommige is 0° of 90°, wat jy nog nie teëgekom het nie.

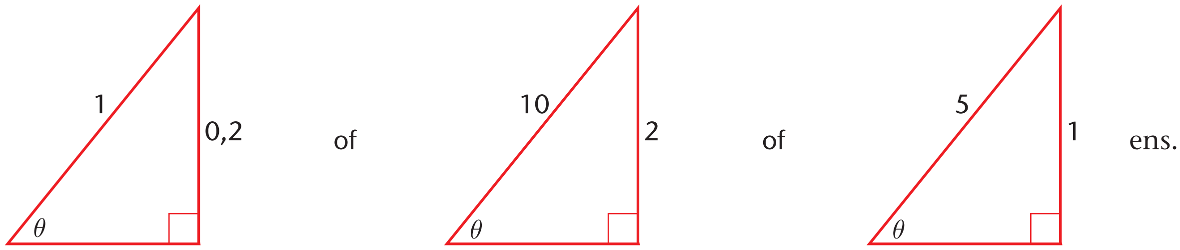
Stel die vergelyking voor met 'n reghoekige driehoek (slegs wanneer dit moontlik is). Wanneer dit moontlik is om 'n driehoek te teken, maak dit nie saak watter lengtes jy kies nie, *so lank as wat die verhoudings korrek uitwerk.*

Byvoorbeeld, vir (a) is dit onmoontlik om 'n driehoek te teken.

Byvoorbeeld, vir (b) het ons *teenoorst* ÷ *skuinssy* = 0,2;

dus kan jy *teenoorst* = 0,2 en *skuinssy* = 1 stel,

of jy kan *teenoorst* = 2 en *skuinssy* = 10, of *teenoorst* = 1 en *skuinssy* = 5 stel, ens.



(a) $\sin x = 0$

(b) $\sin x = 0{,}2$

(c) $\sin x = 0{,}4$

(d) $\sin x = 0{,}8$

(e) $\sin x = 1$

(f) $\sin x = 1{,}2$

(g) $\cos \alpha = 0$

(h) $\cos \alpha = 0{,}5$

(i) $\cos \alpha = 1$

(j) $\cos \alpha = 1{,}01$

(k) $\tan \theta = 0$

(l) $\tan \theta = \frac{1}{3}$

(m) $\tan \theta = \frac{2}{3}$

(n) $\tan \theta = 1$

(o) $\tan \theta = \frac{4}{3}$

(p) Waarom veroorsaak (f) probleme op jou sakrekenaar? Waarom veroorsaak (j) ook probleme? (**Wenk:** Die redes is dieselfde. Tweede **wenk:** Watter sy van 'n reghoekige driehoek is altyd die langste? **Derde wenk:** Waarom kan *teenoorst* ÷ *skuinssy* nooit groter as 1 wees nie? Wat van *aangr* ÷ *skuinssy*?)

(q) Verwys nou na (o). Anders as sinus en kosinus, het tangens geen probleem wanneer die verhouding groter as 1 is nie. Is dit vir jou duidelik waarom dit so is?

(r) Kan jy die inset en uitset in (k) as 'n helling interpreteer?

Eienskappe vir trigonometriese funksies in reghoekige driehoeke

$-1 < \sin\theta < 1$ $\qquad$ $-1 < \cos\theta < 1$ $\qquad$ $\tan\theta \in \mathbb{R}$

Sinus en kosinus is nie gedefinieer vir uitsette groter as 1 nie, maar tangens is.

Vergelykings wat bietjie algebra nodig het

Uitgewerkte voorbeeld

Probleem: Los op vir p: $\sin 38° = \frac{13}{11 + 2p}$ korrek tot drie desimale plekke.

Oplossing: Maak eers $11 + 2p$ die onderwerp van die vergelyking, en dan p:

$$\sin 38° = \frac{13}{11 + 2p}$$

$$11 + 2p = \frac{13}{\sin 38°}$$

$$2p = \frac{13}{\sin 38°} - 11$$

$$p = \frac{\left(\frac{13}{\sin 38°} - 11\right)}{2}$$

$$= 5{,}057\ 750\ 096\ \ldots$$

$$= 5{,}058$$

Let wel: Hierdie is nie 'n ware trigonometriese vergelyking nie, omdat die onbekende, p, nie in die insetuitdrukking van 'n trigonometriese funksie is nie. Om dit op te los, is dieselfde as om $0{,}616 = \frac{13}{11 + 2p}$ op te los.

Uitgewerkte voorbeeld

Probleem: Los op vir β, korrek tot 1 desimale plek, as $7{,}08 - 2{,}35\ \tan(\beta - 24{,}2°) = 1{,}47$ is.

$\beta - 24{,}2°$ lê tussen 0° en 90°.

Oplossing: Maak $\tan(\beta - 24{,}2°)$ eers die onderwerp en los dan op vir β.

$$7{,}08 - 2{,}35\tan(\beta - 24{,}2°) = 1{,}47$$

$$2{,}35\tan(\beta - 24{,}2°) = 7{,}08 - 1{,}47$$

$$\tan(\beta - 24{,}2°) = \frac{5{,}61}{2{,}35}$$

$$\beta - 24{,}2° = \tan^{-1}\left(\frac{5{,}61}{2{,}35}\right)$$

$$= 67{,}3°$$

$$\beta = 43{,}1°$$

Let wel: Hierdie is 'n ware trigonometriese vergelyking. Die onbekende is deel van die insetuitdrukking van tan.

Let wel: Hier aanvaar ons dat die uitdrukking $\beta - 24{,}2°$ waardes het wat *tussen* 0° en 90° val. Dit is omdat ons slegs die trigonometriese funksies in reghoekige driehoeke tot dusver gedefinieer het en die nie-90° hoeke in 'n reghoekige driehoek is altyd skerphoeke. Dit is om heeltemal eerlik met onsself te wees. In werklikheid sal ons sien dat dit enige reële waarde kan hê.

2154 TechMaths Afr G10 LB.indb 193 2015/11/25 4:13 PM

Oefening

38 Los die volgende vergelykings op, korrek tot die naaste tiende van ’n graad. Aanvaar dat die insetuitdrukking vir die trigonometriese funksies almal in die waardeversameling 0° tot 90° is:

(a) $\tan x = 7{,}5$

(b) $\tan(x + 20°) = 7{,}5$

(c) $2 \sin \alpha = 1$

(d) $2 \sin(\alpha - 15°) = 1$

(e) $\tan \frac{\beta}{3} = \sin 50°$

(f) $\frac{1}{2} \cos 2\alpha - 0{,}4 = 0$

(g) $1 = 3\frac{1}{5} - 3\sin 2q$

(h) $4 - 3 \cos(80° - 2\beta) = 2$

(i) $\cos 45° + 1 = \frac{2 - y \tan 45°}{3}$

(j) $\frac{1}{\sin(45° - \theta)} = 7$

(k) $3 \cos 2b + 5 = 9 \cos 2b$

(l) $1{,}72 - \frac{\tan 72{,}4° + \beta}{0{,}6} = 0{,}36$

(m) $\frac{1}{\tan x} - 3 = -2\frac{1}{2}$

(n) $1 + \frac{12{,}5}{1 + 3 \sin 5\alpha} = 7{,}25$

(o) $x - 1 = x \sin 30°$

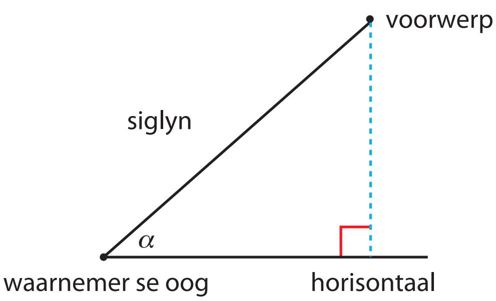
(p) $\frac{\tan 2(\theta - 30°)}{2} = \frac{3}{5}$

(q) Watter van die vergelykings hierbo is nie ware trigonometriese vergelykings nie?

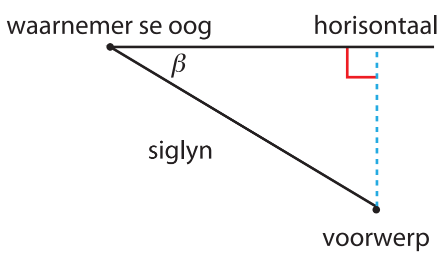
6.10 Oplossing van probleme wat reghoekige driehoeke behels

Hoogtehoeke en dieptehoeke

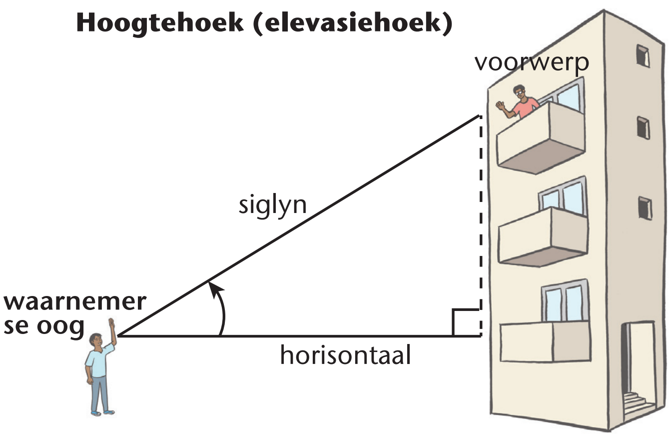
Hoogtehoek (elevasiehoek)

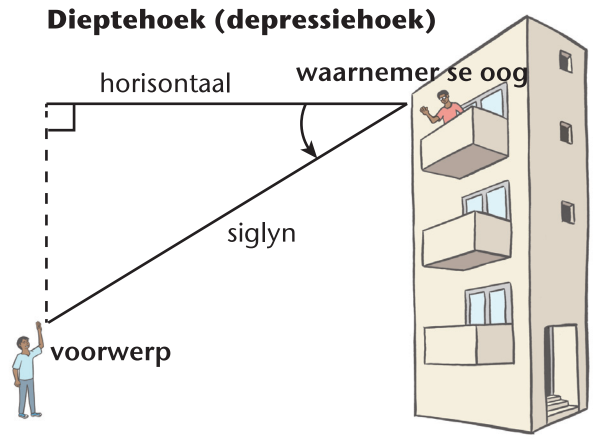


Dieptehoek (depressiehoek)



Let wel: Hoogte (elevasie) word ook inklinasie genoem, en diepte (depressie) word ook deklinasie genoem.



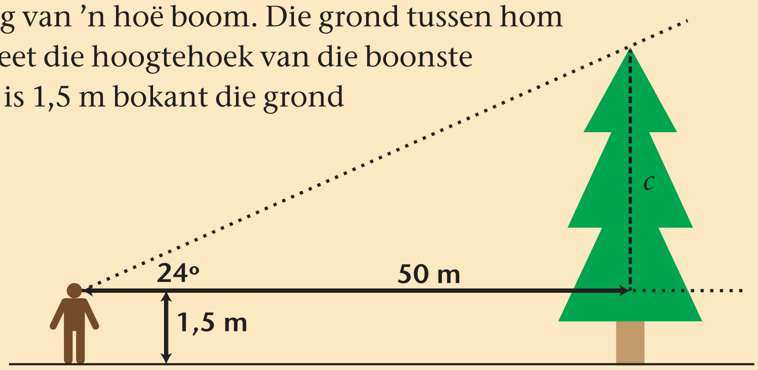


Uitgewerkte voorbeeld

Probleem: 'n Persoon staan 50 m weg van 'n hoë boom. Die grond tussen hom en die boom is heeltemal gelyk. Hy meet die hoogtehoek van die boonste punt van die boom en dit is 24°. Sy oë is 1,5 m bokant die grond wanneer hy die hoek meet.

Hoe hoog is die boom?

Oplossing:



Stap 1: Besef dat die probleem 'n reghoekige driehoek bevat.

Stap 2: Identifiseer die trigonometriese funksie wat dit wat jy weet in verband bring met wat jy moet bereken. Hier het ons die hoek van 24° en die aangrensende sy van 50 m. Ons wil die teenoorstaande sy c bereken. Ons moet dus tangens gebruik.

Stap 3: Pas die trigonometrie wat jy geïdentifiseer het toe en los op vir c:

$$\frac{c}{50} = \tan 24°$$

$$c = 50 \tan 24°$$

$$= 22{,}3 \text{ m}$$

Stap 4: Het ons die vraag beantwoord? Nee! Dit is nie die hoogte van die boom nie. Kom ons maak klaar:

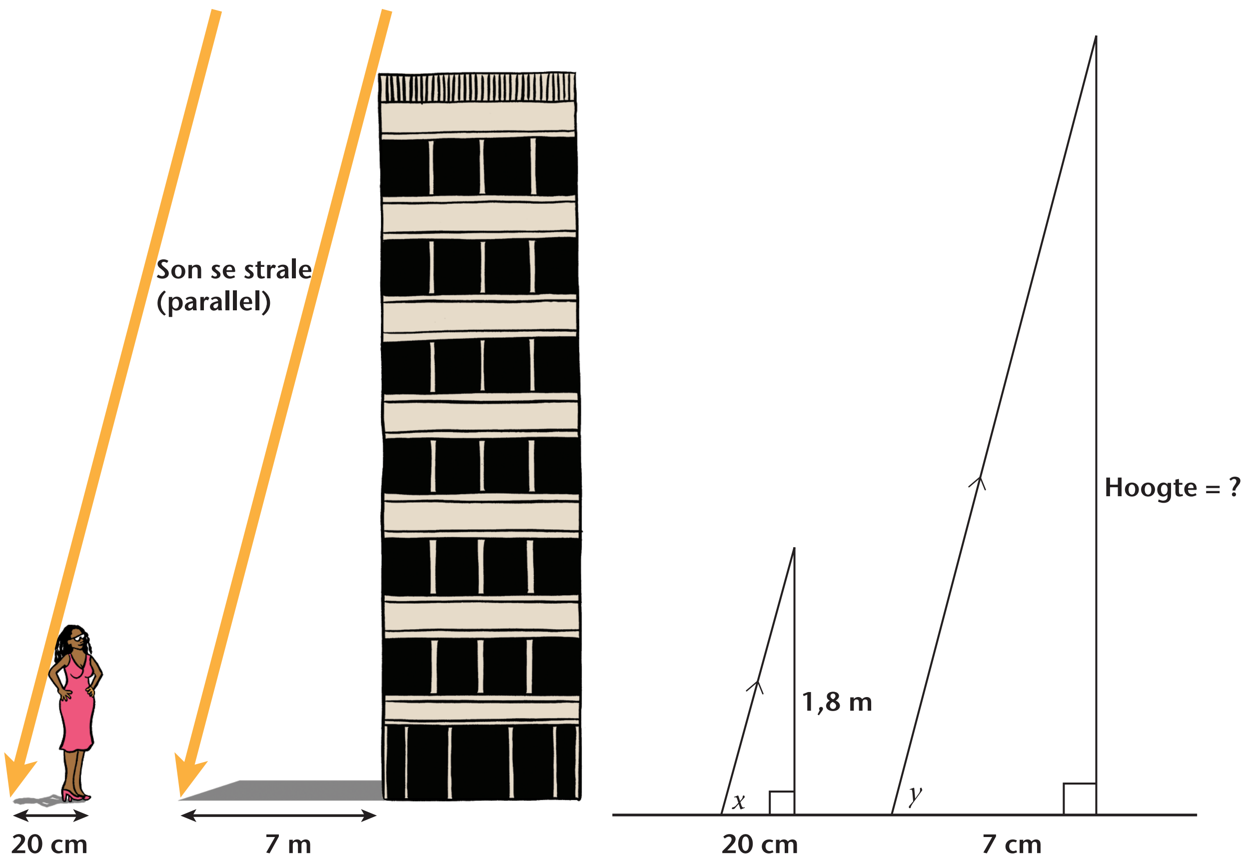
hoogte = 22,3 m + 1,5 m = 23,8 m

2154 TechMaths Afr G10 LB.indb 195 2015/11/25 4:13 PM

Oefeninge

39 ’n Ontwikkelaar besluit om die hoogte van die kantoorblok waarin sy werk te meet. Sy meet die lengte van die skaduwee wat die gebou gooi as 7 m. Terselfdertyd meet sy die lengte van haar eie skaduwee en kry 20 cm.

Ons kan die driehoeke teken om die twee situasies voor te stel (nie volgens skaal nie):



Soos in die klein driehoek aangedui, is die kantoorwerker 1,8 m lank.

(a) Wat kan jy sê omtrent die hoeke x en y? Gee ’n rede vir jou antwoord.

(b) Bereken die hoogte van die gebou. Is jy verplig om die trigonometriese funksies te gebruik om die hoogte vas te stel?

(c) Bereken die hoogtehoek van die son. Is jy verplig om trigonometriese funksies te gebruik om x te bepaal?

40 Die foto toon 'n gedeelte van die gewelkant van 'n huis (die fassieplank is wit).

Die bakstene is 22,3 cm by 7,1 cm en die voegvulling is 12 mm wyd.

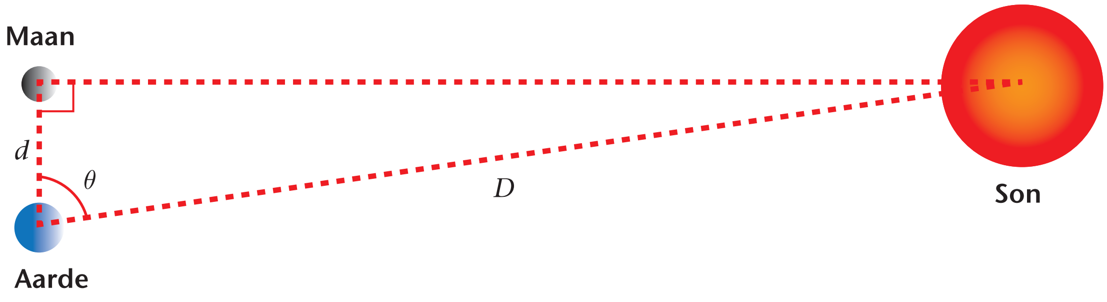
(a) Gebruik slegs die bogenoemde inligting en gee die helling van die dak in desimale vorm, afgerond tot die naaste tiende.

(b) Wat is die helling van die dak in grade, afgerond tot die naaste graad?

(c) 'n Praktiese vraag: Verduidelik waarom dit makliker is om 'n dak teen enige helling te maak as die gewel van hout gemaak is, in vergelyking met wanneer dit met bakstene gebou word. Miskien kan jy 'n paar tekeninge maak van verskillende maniere om die bakstene te lê om verskillende dakhellings te kry.

41 Aristarchus van Samos was 'n wiskundige en sterrekundige wat ongeveer 2 300 jaar gelede in Alexandrië in Noord-Afrika gestudeer en gewerk het. Hy was die eerste persoon in die opgetekende geskiedenis wat probeer het om die afstande tussen die Aarde en die Son, en die Aarde en die Maan te bereken. Hy is ook van die heel eerste persone om die verwantskappe tussen hoeke en lengteverhoudings in reghoekige driehoeke te bestudeer. Dit maak hom een van die ontdekkers van trigonometrie.

Sy grootste insig was dat wanneer die Maan van die Aarde af as 'n halfmaan gesien word, die lyn van die Aarde na die Maan 'n regte hoek vorm met die lyn van die Maan na die Son:



Die afstand tussen die Aarde en die Son sal dus die skuinssy van ’n denkbeeldige reghoekige driehoek wees, met die Maan by die regte hoek. Kom ons stel die Aarde–Maan afstand voor as d en die Aarde–Son afstand as D.

(a) Aristarchus het die hoek θ gemeet en 87° gekry. Gebruik hierdie waarde om die verhouding $D : d$ te bereken, afgerond tot die naaste heelgetal. Omskryf wat die waarde van die verhouding vir hom sou gesê het omtrent die twee afstande.

(b) Later is daar besef dat die waarde van θ wat Aristarchus gemeet het, nie akkuraat was nie. Die waarde korrek tot vier beduidende syfers, is 89, 83°. Gebruik hierdie syfer om ’n beter waarde vir die verhouding $D : d$ te bereken, afgerond tot die naaste heelgetal. Omskryf wat die waarde van die verhouding vir ons sê omtrent die twee afstande.

Let wel:

Trigonometrie soos ons dit nou ken met die funksies sin, cos en tan, het eers later (ongeveer ’n duisend jaar gelede) deur die werk van Arabiese wiskundiges verrys.

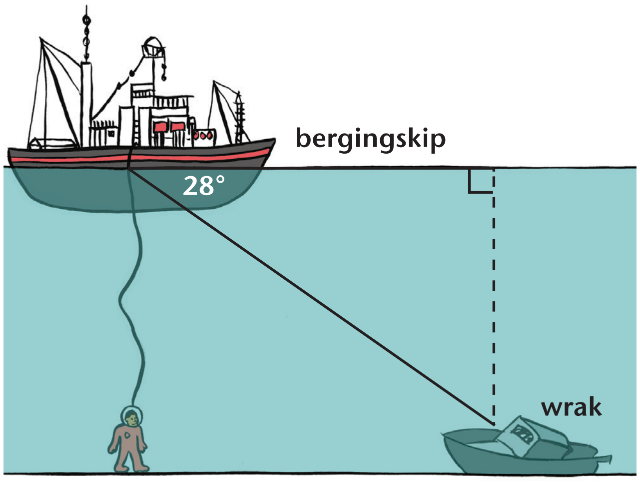
Aristarchus sou moontlik sy ‘berekening’ van die verhouding D:d gedoen het deur ’n skaaltekening van ’n reghoekige driehoek met ’n skerphoek van 87° te maak.

(c) Die fout in Aristarchus se waarde vir θ is ‘slegs’ 2,83°. Dit mag wel onbeduidend lyk. Vergelyk jou twee resultate in (a) en (b). Watter effek het hierdie klein foutjie in θ op die berekende waarde van $D : d$? Noukeurigheid en akkuraatheid is baie belangrik!

Aristarchus het nie ’n akkurate waarde vir d of D gehad nie. Ongeveer ’n eeu na Aristarchus se dood, het ’n ander sterrekundige, Hipparchus van Nicea, bereken dat d sowat 30 keer die Aarde se deursnit in grootte is. Hy het dit gedoen deur ’n ingewikkelde berekening wat aanvanklik deur Aristarchus voorgestel is, tesame met ’n aantal baie akkurate lesings van sy eie. Die waarde van 30 keer die Aarde se deursnit, is verbasend naby aan die aanvaarde moderne waarde.

(d) Gebruik die moderne waarde van die Aarde se deursnit, 12 742 km, om die afstand tussen die Aarde en die Son te bereken.

42 ’n Bergingskip probeer die ligging van ’n skeepswrak vasstel. Die bergingskip se sonar dui aan dat die wrak teen ’n dieptehoek van 28° onder die watervlak is. Oseaankaarte dui aan dat die gemiddelde diepte van die water naby die wrak 50 m is. ’n Duiker met ’n drukvaste duikpak word in die water direk onder die bergingskip neergelaat. Daar is ’n pyp wat die duiker van lug voorsien, vanaf ’n kompressor op die bergingskip.

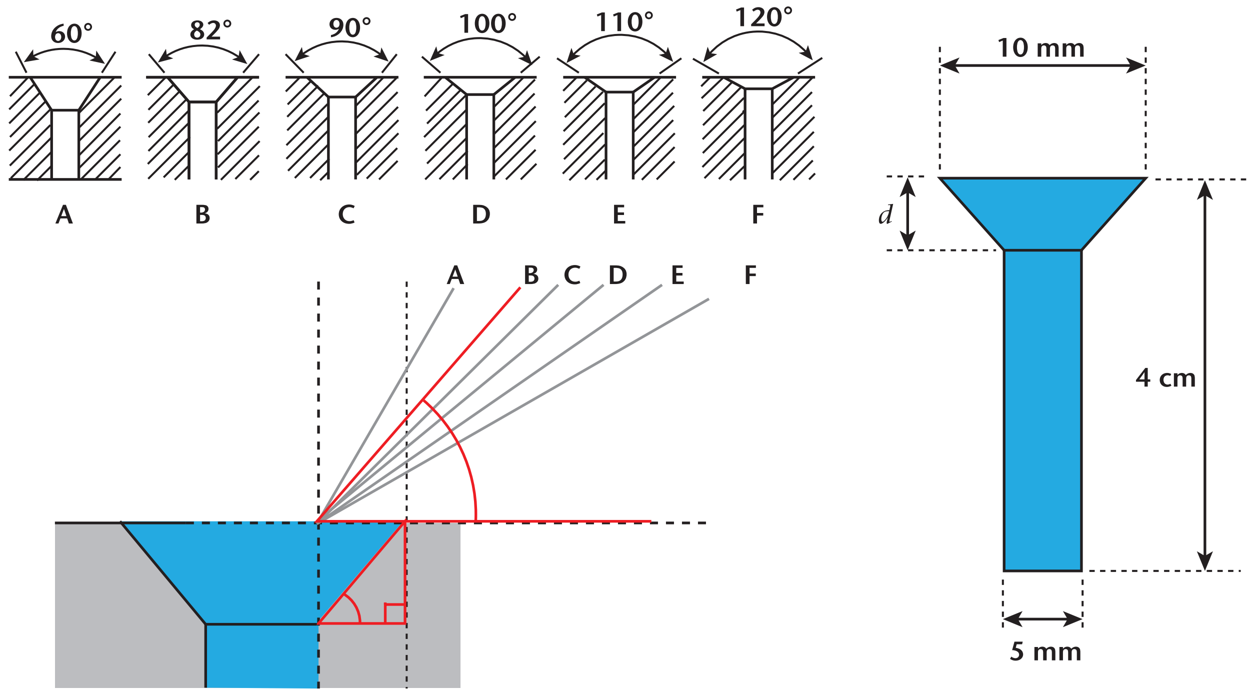


(a) Die lugpyp wat die duiker met die bergingskip verbind, is 110 m lank. Kan die duiker die wrak bereik?

(b) Hoe ver sal die duiker op die oseaanvloer moet loop om die wrak te bereik?

43 Versinkingsdiepte en afkantingshoek: Wanneer mens met hout of metaal werk, is dit dikwels nodig om ’n skroef, ’n klinknael, ens. te versink. Die gat vir die skroef of klinknael word eers geboor. Daarna word die afkanting versink tot die nodige diepte.

’n Dwarssnit van ses algemene afkantingshoeke word getoon, asook twee dwarssnitte van die geboorde gat met die versonke afkanting.



Die materiaal wat geboor moet word, is 4 cm dik. Die boorgat is 5 mm in deursnit. Die deursnit van die versonke gat is 10 mm. Die hoek wat die versonke gat met die horisontaal maak, is θ. Die diepte van die versonke gat is d.

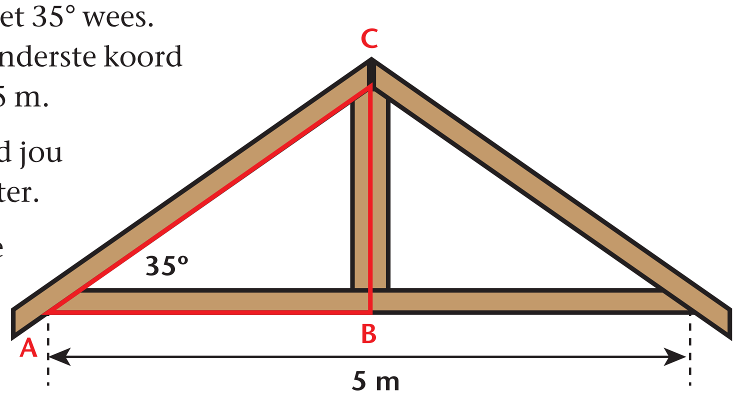
Bereken die waarde van d vir elk van die ses afkantingshoeke. Organiseer die ses hoeke en jou resultate in ’n tabel.

44 Jy is besig om dakkappe uit hout te maak vir ’n aanbouing wat jy doen.

Die hellingshoek van die dakkappe moet 35° wees. Die lengte van die onderkant van die onderste koord (die horisontale onderste raamdeel) is 5 m.

(a) Bereken die lengtes AC en BC. Rond jou antwoord af tot die naaste sentimeter.

(b) Is die lengtes wat jy bereken het die werklike lengtes van die hoofstyl (die vertikale raamdeel) en die boonste koord (die skuins raamdele)?



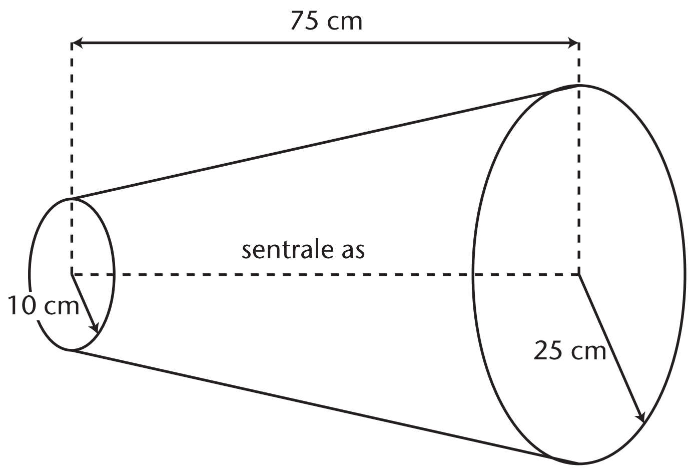
Gestel die balke, wat gebruik word om die vyf komponente van die dakkap te maak, is 10 cm breed.

(c) Watter werklike lengte van die balk sal nodig wees om die hoofstyl te maak? NB: Dit is voordat dit volgens vorm gesny word.

(e) Teken 'n diagram van die hoofstyl wat wys hoe jy dit sal sny in die vorm soos die diagram toon. Teen watter hoek moet die twee skuins kante aan die bokant gesny word?

45 'n Houtwerker is besig om 'n stelsel te ontwerp om saagsels bymekaar te maak. Dit sal aan 'n stofsuier gekoppel word. Sy besluit om 'n sikloon-stofvanger uit plaatmetaal te maak. Dit word 'n sikloon genoem, omdat die lug daarbinne in 'n spiraal beweeg, soos die weerverskynsel met dieselfde naam.

Die radius van die boonste opening moet 25 cm wees, en die onderste opening 10 cm. Die tregter is 75 cm hoog.



(a) Teken 'n dwarssnit van die stofvanger soos van die kant gesien, m.a.w. 'n dwarssnit deur die vlak van die as. Vul die drie afmetings in.

(b) Bereken die hoek waar die sye van die tregter in aanraking kom met die sentrale as. (**Wenk:** jy moet 'n geskikte reghoekige driehoek identifiseer wat die hoek en lengte-inligting insluit.)

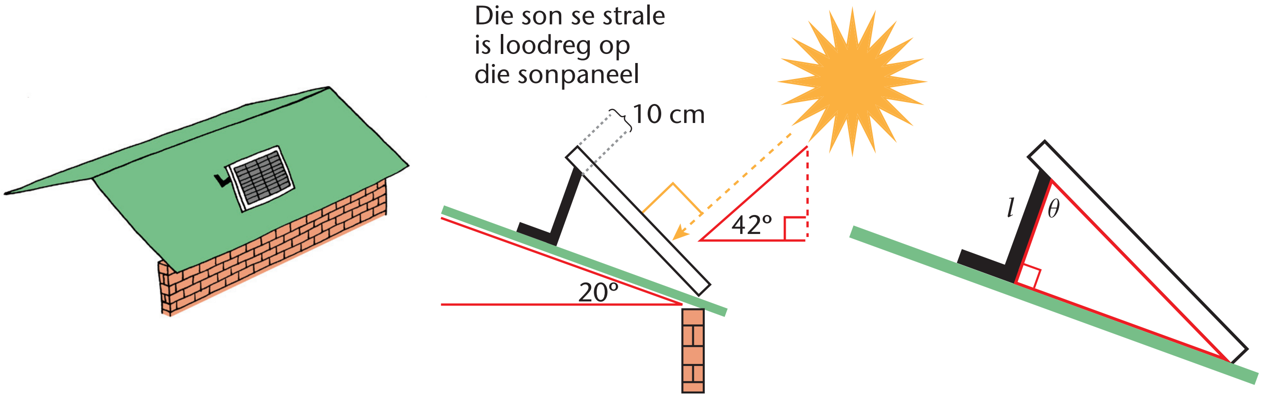
46 Sonpanele skakel ligenergie om in elektriese energie. Hulle werk die beste wanneer hulle skuins staan, sodat die sonstrale loodreg daarop val. Die volgende diagram toon 'n dwarssnit van 'n dak met 'n sonpaneel wat direk na die son toe wys.

Van die driehoeke en hoeke is reeds vir jou ingeteken. Die dak het ’n helling van 20°. Die hoogtehoek van die son in die middel van die dag is 42°.

(a) Wys dat die hoek θ, 68° moet wees.

(b) Die sonpaneel is 80 cm by 80 cm. Bereken die lengte van die stutbalk tot die naaste sentimeter.

(c) Uitdaging: Dink prakties: Dink jy dat hierdie sonpaneel steeds behoorlik sal werk na ’n paar maande? Wanneer sal dit weer op sy beste werk?



6.11 Die grafieke van die basiese trigonometriese funksies

Kyk na AANHANGSEL 1 aan die einde van die hoofstuk as jy hersiening of wenke oor stipping (inset; uitset) van koördinaatpare van ’n funksie nodig het, en hoe om uitsette vanaf insette of insette vanaf uitsette op ’n grafiek te lees.

Stipping van die waarde van sin θ en cos θ teenoor θ: die grafiek van die sinus- en kosinusfunksies

Oefeninge Die inset-uitsetgrafieke vir die sinus- en kosinusfunksies

Jy sal twee velle grafiekpapier nodig hê vir die volgende twee vrae.

47 Stip die uitsette van sin θ vir $0° \leq \theta \leq 360°$.

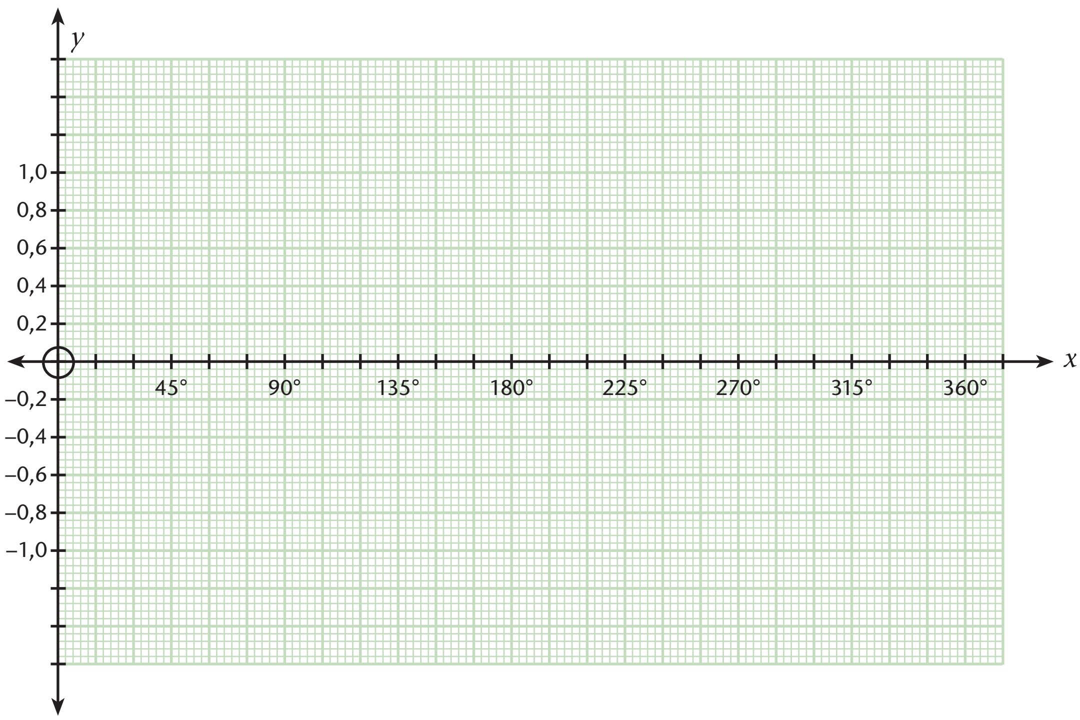
(a) Gebruik die TABELMODUS op jou sakrekenaar om ’n inset-uitset tabel te voltooi (of bereken elke uitset een-vir-een soos vroeër) vir 25 insethoeke: begin by 0° en eindig by 360°, met spronge van 15° (rond af tot een desimale plek).

(b) Die tabel is op sigself ’n manier om ’n funksie voor te stel. Jy kan iets van die sinusfunksie leer deur sorgvuldig te kyk na die waardes wat jy bereken het. Sien jy die patroon in die waardes? Probeer om dit te beskryf.

(c) Stel nou die uitsetwaardes en insetwaardes op ’n Cartesiese ruitenet voor, soos volg:

- Plaas jou vel grafiekpapier in ’n ‘landskap’-posisie (langste sye horisontaal).
- Trek ’n horisontale as dwarsoor die middel van die ruitenet en ’n vertikale as langs die linkerkant af; die oorsprong is in die middel van die linkerkant van die ruitenet.
- Die horisontale as sal die θ -as wees (m.a.w. die inset-as), en die vertikale as sal die sin θ-as wees (die uitset-as).
- Kies ’n skaal (in grade) vir die θ-as (maak dit so groot as moontlik – jy behoort 24 blokke dwarsoor te hê); kies ’n vertikale skaal vir sin θ van –1 tot 1 (maak dit weer eens so groot as moontlik – jy behoort 8 blokke bo en onder die oorsprong te hê; gebruik 5 blokkies om spronge van 0,2 eenhede te maak).

Jou grafiekpapier behoort so te lyk:

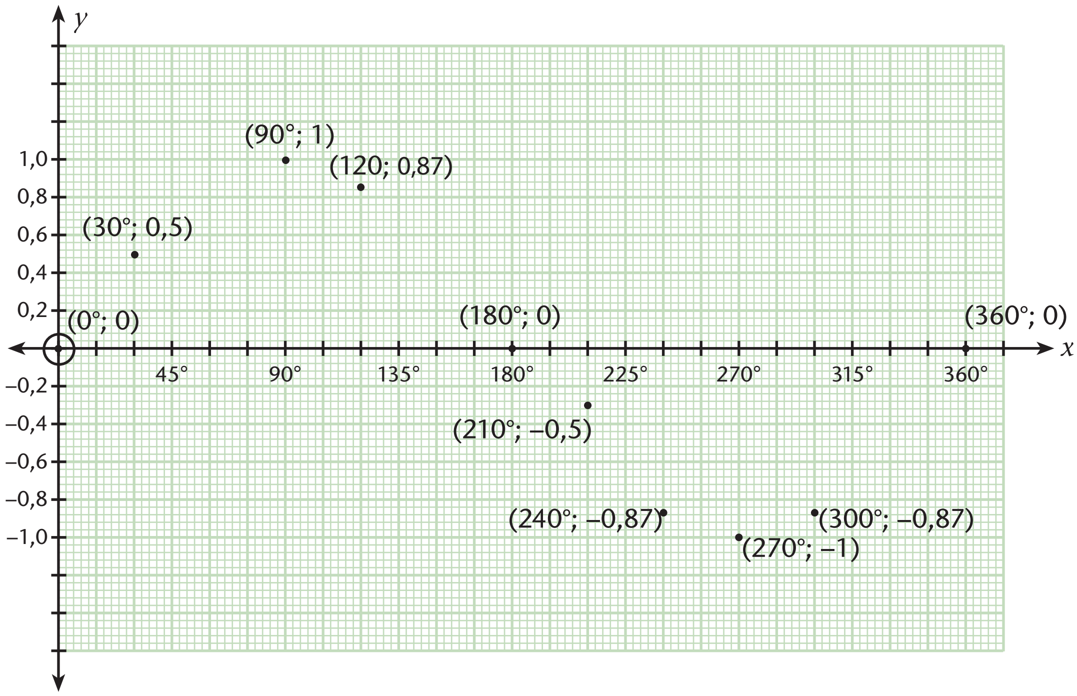


- Stip nou die 25 (θ; sin θ) koördinate.
- Trek ’n gladde geboë lyn deur al 25 koördinate (NB: moet hulle nie met reguit lyne verbind nie – trigonometriese funksies bevat nie reguitlynfunksies nie).

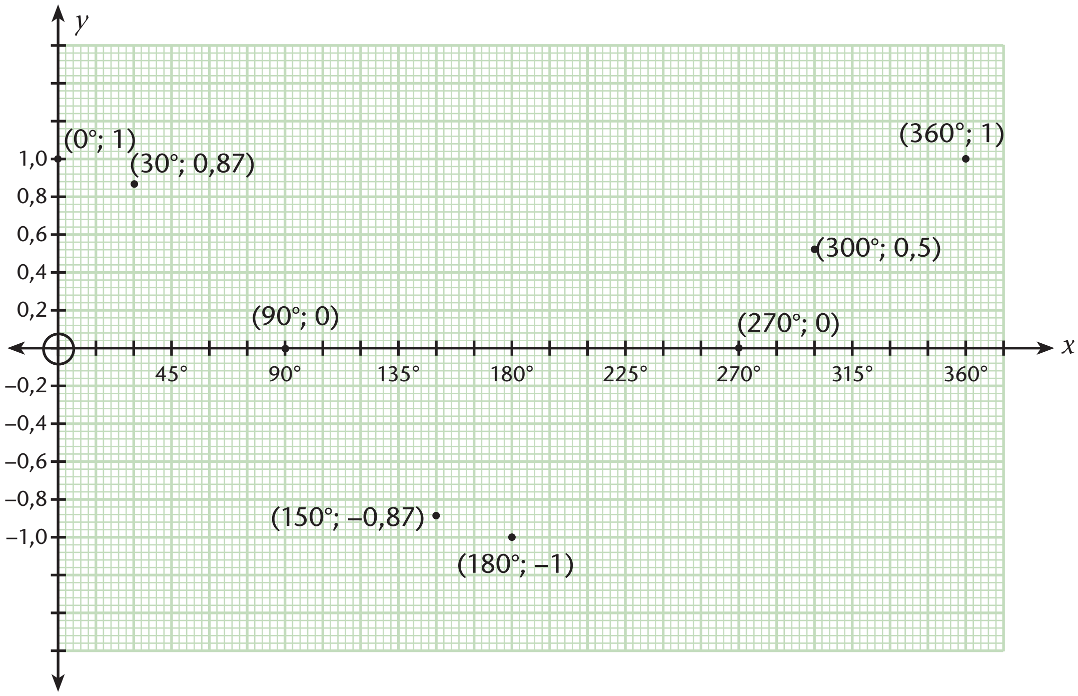
(d) Beskryf die grafiek wat jy geteken het.

- Hoe vergelyk die vorm van die deel van die grafiek tussen 0° en 180° met die deel tussen 180° en 360°?
- Hoe vergelyk die deel tussen 0° en 90° met die deel tussen 90° en 180°?
- Wat sien jy nog? Beskryf enige ander spesiale eienskappe van die grafiek wat jy sien.

Die volgende toon sommige van die punte wat jy gestip het. Maak seker dat jy saamstem daarmee. Indien nie, moet jy teruggaan en al jou punte weer nagaan.



48 Stip die uitsette van cos θ vir $0° \leq \theta \leq 360°$.
Herhaal al die stappe en beantwoord al die vrae van die vorige oefening vir die kosinusfunksie op die ander vel grafiekpapier.



Sommige van die punte wat jy gestip het, word hieronder gewys vir jou om na te gaan hoe suksesvol jy die taak afgehandel het.

Terminologie

Maksimum en minimum punte op ’n grafiek: Hierdie punte is uitsetwaardes op ’n grafiek wat groter of kleiner is as die naaste uitsetwaardes.

Draaipunt: Indien die grafiek gladde krommes naby die maksimum of minimum punte het, noem ons dit draaipunte.

Amplitude van ’n sinus- of kosinusgrafiek: Dit is die maksimum afstand vanaf die inset-as na die grafiek. Vir sinus en kosinus is dit 1. Amplitude is ’n positiewe kwantiteit.

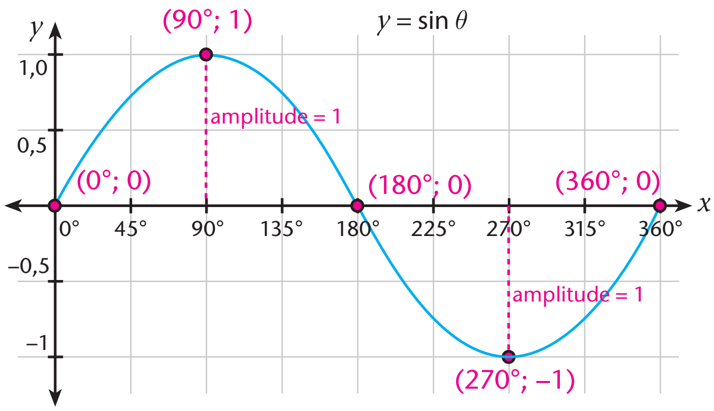
Die grafieke van die drie basiese trigonometriese funksies

Die funksies $y = \sin \theta$, $y = \cos \theta$, en $y = \tan \theta$ kan as grafieke in die Cartesiese vlak voorgestel word deur inset-uitsetkoördinate $(\theta; y)$ te stip.

- Die horisontale as word ook die x-as of inset-as genoem.
- Die vertikale as word ook die y-as of uitset-as genoem.

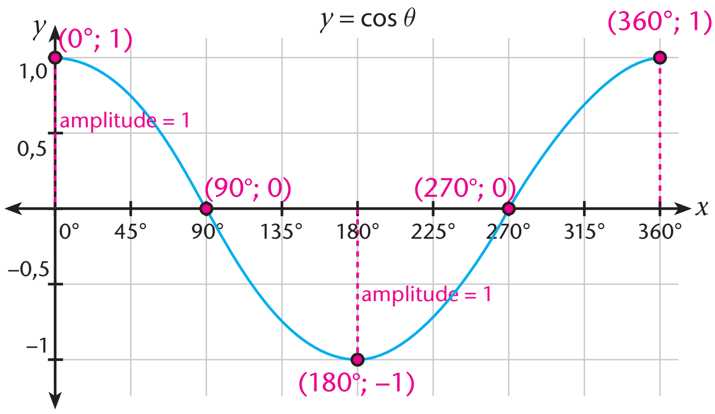
Eienskappe van die grafiek van $y = \sin \theta$

- sinusoïdaal (golwende vorm)
- het draaipunte by (90°; 1) en by (270°; –1)
- draaipunte is in ooreenstemming met met ’n amplitude van 1 eenheid
- het positiewe y-waardes vir $0° < \theta < 180°$, en negatiewe waardes vir $180° < \theta < 360°$
- neem toe van 0° tot 90°, neem af van 90° tot 270° en neem dan weer toe van 270° tot 360°
- het afsnitte by (0°; 0), by (180°; 0), en by (360°; 0)



Eienskappe van die grafiek van $y = \cos \theta$

- sinusoïdaal (golwende vorm)
- het draaipunte by (0°; 1), by (180°; –1) en by (360°; 1)
- draaipunte kom ooreen met amplitude van 1 eenheid
- het positiewe y-waardes vir $0° < \theta < 90°$ en $270° < \theta < 360°$, en negatiewe waardes vir $90° < \theta < 270°$
- neem af van 0° tot 180° en neem toe van 180° tot 360°
- het afsnitte by (0°; 1), by (90°; 0), en by (270°; 0)

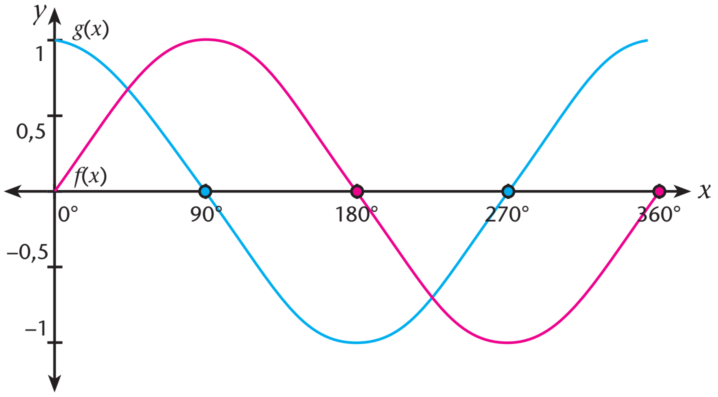


Vergelyk die grafieke van die sinus- en kosinusfunksies

Jy het waarskynlik al besef dat die sinus- en kosinusfunksies dieselfde vorm het – dit is korrek! Eintlik is hulle **kongruent** aan mekaar.

Oefening

49 Die grafieke van sin θ en cos θ is hier op dieselfde assestelsel getrek.



(a) Watter een is die sinusgrafiek en watter een is die kosinusgrafiek?

(b) Die kosinusgrafiek het 'n maksimum van +1 by 0°. Is daar nog 'n ander maksimum? Het dit 'n minimum, en indien wel, by watter insethoek? Wat is die minimum waarde? Sien jy dit wat jy verwag van die eienskappe van die kosinusfunksie?

(c) Ondersoek die maksimum en minimum waardes van die sinusfunksie. Sien jy dit wat jy verwag van die eienskappe van die sinusfunksie?

(d) Is die maksimum en minimum punte op die twee grafieke ook draaipunte? Verduidelik waarom. Gee die koördinate van die draaipunte.

(e) Stel jou voor dat jy die twee grafieke elk in vier dele gaan verdeel, by 90°, 180° en 270°.

Watter dele van die twee grafieke is identies (kongruent) aan mekaar? (**Wenk:** Die deel van die sinusgrafiek tussen 0° en 90° is byvoorbeeld kongruent aan die deel van die kosinusgrafiek tussen 270° en 360° – jy kan self die ander doen).

Belangrik: die sinus- en kosinusgrafieke is eintlik identies, hulle het net met die θ-as langs verskuif. Die vorm van die grafieke word **sinusoïdaal** genoem. Dit is die klassieke golfvorm wat in so baie praktiese situasies gebruik word, bv. om watergolwe, klankgolwe, EM golwe, wisselstroom, ens. te beskryf. Jy sal 'n baie beter begrip van waarom die twee grafieke kongruent is, in Graad 11 en 12 ontwikkel.

Lettersimboolkonvensies: misbruike en verwarring ten opsigte van x, y, en θ

Wat hier geskryf is, mag jou dalk verwar. Trouens, dit is verwarrend. Jy moet dalk weer hierheen terugkom en dit lees en weer lees om te begin sin maak daarvan.

Ons sal die drie funksies dikwels soos volg skryf:

$y = \sin \theta$ $\qquad$ $y = \cos \theta$ $\qquad$ $y = \tan \theta$

y stel die uitset *verhouding* hier voor, terwyl θ die insethoek voorstel.

Dit maak ook sin wanneer ons na die Cartesiese definisie van sinus kyk:

$\frac{y}{r} = \sin\theta$ indien ons $r = 1$ hou, dan maak $y = \sin\theta$ volkome sin.

Dit maak ook sin vir tangens, want

$\frac{y}{x} = \tan\theta$ beteken $y = \tan\theta$ indien ons $x = 1$ hou.

Het ons nou x met y vervang?
Ja, maar ons het nie dieselfde y bedoel as in $y = r\sin\theta$ nie.
Om $y = r\sin\theta$ te skryf, waar y die rol van x inneem, is wiskundig aanvaarbaar, maar verwarrend.

Dit maak minder sin vir kosinus omdat die Cartesiese definisie x insluit, maar nie y nie:

$\frac{x}{r} = \cos\theta$ beteken $x = \cos\theta$ as $r = 1$ is.

Nog erger, ons stel dikwels die insethoek voor as x in plaas van θ:

$y = \sin x$ $y = \cos x$ $y = \tan x$

Hoe maak ons sin uit hierdie verwarring?

Ons sal pragmaties wees.

Vir die Cartesiese definisies van sinus, kosinus, en tangens:

- x en y sal die koördinate van die punt P(x; y) wees wat 'n afstand r vanaf die oorsprong is, by hoek θ (wat die insethoek voorstel).
- **NB:** hier maak ons *nie* vir y die uitset van inset x nie; die twee asse is *nie* inset-uitset-getallelyne nie. Die (x; y) koördinate is bloot posisies van punte in hierdie situasie.

Pragmaties is 'n baie goeie woord om by jou woordeskat te voeg. Dit beteken om dinge net genoeg te vereenvoudig sodat ons kan aanbeweeg. Om pragmaties te wees, is om nie vasgevang te word in detail wat jou vooruitgang sal vertraag nie. Suksesvolle leerders weet wanneer om pragmatiese keuses te maak.

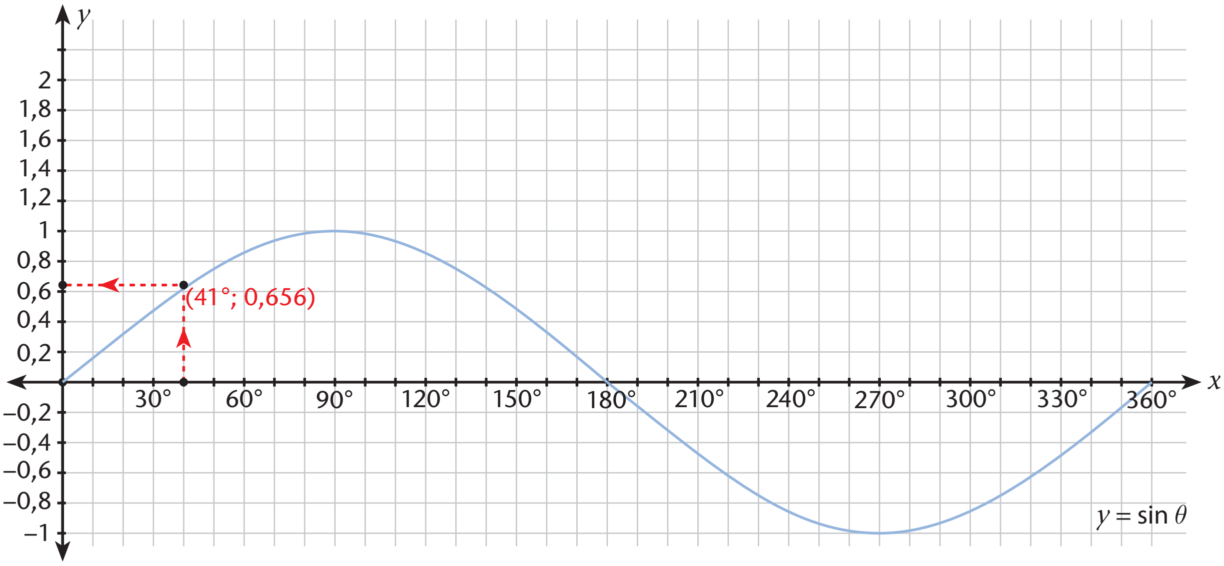
Vir die funksie-insette en -uitsette van sinus, kosinus, en tangens:

- Insethoeke kan voorgestel word deur θ of x, en uitsetverhoudings word voorgestel deur y of die funksiesimbool, bv. $f(\theta)$ as die inset deur θ voorgestel word, of $f(x)$ as die inset deur x voorgestel word. Blaai nou vier bladsye vorentoe na die paragraaf oor notasies.
- **NB:** Wanneer ons die grafiek van die funksie stip, stel die koördinaatpaar (θ; y), of (x; y), (*inset; uitset*) pare voor. Die twee asse is inset-uitset-getallelyne. In hierdie geval is die koördinaat *nie* die posisie van 'n punt by 'n sekere hoek tot die positiewe x-as nie.

Uitstrekking, saampersing en omkering van grafieke

Oefening Om jou te laat dink

50 Bestudeer die grafiek van die funksie $y = \sin \theta$. Die waarde van sin 41° is 0,656. Ons kan die inset-uitsetkoördinaat $(\theta; y) = (42°; 0{,}656)$ stip:



Volg die rigting van die pyltjie met die stippellyn langs vanaf inset 41° na uitset 0,656.

(a) Ons kan ’n ander funksie neerskryf wat op sinus gebaseer is: $y = 2 \sin \theta$, waar θ die inset is en die uitset $2 \times \sin \theta$ is.

- Bereken die uitset van hierdie nuwe funksie vir die inset 41°. Skryf die inset-uitset as ’n koördinaatpaar.
- Moenie die punt stip nie. Beskryf waar jy dit sal stip. Waar sal die punt wees in vergelyking met die punt (41°; 0,656) van die eerste funksie?

(b) Ons kan nog ’n ander funksie neerskryf: $y = \frac{1}{4} \sin \theta$.

- Bereken die uitset hiervan by 41° en gee die inset-uitset koördinaatpaar.
- Beskryf waar hierdie punt sal wees in vergelyking met die punt (41°; 0,656).

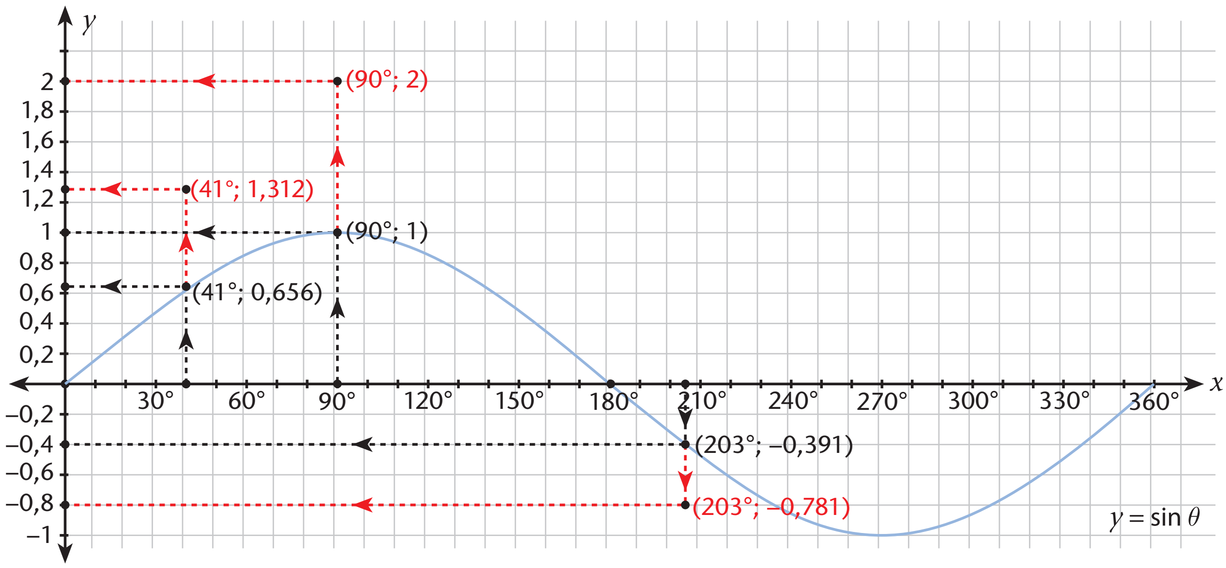
(c) Hier is ’n vierde funksie: $y = -\sin \theta$. Beantwoord dieselfde vrae as voorheen.

(d) Skryf die volgende tabel oor en voltooi dit (die funksies word nou *f*, *g*, ens. genoem)

θ	**f** $y = \sin \theta$	**g** $y = 2 \sin \theta$	**h** $y = \frac{1}{4} \sin \theta$	**k** $y = -\sin \theta$
41°				
90°				
180°				
203°				

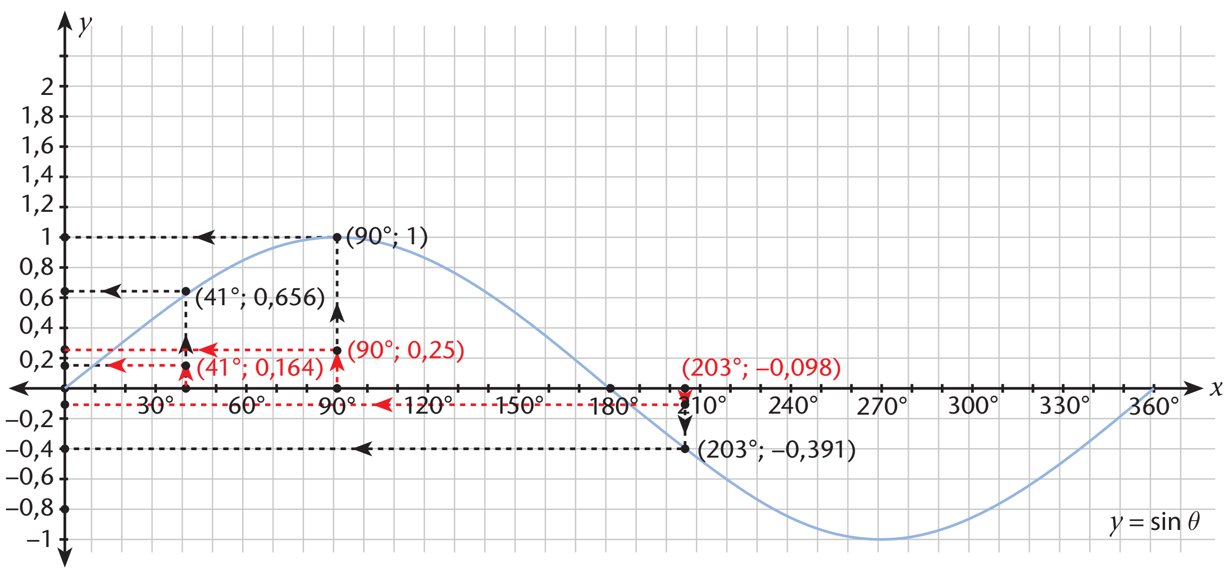
Wat het ons geleer?

Vergelyk die funksie g met f (funksie g se uitsette is in rooi):



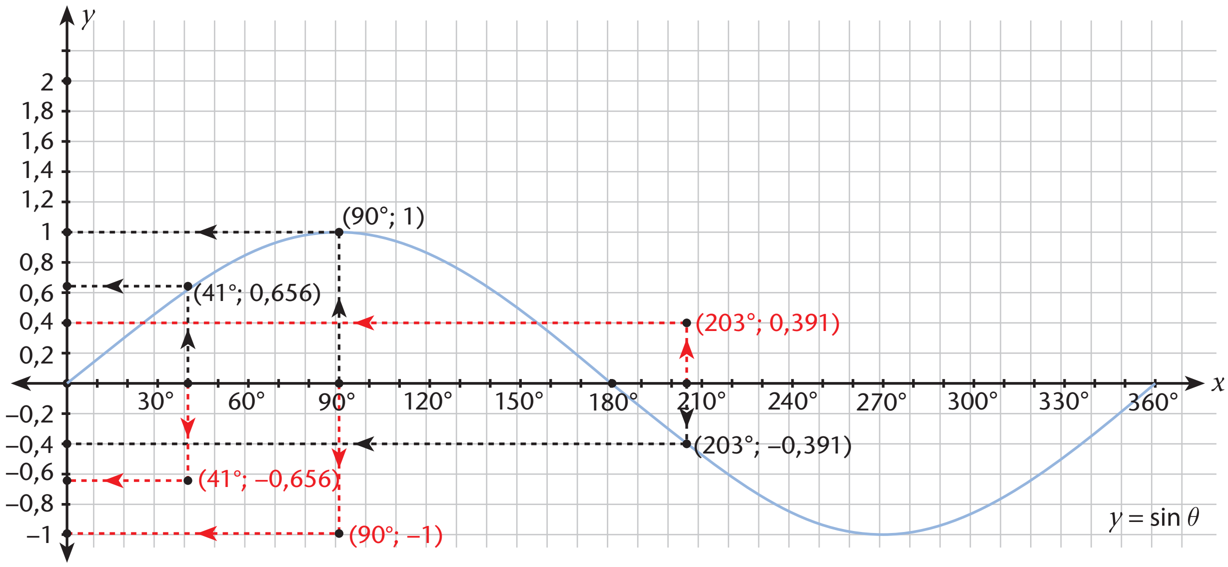
- Vir enige insethoek kies ons die uitset van g wat twee maal die uitset van f is as gevolg van die faktor van 2 (die koëffisiënt).
- Dus, vir elke θ-koördinaat is die y-koördinaat van die grafiek van g twee maal so ver van die θ-as af vir f.

Vergelyk die funksie h met f:



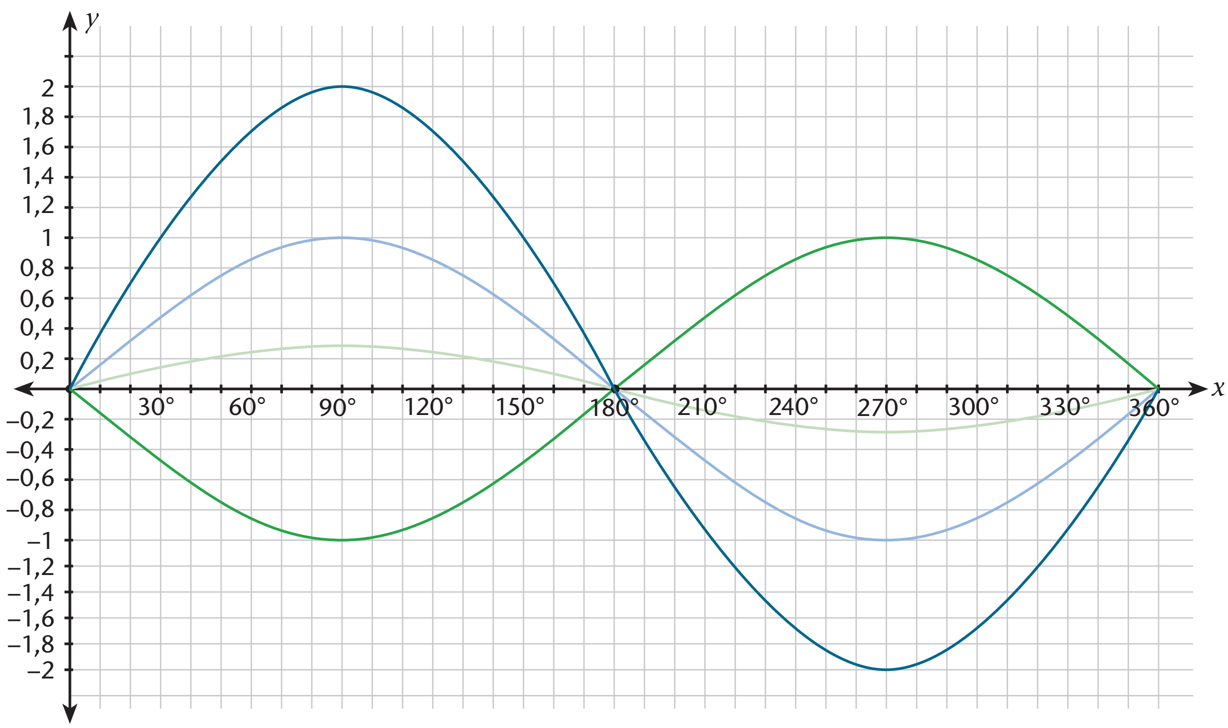
- Vir enige insethoek kies ons die uitset van g wat 'n kwart (een-vierde) van die uitset van f is as gevolg van die koëffisiënt $\frac{1}{4}$.
- Dus, vir elke θ-koördinaat is die y-koördinaat van die grafiek van g een kwart van die afstand vanaf die θ-as af vir f.

Vergelyk die funksie k met f:



- Vir enige insethoek kies ons die uitset van g wat die negatief van die uitset van f is as gevolg van die koëffisiënt –1.
- Dus, vir elke θ-koördinaat is die y-koördinaat van die grafiek van g dieselfde afstand vanaf die θ-as af vir f, maar net aan die teenoorgestelde kant van die θ-as.

Indien ons baie meer inset-uitsetkoördinate vir die vier funksies stip, kan ons al vier grafieke op een Cartesiese vlak wys om hulle vorms te vergelyk:



Oefening

51 Identifisee f, g, h, en k in die diagram hierbo. Maak seker dat jy verstaan hoe die grafieke, volgens hulle koëffisiënte, met mekaar verband hou.

Notasie: ’n Manier om verskillende funksies te benoem

Ons het vier funksies in die oefening hierbo. Almal behels die funksie sin θ, wat verwarrend kan wees.

Dit is nuttig om hulle aparte funksiename te gee sodat ons vinnig na hulle kan verwys.

Ons benoem funksies gewoonlik met ’n enkele letter; f, g, en h word meestal gebruik, maar jy kan enige letter gebruik.

Hier is ’n paar **konvensionele notasies** waarvan jy moet kennis dra en wat jy van nou af gaan gebruik:

Ons het $y = \frac{1}{4}\sin\theta$ die funksie h in die vorige oefening genoem.

Ons sê $y = \frac{1}{4}\sin\theta$ is die funksie h (sy naam).

- Ons kan die uitsette van h skryf as $h(\theta)$; terwyl h die naam van die funksie is, $h(\theta)$ stel die funksieproses (die proses wat h gebruik om die uitsette te bereken) en die funksie-uitsette (die uitsetveranderlike) voor.
- Ons kan ’n bepaalde uitset skryf as $h(41°) = 0{,}164$. Ons lees dit soos volg: Die waarde van die funksie h by 41° is 0,164.
- Ons kan die vergelyking van die funksie skryf as $h(\theta) = \frac{1}{4}\sin\theta$. Ons lees dit so: Die waarde van die funksie h by θ word bereken deur die uitdrukking $\frac{1}{4}$ sin θ te gebruik.
- Wanneer ons die grafiek van h stip, kan ons skryf $y = h(\theta)$ om aan te toon dat die uitset van h by θ die y-koördinaat van die geordende paar $(\theta; y)$ is.
- Ons kan die veranderlike inset-uitset geordende paar skryf as $(\theta; y)$, of as $(\theta; h(\theta))$, of selfs as $(\theta; \frac{1}{4}\sin\theta)$.

As ons nou skryf
$h(x) = \frac{1}{4}\sin x$ maak dit meer sin omdat die x, soos die θ, net ’n plekhouer vir insetwaardes is.
As ons sê dat:
‘*die waarde van die funksie h by θ bereken word deur die uitdrukking $\frac{1}{4}$ sin θ te gebruik*’, is dit dieselfde as om te sê:
‘*die waarde van die funksie h by x word bereken deur die uitdrukking $\frac{1}{4}$ sin x te gebruik.*’

Ons kan $\theta = 41°$ maak in die eerste geval of $x = 41°$ in die tweede geval, maar $h(41°) = \frac{1}{4}\sin 41° = 0{,}164$ bly nog dieselfde.

Stipping van die waarde van tan θ teenoor θ : die grafiek van die tangensfunksie

Die grafiek van die tangensfunksie is baie interessant en baie eienaardig. Daar is ’n paar belangrike nuwe begrippe wat ons daarmee sal teëkom.

Wenk: Hou tred met drie belangrike dinge en jy sal vind dat dinge eenvoudiger is om te verstaan:
- hoe die grafiek se kromme lyk
- waar dit die asse sny (die afsnitte)
- waar dit ongedefinieerd is.

Die werklik eienaardige ding omtrent die tangensgrafiek hou verband met die laaste punt.

Kyk na jou sakrekenaar se handleiding, of vra ’n vriend, om te sien hoe om toegang te verkry tot ’n baie handige hulpmiddel op jou sakrekenaar, genaamd TABELMODUS. Dit is maklik om te gebruik en sal jou werk in hierdie afdeling baie, baie minder maak.

Oefening Jy sal grafiekpapier hier benodig

52 Stipping van uitsette van tan θ vir sommige insette tussen 0° en 360°.

(a) Gebruik die TABELMODUS op jou sakrekenaar om die volgende tabel te voltooi, of bereken elke uitset een-vir-een soos voorheen, vir al 25 insethoeke.

Rond die uitsette af tot twee desimale plekke.

θ	**tan** θ
0°	
15°	0,27
330°	–0,58
345°	
360°	

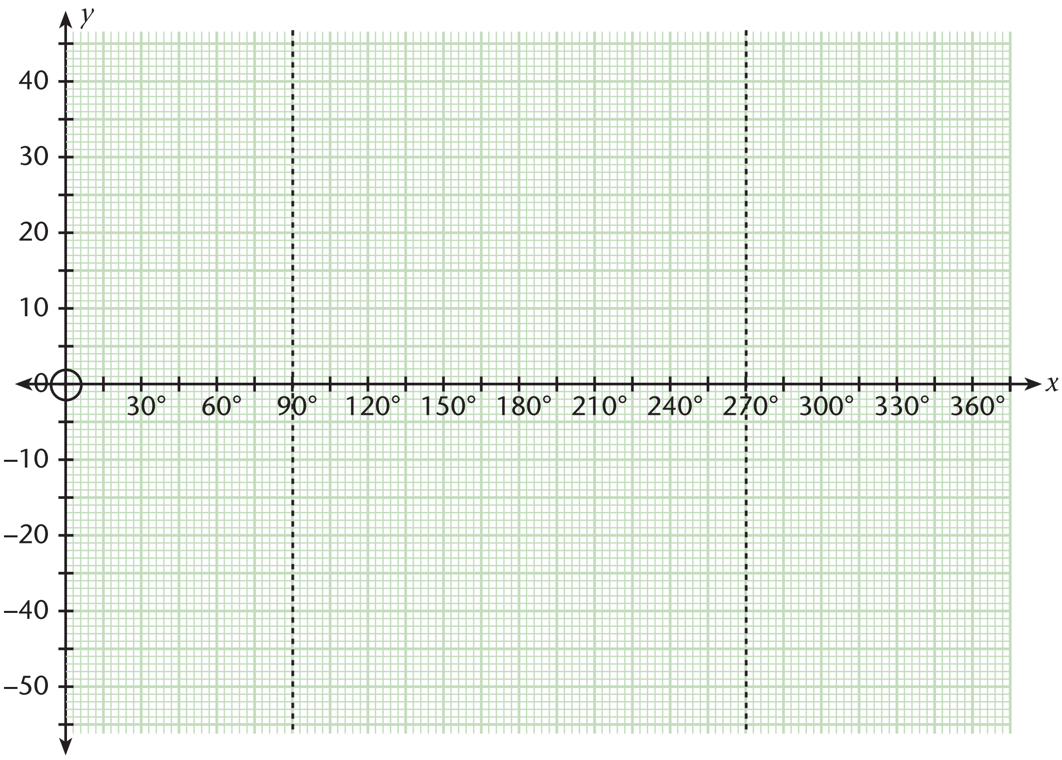
Let wel: Jou uitsetkolom sal sê ‘ERROR’ vir insette van 90° en 270°. Dit behoort jou nie te verbaas nie! Indien jy wel verbaas is, blaai terug na Oefening 26(b) om sin te maak hiervan.

(b) Die tabel is op sigself ’n manier om ’n funksie voor te stel. Jy kan iets omtrent die tangensfunksie leer deur sorgvuldig na die waardes wat jy bereken het te kyk. Kan jy die patroon/patrone in die waardes sien? Probeer om dit (hulle) te beskryf. (**Wenk:** vergelyk die uitsette in elk van die vier kwadrante met mekaar.)

(c) Stel nou die uitsetwaardes en insetwaardes op ’n Cartesiese ruitenet voor, soos volg:

- Plaas jou grafiekpapier in ‘landskap’-posisie (langste sye horisontaal).
- Trek ’n horisontale as dwarsoor die middel van die ruitenet en ’n vertikale as langs die linkerkant af; die oorsprong is by die middel van die linkerkant van die ruitenet.
- Die horisontale as sal die θ-as wees (m.a.w. die inset-as), en die vertikale as sal die tan θ-as wees (die uitset-as).
- Kies ’n skaal (in grade) vir die θ-as; jy behoort 24 blokke dwarsoor te hê, dus is elke groot ruitlyn ’n sprong van 15°.
- Kies ’n vertikale skaal vir tan θ; jy behoort 8 blokke bokant sowel as onderkant die oorsprong te hê; gebruik elke tweede groot ruitlyn om ’n sprong van 1 af te merk.
- Trek vertikale stippellyne deur 90° en deur 270° op die θ-as en benoem hulle $\theta = 90°$ en $\theta = 270°$; die betekenis van hierdie lyne sal binnekort vir jou duidelik word (jy kan alreeds raai indien jy wakker is).

Jou grafiekpapier behoort nou soos hierdie een te lyk:



- Stip die vyf-en-twintig (θ; tan θ) koördinate.
- Trek ’n gladde kromme deur die eerste 6 punte, maar *stop* voordat jy die eerste stippellyn by 90° bereik.
- Trek ’n gladde kromme wat die 11 punte tussen 90° en 270° verbind.
- Trek ’n gladde kromme deur die laaste 6 punte wat verby die tweede stippellyn lê by 270°.

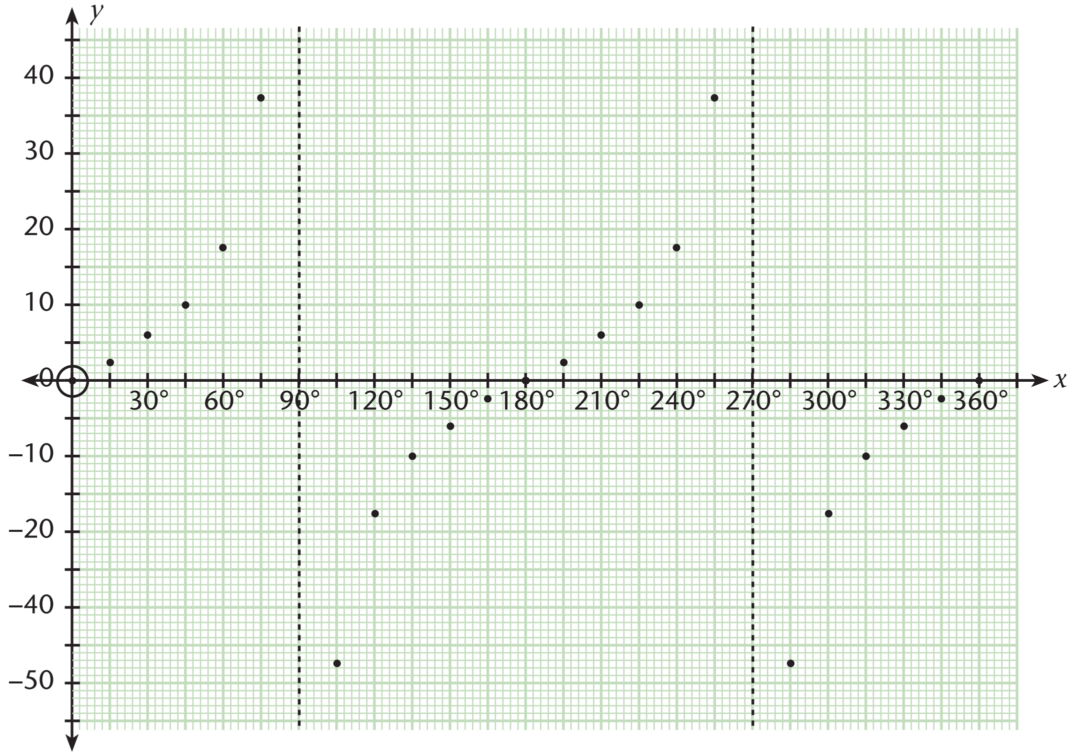
(d) Beskryf die grafiek wat jy getrek het.

- Hoe vergelyk die vorm van die grafiek tussen 0° en 90° met die deel tussen 180° en 270°?
- Hoe vergelyk die deel tussen 90° en 180° met die deel tussen 270° en 360°?
- Wat sien jy nog? Beskryf enige ander spesiale eienskappe/patrone wat jy in die grafiek sien.

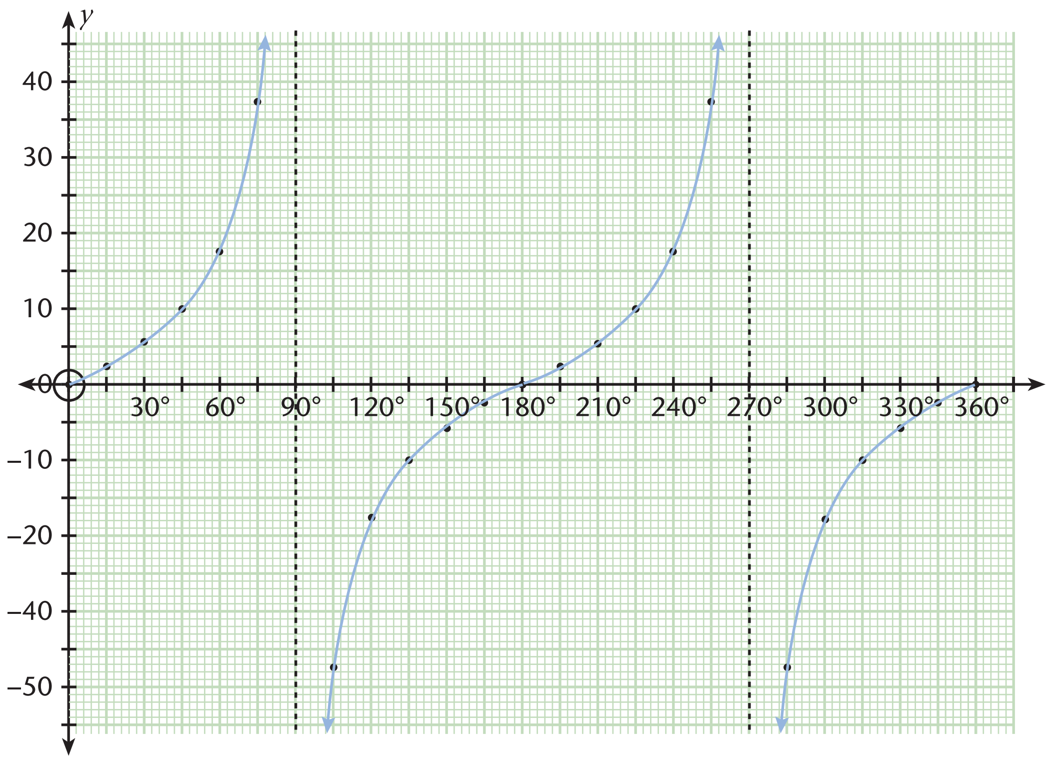
(e) Blaai terug en kyk weer na die eienskappe van die tangensfunksie. Probeer om hierdie eienskappe raak te sien in die grafiek.

(f) Blaai 'n bietjie verder terug. Kan jy enige van die eienskappe van hellingsverhouding en hellingshoek in die grafiek raaksien (die deel tussen 0° en 90°)?

Die punte wat jy gestip het, behoort iets soos die volgende te lyk (maak seker dat jy saamstem):



Nadat jy ’n gladde kromme deur al die punte in jou grafiek getrek het, behoort dit iets soos die volgende te lyk (geen reguit dele nie!):



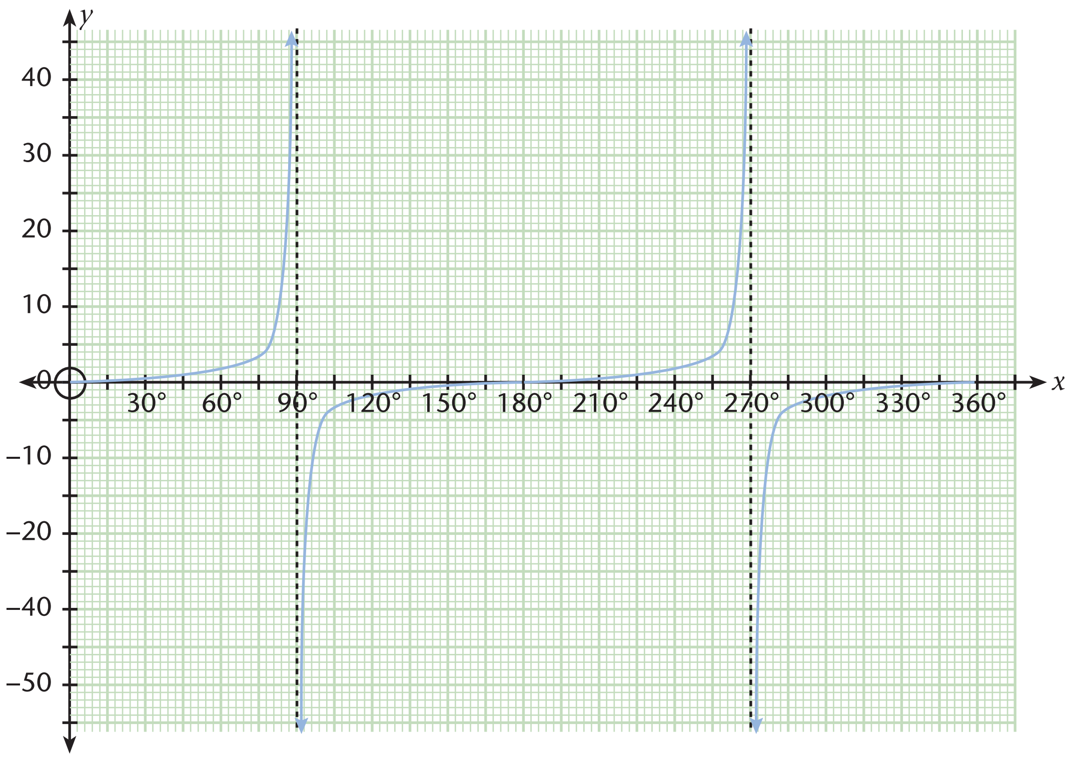
Wat gaan aan naby $\theta = 90°$ en $\theta = 270°$? Ons gaan ondersoek instel.

Oefeninge Ondersoek uitsette van tangens naby 90° en 270°

53 Wat gebeur vir insethoeke wat naby die verbode hoeke van 90° en 270° kom? Stel self ondersoek in. Miskien kan jy saam met ander werk sodat elkeen op verskillende insethoeke kan fokus.

(**Wenk:** Dit sal die beste wees om in ’n groep van vier werk. Twee van julle ondersoek wat gebeur as die insethoek nader aan 90° kom, van onder 90°, en daarbo. Die ander twee doen dieselfde vir 270°.)

54 Kom ons soek ’n paar waardes op en vergelyk dit teenoor die sakrekenaar se waardes. Beskou die volgende grafiek noukeurig. Die uitset-as is opgeskaal met ’n faktor van 10 om ons toe te laat om meer uitsetwaardes van tangens voor te stel.



(a) Kyk na die interval waar $75° \leq \theta < 90°$ is. Bepaal die insette wat die volgende uitsette gee: 5; 10; 20; 40.

(b) Bereken die uitsette vir die volgende insethoeke: 89,5°; 90,5°, 269,5°;270,5°. Wat kan jy op grond hiervan sê?

(c) Dink jy dat tan θ ’n maksimum waarde kan hê? En ’n minimum waarde?

(d) Bereken die uitsette vir die volgende hoeke: 89,6°; 89,7°; 89,8°; 89,9°.

(e) Hou jy steeds by jou antwoord in (c)?

(f) Kies ’n hoek wat groter as 89,9° maar kleiner as 90° is. Bepaal die tangens van jou hoek. Kies ’n ander hoek wat nader aan 90° is as die een wat jy so pas gebruik het en bereken die tangens daarvan. Wat dink jy dat jy sal vind as jy hiermee aanhou? Stem jy nog steeds met jou antwoord in (c) saam?

Ons benodig 'n nuwe term om te beskryf wat ons hier vind:

Asimptoot: (a-simp-toot): 'n Asimptoot is 'n lyn waarheen 'n grafiek van 'n funksie al hoe nader beweeg namate jy die grafiek (en die lyn) langer en langer trek, sonder om ooit daaraan te raak.

Die afstand tussen die asimptoot en die grafiek van die funksie word kleiner en kleiner sonder om ooit nul te word. 'n Ander manier om dit te beskryf, is om te sê dat dit lyk asof die grafiek parallel aan die lyn wil loop, maar nooit werklik parallel word nie.

Oefening Maak seker van die definisie

55 Die asimptote van die tangensfunksie stem ooreen met die hoeke van ongedefinieerde uitsette. Maak seker dat die definisie wat ons hier gee beskryf wat jy in die vorige oefening waargeneem het.

'n Paar konvensies omtrent asimptote:

- Ons moet altyd die asimptote van 'n grafiek wys, *selfs al is hulle nie deel van die grafiek nie.* (Waarom is hulle nie deel van die grafiek nie?)
- Ons teken hulle gewoonlik as 'n stippellyn, of 'n lyn wat baie dunner is as die lyn van die grafiek.
- Skryf die vergelyking van elke asimptoot daarlangs neer ('n goeie gewoonte), bv. op ons tangensgrafiek is die een by 90° 'n reguit lyn met vergelyking $\theta = 90°$. Die ander een se vergelyking is $\theta = 270°$.

Let wel: Die asimptote waarmee ons sal werk is altyd reguit lyne, en altyd parallel aan die asse. Oor die algemeen hoef dit egter nie die geval te wees nie. Hulle kan die krommes van ander funksies wees.

Terminologie om te beskryf wat ons gesien het

Dilatasie en kontraksie: 'n Dilatasie is wanneer iets uitgestrek word. 'n Kontraksie is wanneer iets saamgepers word.

Vergeleke met f, is die effek van die koëffisiënt van 2 in g 'n dilatasie van faktor 2 vanaf die θ-as.

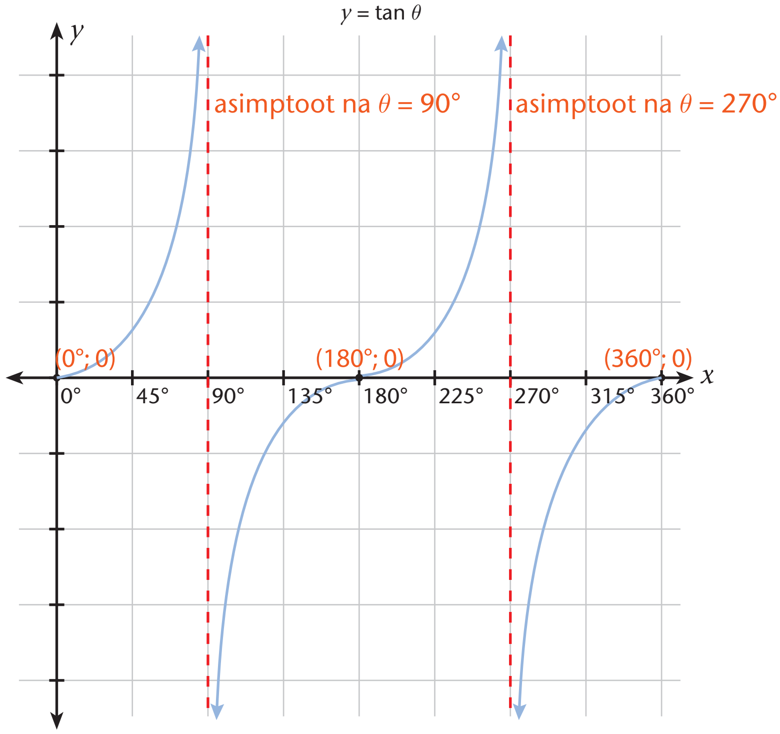
Vergeleke met f, is die effek van die koëffisiënt van $\frac{1}{4}$ in h 'n kontraksie in die rigting van die θ-as met 'n faktor van $\frac{1}{4}$.

Refleksie: Wanneer iets omgekeer word, sê ons dit word gereflekteer om 'n lyn.

Vergeleke met die grafiek van f, is die effek van die koëffisiënt van –1 op die grafiek van k om dit om die θ-as te reflekteer.

Eienskappe van die grafiek van $y = \tan \theta$:

- het asimptote by $\theta = 90°$ en by $\theta = 270°$
- neem altyd toe van links na regs
- het afsnitte by (0°; 0), by (180°; 0) en by (360°; 0)



Oefeninge

56 Vir watter waardes van a sal $q(\theta) = a \sin \theta$ 'n

(a) dilatasie van $p(\theta) = \sin \theta$ van die θ-as wees?

(b) kontraksie van $p(\theta) = \sin \theta$ van die θ-as wees?

(c) refleksie van $p(\theta) = \sin \theta$ om die θ-as wees?

57 Trek die grafieke van $f(x) = \cos x$, en $g(x) = -\cos x$ op dieselfde assestelsel, deur nege koördinate vir elke funksie op grafiekpapier in te teken.

- Stel 'n tabel op met insethoeke x, wat loop van 0° tot 360° in spronge van 45°.
- Stip hulle op grafiekpapier en gebruik 'n insetskaal van 45° vir elke drie groot blokke en 'n uitsetskaal van 1 tot 5 blokke. Plaas byskrifte by die asse.
- Wanneer jy gladde lyne deur die punte trek, gebruik verskillende kleure vir die twee funksies, of maak een 'n soliede lyn en die ander 'n stippellyn.
- Plaas byskrifte by die asse (x en y), en dui duidelik aan watter grafiek f en watter een g is.

(a) Gee die koördinate van al die afsnitte.

(b) Gee die koördinate van al die draaipunte.

(c) Wat is die amplitude van die twee funksies? Het hulle dieselfde amplitude?

(d) Vir watter hoekinsette is die twee grafieke die verste van mekaar geskei? Wat is hierdie skeidingsafstand?

(e) Gee die koördinate van die punte waar die grafieke van die twee funksies mekaar sny.

(f) Wat is die definisieversameling en waardeversameling van g?

58 Die funksies u en v word gedefinieer as $u(\theta) = 0{,}4 \tan \theta$ en $v(\theta) = 1{,}2 \tan \theta$.

(a) Stel 'n inset-uitset tabel (drie kolomme: θ, $u(\theta)$, en $v(\theta)$) vir die twee funksies op oor die definisieversameling $0° \leq \theta \leq 180°$, $\theta \neq 90°$, deur spronge van 30° te gebruik.

(b) Skryf die volgende sinne in jou oefeningboek neer en kies die korrekte terme en verskaf die ontbrekende faktore in die stellings:

(i) 'u is 'n kontraksie/dilatasie van v met 'n faktor van _______.'

(ii) 'v is 'n kontraksie/dilatasie van u met 'n faktor van _______.'

(iii) 'Die enigste punte op die grafiek van u en v wat nie deur die koëffisiënte beïnvloed word nie, is die _______.'

(c) Stip die (θ; y)-koördinate op grafiekpapier met 'n gepaste skaal. Gebruik die insetskaal van 1 groot blok vir 10° en 'n vertikale skaal van een uitseteenheid vir elke vier blokke. Gee byskrifte vir die asse.

Trek die asimptoot in en skryf die vergelyking daarvan neer.

Trek 'n gladde kromme deur die punte wat jy gestip het.

(d) Gee die waardeversamelings van die twee funksies. Hoe vergelyk hulle met die waardeversameling van $w(\theta) = \tan \theta$?

59 Opsionele vraag (uitbreiding):

(a) 'n Voorwerp wat aan die eindpunt van 'n veer vasgemaak is, bons op en af volgens 'n vergelyking van die vorm $d = a \cos \beta t$. Die beweging van die voorwerp by sy hoogste posisie van 5 m bokant sy ruspunt, bons af na sy laagste posisie van 5 m onderkant sy ruspunt, en bons dan terug na sy hoogste posisie binne die bestek van 4 sekondes. Skryf 'n vergelyking neer wat hierdie beweging voorstel.

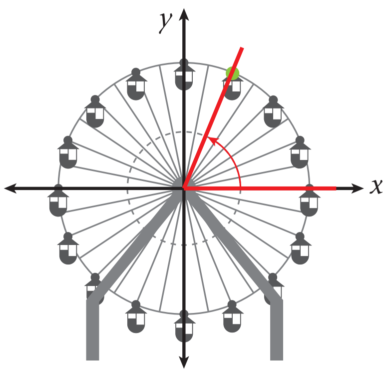
(b) Trek 'n grafiek van jou vergelyking vanaf $t = 0$ sekondes tot $t = 12$ sekondes.

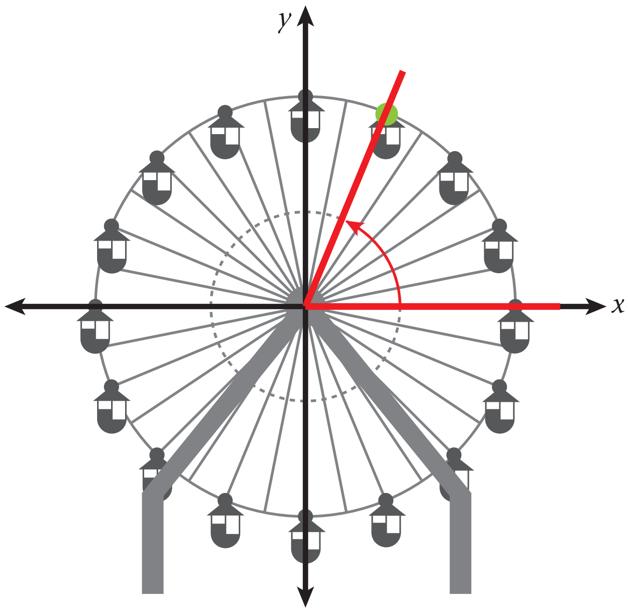
Oefening Opsioneel

60 Hierdie vraag is nie moeilik nie, maar dit vereis helder denke. Jy moet dit beslis probeer, omdat dit belangrike idees van die Cartesiese definisie van trigonometriese funksies verbind met hulle Cartesiese inset-uitsetgrafieke. Dit is ook ’n praktiese situasie waar dilatasie/kontraksie plaasvind.

Ferriswiel
Pretrit wat bestaan uit ’n reuse vertikale draaiende wiel met passasierskarretjies wat aan die buitekant gehang is.

’n Situasie van twee Ferriswiele: veronderstel dat een Ferriswiel ’n radius van 6 m het en ’n ander een ’n radius van 12 m:





Die twee diagramme wys die waentjies teen dieselfde hoek, $\theta = 67{,}5°$ tot die positiewe x-as.

(a) Bereken die x-koördinaat van die groen punt vir die klein wiel.

(b) Gebruik jou oplossing in (a) en die verhouding van die radiusse van die twee wiele om die x-koördinaat van die verbindings-as vir die groot wiel te bereken.

(c) Teken die grafiek van $h(\theta) = 6 \cos \theta$ en $H(\theta) = 12 \sin \theta$ op dieselfde vel grafiekpapier (kies self die beste skaal).

(d) Wat beskryf die twee funksies omtrent die posisies van die verbindings-as in die klein wiel?

(e) Verduidelik hoe die verhouding van die radiusse van die twee wiele verband hou met die dilatasiefaktor.

Verskuiwing opwaarts en afwaarts

Oefening

61 Ondersoek vertikale verskuiwing.

(a) Ondersoek die funksie $y = \cos\theta - 1$ deur die punte op grafiekpapier te stip (besluit self watter punte om te gebruik) en trek 'n gladde kromme daardeur.

Doen dieselfde vir $y = \cos\theta$. Kies jou vertikale skaal (op die uitset-as) sodat die maksimum en minimum punte nie buite die ruitenet sal beland nie.

Wat merk jy op omtrent die grafiek vergeleke met die grafiek van $y = \cos\theta$?

(b) Ondersoek die funksie $y = \sin\theta + 2$ deur die punte op 'n skoon vel grafiekpapier te stip (besluit self watter punte om te gebruik) en trek 'n gladde kromme daardeur.

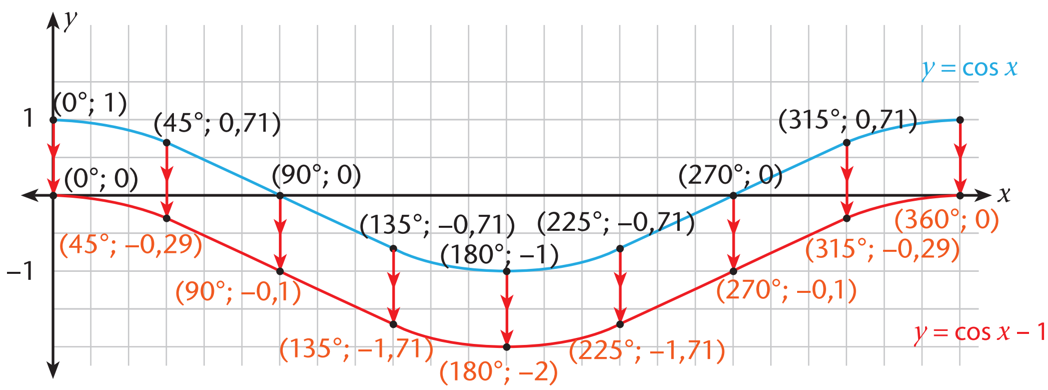
Doen dieselfde vir $y = \sin\theta$. Kies jou vertikale skaal (op die uitset-as) sodat die maksimum en minimum punte nie buite die ruitenet sal beland nie.

Wat merk jy op omtrent die grafiek vergeleke met die grafiek van $y = \sin\theta$?

Wat het ons geleer?

Dit mag miskien nie so lyk nie, maar as jy 'n lyn op enige plek deur die twee grafieke in 63(b) parallel aan die y-as trek, is die lynsegment tussen die twee punte waar die lyn deur die grafieke gaan, presies 2 eenhede lank (soos aangetoon op die grafiek wat jy in 63(b) hierbo getrek het).

In Oefening 63(a) is die grafiek van $y = \cos x - 1$ net die grafiek van $y = \cos x$ wat met 1 eenheid afwaarts verplaas (getransleer) is.



Terminologie om te beskryf wat ons gesien het

Translasie: 'n Translasie is 'n beweging in een rigting sonder om die oriëntasie te verander, en sonder kontraksie of dilatasie.

Die grafiek van $g(x) = \sin \theta + 2$ is die grafiek van $f(x) = \sin \theta$ vertikaal opwaarts getransleer met 2 eenhede.

Die grafiek van $y = \cos \theta - 1$ is die grafiek van $y = \cos \theta$ vertikaal afwaarts getransleer met 1 eenheid.

Oefening Nog vertikale translasies (grafiekpapier word benodig)

62 Stel 'n tabel op en stip die funksie $f(x) = \sin x - 1$ op die definisieversameling $x \in [0°; 180°]$, deur gebruik te maak van punte wat by 0° begin, met intervalle van 30°. Trek 'n gladde kromme deur jou punte en noem dit f.

(a) Identifiseer en merk al die punte op jou grafiekpapier 'n halwe eenheid bo die punte wat jy gestip het. Trek 'n gladde kromme deur hierdie punte. Benoem die kromme g.

(b) Gee die waardeversameling van f.

(c) Gee die koördinate van die x- en y-afsnitte van f.

(d) Skryf die uitdrukking vir die funksie: $g(x) = \ldots$ neer

(e) Gee die koördinate van die draaipunt van g.

(f) Gee die waardeversameling van g.

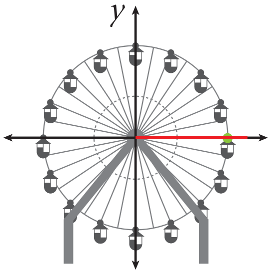
(g) Lees die benaderde x-afsnitte van g af. Bevestig hoe akkuraat jy was deur die waarde van die eerste x-afsnit (wat tussen 0° en 90° lê) te bereken.

Oefeninge Opsioneel

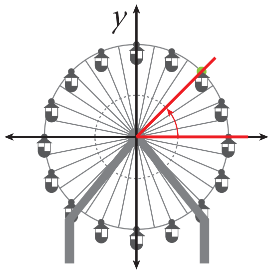
Kom ons keer terug na die situasie van die Ferriswiel. Jy het 'n skoon vel grafiekpapier nodig.

Hierdie vraag sluit aan by Oefening 62. Dit is belangrik om soortgelyke redes. Belangrike verbande word gelê tussen die twee wyses waarop trigonometriese verhoudings op die Cartesiese vlak voorgestel word. Dit is ook 'n praktiese voorbeeld van 'n vertikale verplasing probleem.

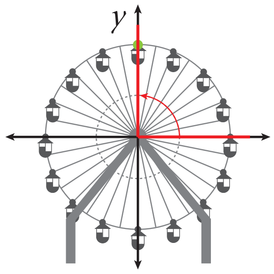
63 Kom ons veronderstel dat die deursnit van die wiel 20 m is, dat die hoofas 15 m bokant die grond is, en dat die waentjie 1,5 m onder die verbindings-as is.

A


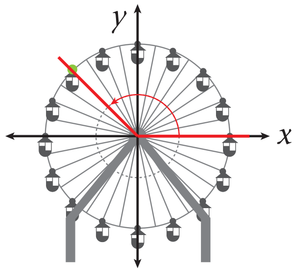
$\theta = 0°$ of $\theta = 360°$

B


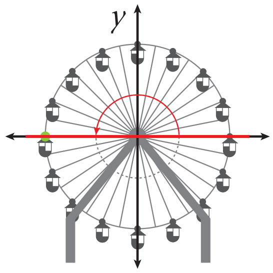
$\theta = 45°$

C


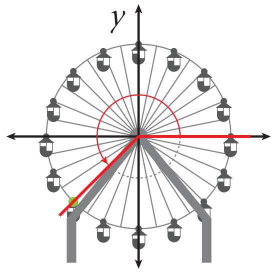
$\theta = 90°$

D


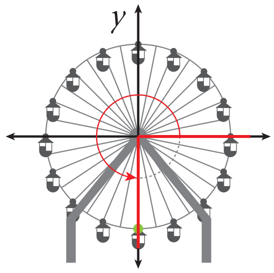
$\theta = 135°$

E


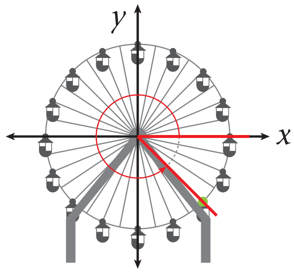
$\theta = 180°$

F


$\theta = 225°$

G


$\theta = 270°$

H


$\theta = 315°$

Omdat $\sin \theta = \frac{y}{10}$ is, is die y-koördinaat van die posisie van die verbindings-as $y = 10 \sin \theta$ in meter.

(a) Trek die volgende tabel oor en voltooi dan die tweede kolom. Los die derde kolom vir later. Rond waardes af tot een desimale plek.

θ	**Hoogte van verbindings-as bo/onder hoofas: $v(\theta) = 10 \sin \theta$ in meter**	**Hoogte van waentjie bokant die grond in meter**
0°		
45°		
90°		
270°		
360°		

(b) Stip die (θ; $v(\theta)$) waardes op ’n vel voorbereide grafiekpapier. Gebruik ’n vertikale skaal van een blok vir 2 m.

(c) Trek ’n gladde kromme deur jou punte. Maak seker dat dit soos die sinusgrafieke lyk wat ons geteken het. As jy ekstra punte benodig om ’n netjieser kromme te trek, voeg dan ’n paar ekstra by (dit is jou keuse).

(d) Toon die koördinaat op jou grafiek aan waar die verbindings-as:

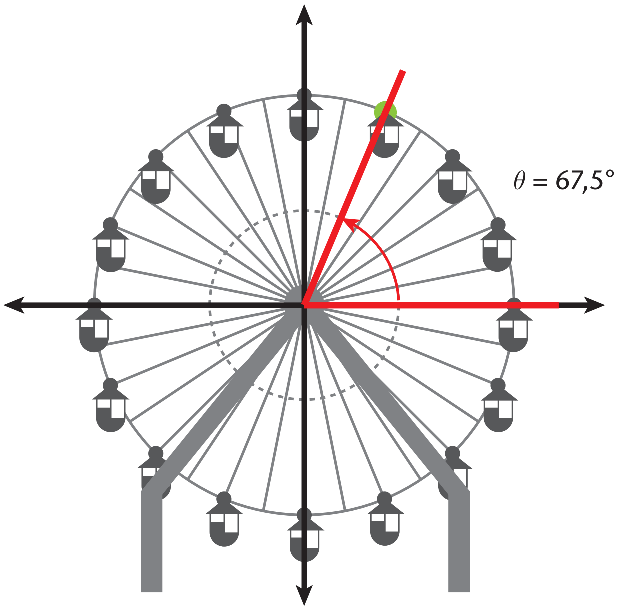
(i) op sy hoogste posisie bo die sentrale as van die wiel is

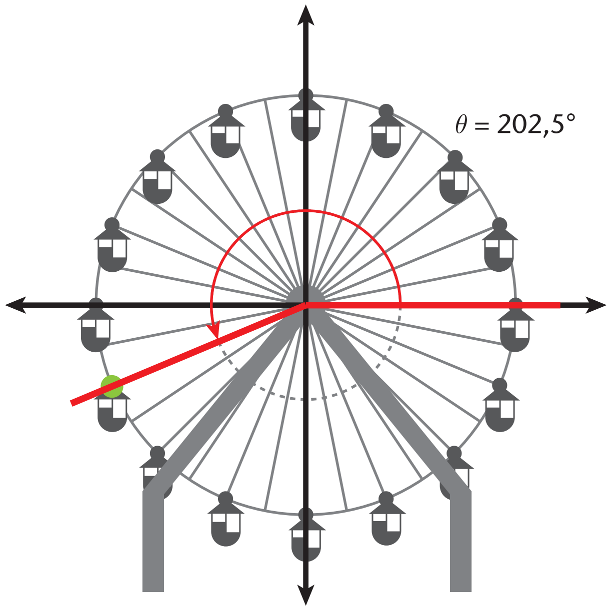
(ii) op sy laagste posisie onder die hoofas is

(iii) op sy posisie heel links en op sy posisie heel regs is.

(e) Is jy tevrede dat die funksie $y = 10 \sin \theta$ hoeke vir verskillende posisies van die wiel as insette neem? Is jy tevrede dat die uitsetwaardes die hoogte van die verbindings-as bo of onder die vlak van die hoofas gee? Maak heeltemal seker daarvan.

Hoe hoog bo die grond is jy by verskillende posisies van die waentjie?
Twee moontlike posisies is:





(f) Wys deur berekeninge te doen dat die hoeke in die twee diagramme korrek is.

(g) Bereken die y-koördinate van die posisies van die verbindings-as.

(h) Gebruik jou oplossings in (g) en die feit dat die hoofas 15 m bo die grond is om te wys dat die verbindings-as 15,9 m bo die grond is in die eerste posisie, en 14,6 m bo die grond is in die tweede posisie.

(i) Vul nou die waardes in die leë derde kolom op jou tabel in. Stip die waardes vir die verskillende hoeke op dieselfde vel grafiekpapier wat jy vroeër gebruik het. Trek 'n gladde kromme.

(j) Die grafiek wat jy in (i) getrek het, is 'n getransleerde (verplaaste) vorm van die grafiek van funksie v. Kom ons noem dit V (die 'v' en 'V' staan vir vertikaal). Wat is die waarde van θ in $V(\theta) = 10 \sin \theta + \theta$?

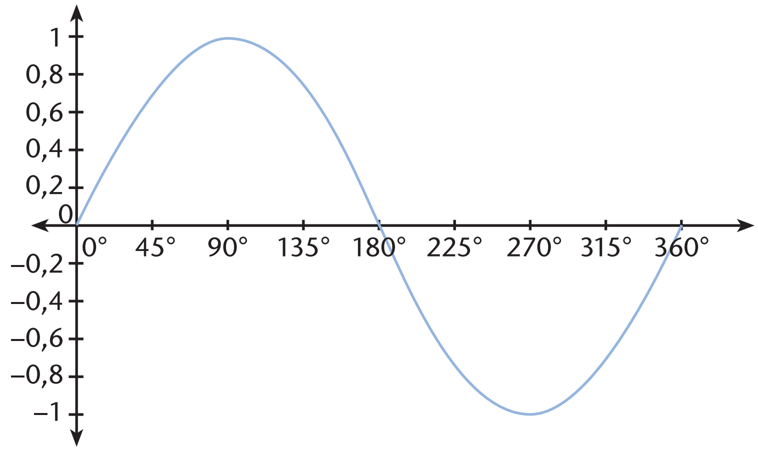
(k) Die waentjie is 1,5 m onder die verbindings-as. Skryf 'n uitdrukking neer vir die hoogte bo die grond wat die waentjie (en jy, die ryer) sal wees vir verskillende waardes van θ. Beskryf hoe die grafiek van hierdie funksie sal vergelyk met die ander twee.

64 Die grafieke van $y = \sin x$, $y = \cos x$, en $y = \tan x$ word hieronder aangedui. Gebruik die grafieke om te bepaal wanneer

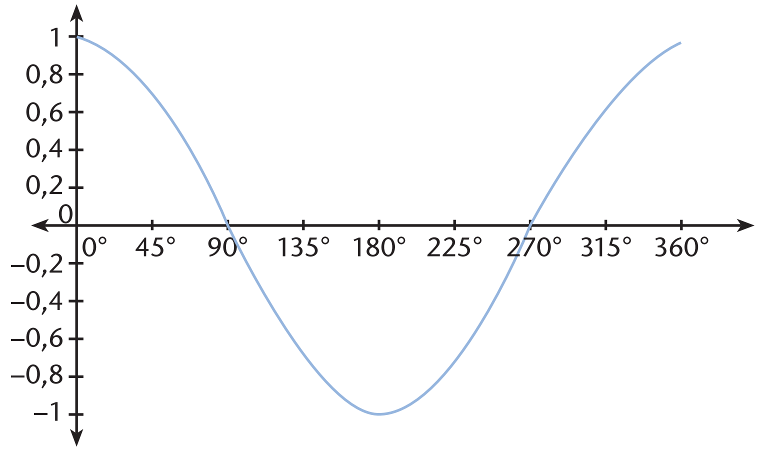
- $y > 0$ is
- $y = 0$ is
- $y < 0$ is.

Gee jou antwoorde in intervalnotasie en sê met watter kwadrante die intervalle ooreenstem.

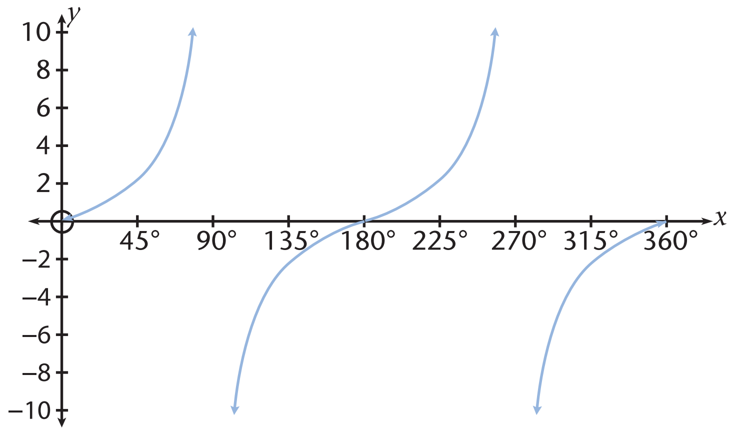
(a) $y = \sin x$



(b) $y = \cos x$

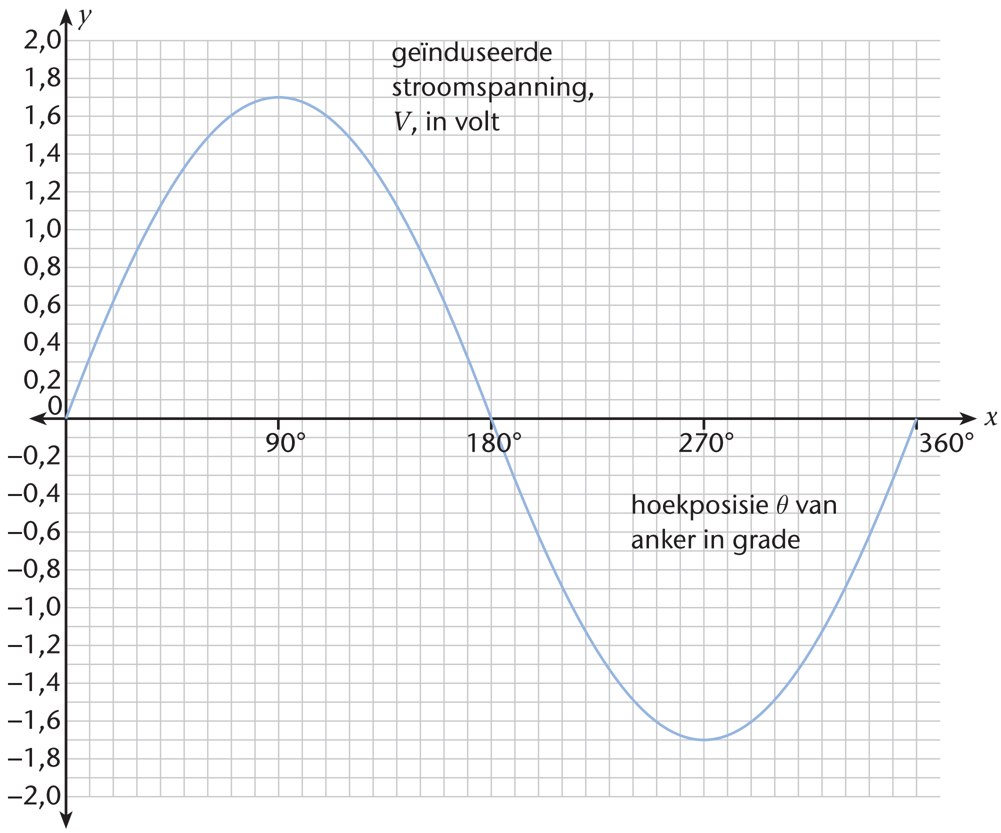


(c) $y = \tan x$



Vergelyk jou resultate met die resultate wat jy in Oefeninge 21 en 23 gekry het. Die grafieke is nog 'n manier om die tekens van die drie basiese trigonometriese funksies in elke kwadrant te onthou of uit te redeneer.

65 Wanneer die anker van ’n eenvoudige dinamo in elektriese tegnologie een volle omwenteling voltooi, word ’n stroomspanning oor die twee sleepringe geïnduseer wat ’n sinusoïdale kromme vorm:



(a) Wat is die maksimum stroomspanning geïnduseer oor die ringe?

(b) Bepaal die hoeke waarvoor die grootheid van die geïnduseerde stroomspanning 1 V is.

(c) Bepaal die interval van hoekposisies waarvoor die geïnduseerde stroomspanning ’n grootheid het wat minder as of gelyk aan 1,5 V is.

(d) Skryf die vergelyking van stroomspanning as ’n funksie van hoekposisie neer.

As een volle rotasie van die anker 0,2 s neem, beginnende by $\theta = 0°$, teen watter tye sal die geïnduseerde stroomspanning-grootheid

(e) nul wees?

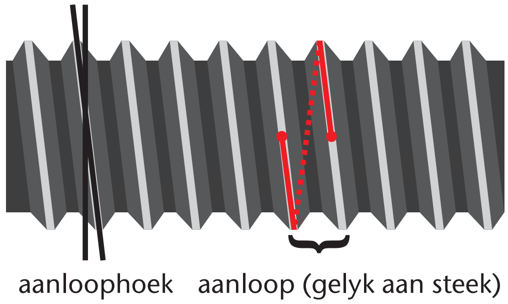
(f) op die maksimum wees?

(g) groter as 1,5 V wees?

Let wel: Stroomspanning-grootheid is bloot die waarde van die stroomspanning sonder die teken. Dit word die **absolute waarde** of **modulus** van die stroomspanning genoem.

2154 TechMaths Afr G10 LB.indb 225 2015/11/25 4:13 PM

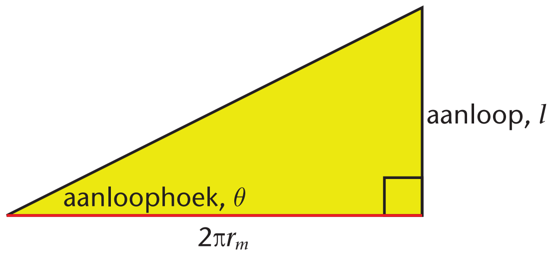
66 Wanneer ’n bout deur een volle revolusie gedraai word, beweeg dit deur ’n afstand in die moer, wat ons die aanloop noem. ’n Bout met ’n enkele aanloop-skroefdraad, se aanloop is gelyk aan die steek.



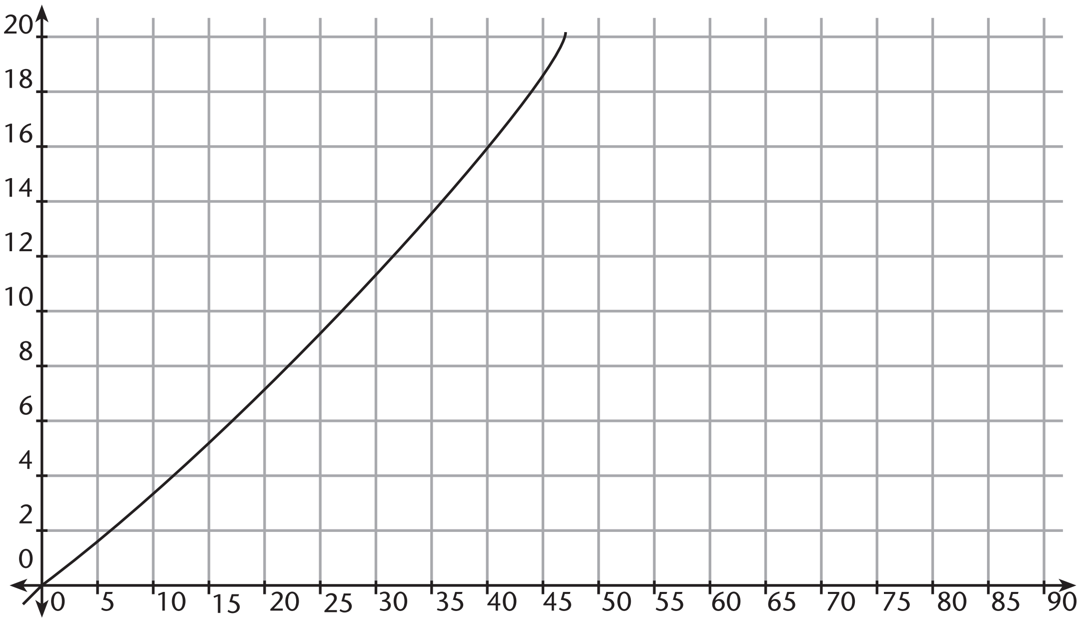
Die lengte van die skroefdraad wat ooreenstem met die aanloop word in rooi aangedui. Dit is gelyk aan $2\pi r_{\text{m}}$, die omtrek van ’n sirkel met radius r_{m}, die gemiddelde radius van die skroefdraad.

Die aanloop is loodreg op die skroefdraad. Die hoek wat die rigting van die skroefdraad met die radius van die bout maak, word die aanloophoek genoem.

As ons die rooi lyn sou ‘afdraai’ sonder dat ons sy lengte verander, kan ons die volgende reghoekige driehoek teken:



Die volgende grafiek gee die aanloop van boute, in millimeter – almal met dieselfde gemiddelde skroefdraadradius – as ’n funksie van hulle aanloophoek in grade:



(a) Gee die definisieversameling en waardeversameling van die aanloopfunksie in intervalvorm.

(b) Is dit prakties om draad te sny in boute met aanloophoeke vir die hele definisieversameling van die aanloopfunksie?

(c) Lees die aanloopwaardes af vir die volgende aanloophoeke: 5°, 20°, 45°.

(d) Lees die aanloophoeke af vir die volgende waardes van die aanloop: 1 mm, 4 mm, 15 mm.

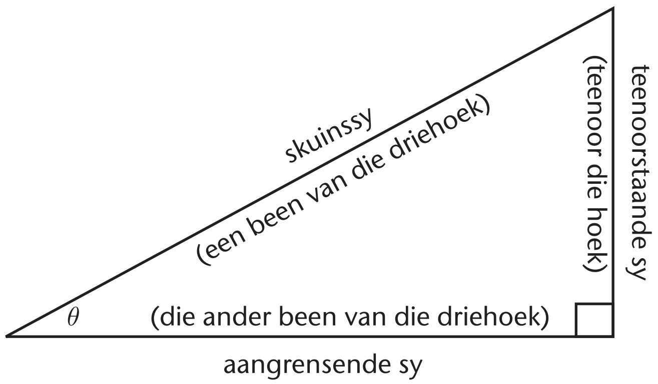
(e) Bepaal die aanloopfunksie in die vorm $l(\theta) = \ldots$

(f) Bereken die waarde van die gemiddelde skroefradius vir die boute voorgestel deur die aanloopfunksie.

2154 TechMaths Afr G10 LB.indb 226 2015/11/25 4:13 PM

6.12 Opsomming

Die trigonometriese funksies vir reghoekige driehoeke:



Definisieversameling vir al drie funksies
- Definisieversameling vir al drie funksies: $0° < \theta < 90°$
- Waardeversameling vir sinus: $0 < \sin\theta < 1$
- Waardeversameling vir kosinus: $0 < \cos\theta < 1$
- Waardeversameling vir tangens: $\tan\theta > 0$

$$\sin\theta = \frac{teenoorst}{skuinssy} \qquad \cos\theta = \frac{aangr}{skuinssy} \qquad \tan\theta = \frac{teenoorst}{aangr}$$

Die drie inverse funksies van sinus, kosinus, en tangens:
- Definisieversameling vir $\sin^{-1}$: $0 <$ insetverhouding < 1
- Definisieversameling vir $\cos^{-1}$: $0 <$ insetverhouding < 1
- Definisieversameling vir $\tan^{-1}$: insetverhouding > 0
- Waardeversameling vir al drie funksies: $0° <$ uitsethoek $< 90°$

$$\sin^{-1}\left(\frac{teenoorst}{skuinssy}\right) = \theta \qquad \cos^{-1}\left(\frac{aangr}{skuinssy}\right) = \theta \qquad \tan^{-1}\left(\frac{teenoorst}{aangr}\right) = \theta$$

Die drie resiproke funksies van sinus, kosinus, en tangens:
- Definisieversameling vir al drie funksies: $0° < \theta < 90°$
- Waardeversameling vir kosekans: $\operatorname{cosec}\theta > 1$
- Waardeversameling vir sekans: $\sec\theta > 1$
- Waardeversameling vir kotangens: $\cot\theta > 0$

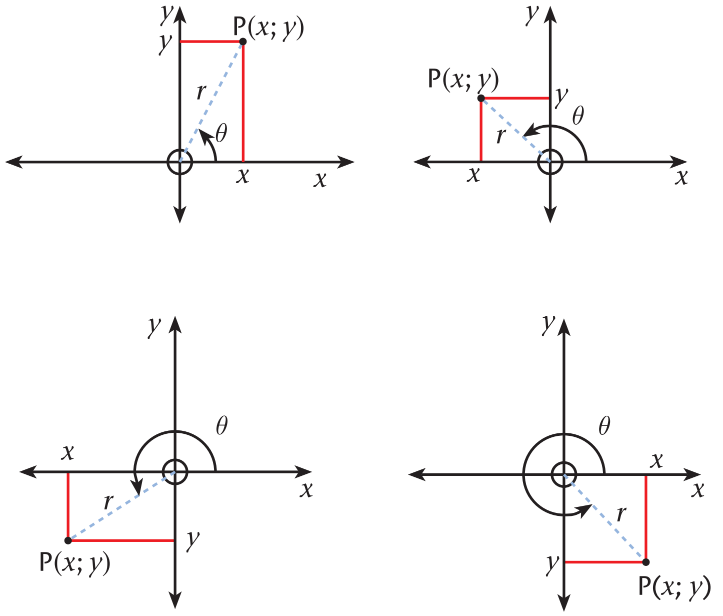
$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{skuinssy}{teenoorst} \qquad \sec\theta = \frac{skuinssy}{aangr} \qquad \cot\theta = \frac{aangr}{teenoorst}$$

$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

Die Cartesiese definisies van die trigonometriese funksies

Vir 'n punt P(x; y)

- by hoek θ antikloksgewys van die positiewe x-axis,
- en 'n afstand r vanaf die oorsprong, waar $r = OP = +\sqrt{x^2 + y^2}$

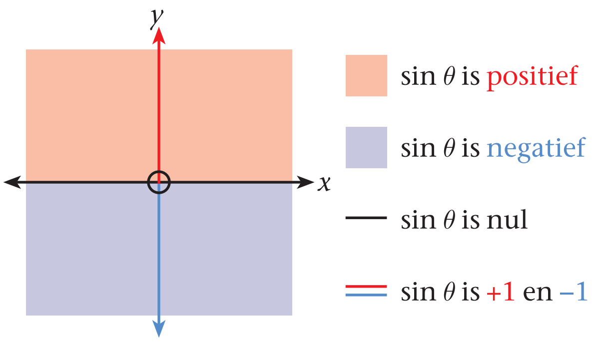


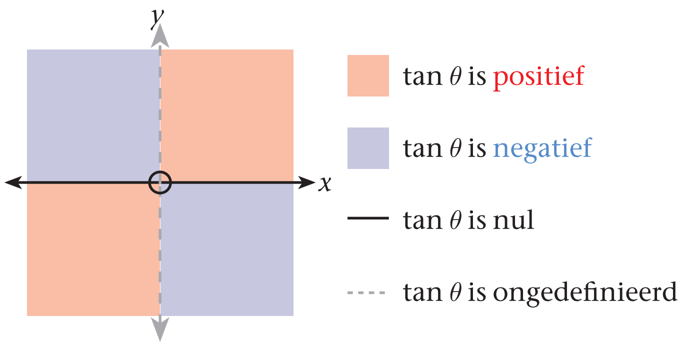
Die drie basiese funksies:

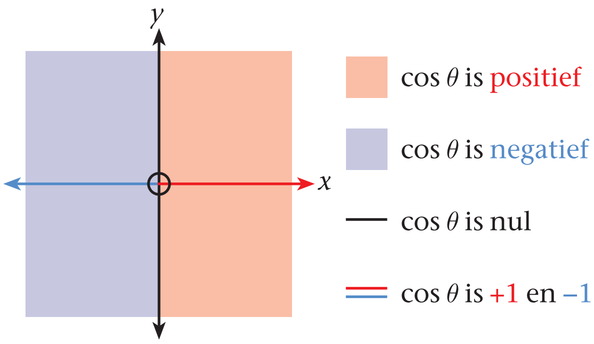
- Definisieversameling vir sinus en kosinus: $0° \leq \theta \leq 360°$
- Definisieversameling vir tangens: $0° \leq \theta \leq 360°$ maar $\theta \neq 90°$ en $\theta \neq 270°$
- Waardeversameling vir sinus: $0 \leq \sin\theta \leq 1$
- Waardeversameling vir kosinus: $0 \leq \sin\theta \leq 1$
- Waardeversameling vir tangens: $\tan\theta$ enige reële getal behalwe 0

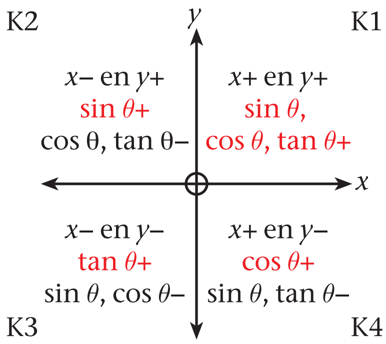
$$\sin\theta = \frac{y}{r} \qquad \cos\theta = \frac{x}{r} \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

Eienskappe van die drie basiese funksies:









Die drie resiproke funksies van sinus, kosinus, en tangens:

$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{\textit{skuinssy}}{\textit{teenoorst}} \qquad \sec\theta = \frac{\textit{skuinssy}}{\textit{aangr}} \qquad \cot\theta = \frac{\textit{aangr}}{\textit{skuinssy}}$$

$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

Effek van koëffisiënt a op grafieke

Die funksies, $y = a \sin \theta$, $y = a \cos \theta$, en $y = a \tan \theta$, is die grafieke van die funksies
$y = \sin \theta$ $y = \cos \theta$ $y = \tan \theta$

- onveranderd wanneer $a = 1$
- gereflekteer om die horisontale as wanneer $a < -1$
- gedilateer (uitgestrek) vanaf die horisontale as wanneer $a > 1$
- saamgepers in die rigting van die horisontale as wanneer $0 < a < 1$
- gedilateer (uitgestrek) vanaf en gereflekteer om die horisontale as wanneer $a < -1$
- saamgepers in die rigting van en reflekteer om die horisontale as wanneer $-1 < a < 0$

Effects of term q on the graph

Die grafiek van die funksies, $y = \sin \theta + q$, $y = \cos \theta + a$ is die grafieke van die funksies
$y = \sin \theta$ $y = \cos \theta$

- opwaarts verplaas vanaf die horisontale as wanneer $q > 0$.
- afwaarts verplaas in die rigting van die horisontale as wanneer $q < 0$.
- onveranderd wanneer $q = 0$.

Wat jy nou uit hierdie hoofstuk behoort te kan doen

Vir reghoekige driehoeke:

- gegewe twee sye, bereken die derde sy, die verhoudings van enige twee sye, en die twee skerphoeke
- gegewe die verhouding van enige twee sye, bereken die skerphoeke en enige ander verhoudings van twee sye
- gegewe 'n skerphoek en 'n sy, bereken die ander skerphoek en die oorblywende twee sye en verhoudings van enige twee sye
- gegewe 'n hoek, bereken die verhouding van enige twee van die sye
- om in staat te wees om reghoekige driehoeke in probleme te identifiseer
- om in staat te wees om probleme op te los wat hoeke, sye, en verhoudings van die sye van reghoekige driehoeke behels

Vir die Cartesiese vlak

- stel die trigonometriese inligting in 'n diagram voor
- om in staat te wees om die korrekte tekens van die funksies in die vier kwadrante te bepaal
- gegewe enige hoek van 0° tot 360°, bereken die uitsetwaarde van enige van die funksies
- gegewe enige koördinaat, bereken die hoek waarby die punt die straalafstand van die punt vanaf die oorsprong is, en enige van die waardes van die funksies
- om in staat te wees om bogenoemde vaardighede te kombineer om probleme op te los wat hoeke tussen 0° en 360°, en afstande of verhoudings van afstande behels

2154 TechMaths Afr G10 LB.indb 229 2015/11/25 4:13 PM

Om grafieke van die funksies te stip, moet jy in staat wees om

- ’n tabel korrek op te stel van inset-uitsetpare (een-vir-een of deur jou sakrekenaar se TABEL-funksie te gebruik)
- ’n vel grafiekpapier korrek te skaleer
- die (*inset*; *uitset*) -koördinaatpare op jou vel grafiekpapier te stip
- ’n gladde kromme deur die punte wat jy gestip het, te trek
- belangrike grafiekeienskappe soos draaipunte, (hetsy die grafiek toeneem of afneem), waar die afsnitte is, en enige asimptote, te identifiseer
- inset- of uitsetwaardes van ’n grafiek af te lees
- definisieversamelings en waardeversamelings op grafieke te identifiseer
- die uitwerkings van a en q wat vroeër genoem is, te verduidelik

6.13 Vasleggingsoefeninge

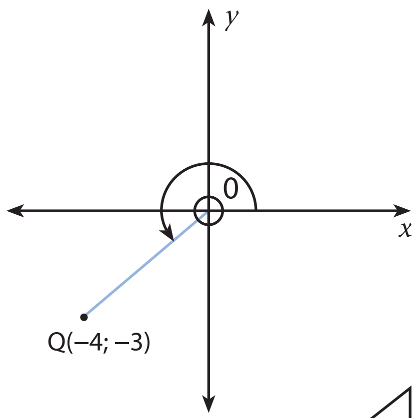
1 Beskou die diagram hieronder.

(a) Bepaal $\cot\theta$ en druk jou antwoord as ’n breuk uit.

(b) Bepaal $\sin\theta$ en druk jou antwoord as ’n breuk uit.

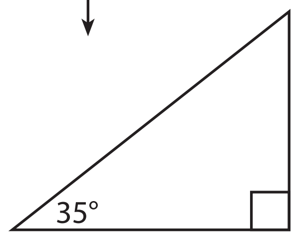
(c) Bepaal $\cos\theta$ en druk jou antwoord as ’n breuk uit.

(d) Bepaal $\sec\theta$ en druk jou antwoord as ’n breuk uit.



2 Bereken $\tan\beta$ as $\sin\beta$ en $\cos\beta < 0$ is.
Teken jou eie skets.

3 As die afstand van ’n persoon 100 m van ’n toring af is, en die hoogtehoek van die top van die toring met die grond 35° is, wat is die hoogte van die toring in meter?



4 Dumi en Nathi staan aan dieselfde kant van ’n hoë gebou.
Hulle merk dat die hoogtehoek na die top van die gebou respektiewelik 30° en 60° is. Indien die hoogte van die gebou 120 m is, vind die afstand tussen Dumi en Nathi in meter. Teken jou eie skets.

2154 TechMaths Afr G10 LB.indb 230 2015/11/25 4:13 PM

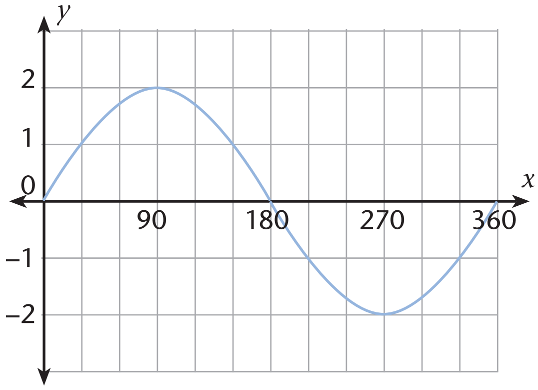
5 Los die volgende vergelykings op vir $\theta \in [0°; 360°]$. Gee jou antwoorde tot een desimale plek.

(a) $\sin \theta = 0{,}234$

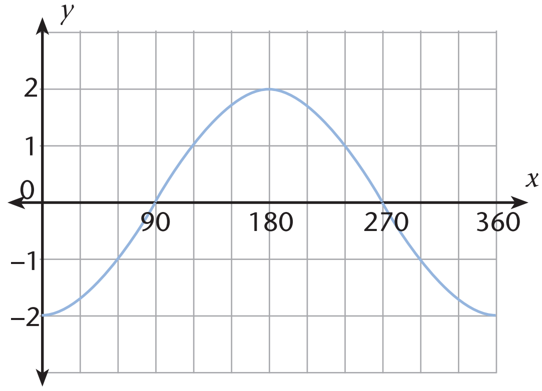
(b) $\cot \theta = \tan 53° + \sin 233°$

6 Bepaal die vergelyking van die volgende grafieke.

(a)



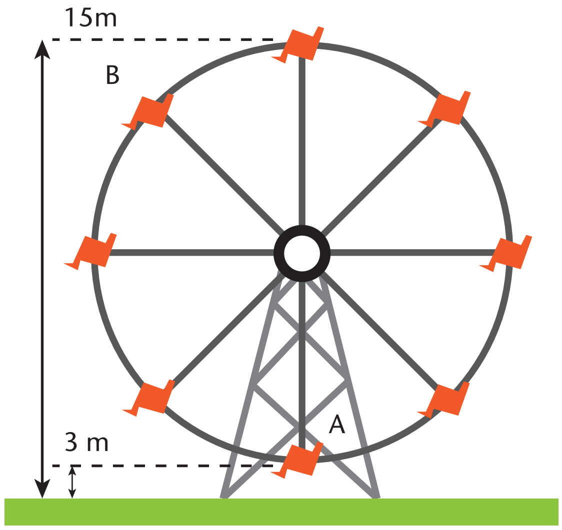
(b)



7 Daar is 'n Ferriswiel by Gold Reef City. Ryers klim op by posisie A wat 3 m bokant die grond is. (Verwys na die diagram langsaan.) Die hoogste punt van die rit is 15 m bokant die grond. Die hoogte bokant die grond word gemodelleer deur die formule

$h(\theta) = a \cos \theta + b$ vir $\theta \in [0°; 360°]$

Die rit neem 40 sekondes om een omwenteling te voltooi.



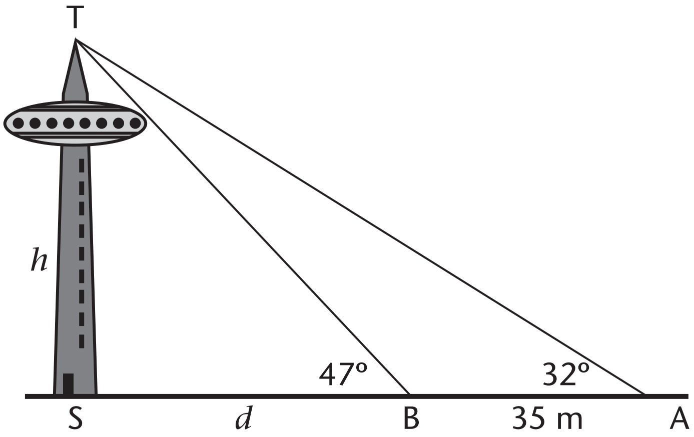
(a) Wys dat $a + b = 3$

(b) Wys dat $-a + b = 15$

(c) Sipho en sy vriende het 240 minute op 'n rit deurgebring. Hoeveel omwentelinge het die rit voltooi terwyl Sipho en sy vriende daarop was?

8 Bepaal die hoogte van 'n baie hoë gebou deur twee hoeke en een afstand te meet:

Die hoogtehoeke van die top van 'n toring genoem T, word vanaf twee punte, A en B gemeet. Die hoeke is respektiewelik 32°en 47°. Die punte A, B, en S lê almal op dieselfde lyn. AB word gemeet as 35 m.



Die hoogte van die toring word voorgestel deur h. Laat die afstand tussen posisie B en die basis van die toring deur d voorgestel word.

(a) Druk tan 47° uit in terme van h, and d.

(b) Druk tan 32° uit in terme van h, d, en die afstand AB.

(c) Bereken die hoogte van die toring. (**Wenk:** elimineer d.)

(d) Bereken die afstand TB.

9 As $x = 27{,}3°$ en $y = 48{,}5°$ is, gebruik 'n sakrekenaar om die volgende te bepaal (rond jou antwoord af tot TWEE desimale plekke):

(a) $\sin x$

(b) $\sqrt{1 - \sin\text{^}2\, x}$

(c) $\sin(y - x) + \sin(y + x)$

10 Los die volgende vergelyking op, waar $0° \leq \theta \leq 90°$. Wys elke belangrike stap, en rond jou finale antwoord af tot DRIE desimale plekke:

$$\frac{2\sin(\theta - 10°) + 0,2}{3} = 0,27$$

11 As $\cos \theta = \frac{7}{25}$ en θ nie in die eerste kwadrant is nie, bepaal die volgende SONDER om die hoek θ te bereken. (Gee jou antwoorde in RASIONALE vorm.)

(a) $\sin \theta$

(b) $\operatorname{cosec} \theta + \sec \theta$

(c) $\tan \theta$

12 (a) Trek ’n netjiese sketsgrafiek van $y = -\tan x$. Doen dit vir die definisieversameling $45° \leq x \leq 225$. Wys die x- en y-afsnitte op jou grafiek.

(b) Gee die maksimum y-waarde van 'n punt op die grafiek.

(c) Wys op jou grafiek waar ons die hoeke x vind wat $y = 1$ maak. Benoem die twee punte P and Q.

(d) Wys die definisieversameling en waardeversameling op jou grafiek deur die asse te gebruik. Onthou dat die twee asse getallelyne is.

13 Volgens ’n Chinese legende uit die Han Dinastie (206 VC – 220 AD), het Generaal Han Xin ’n vlieër oor die paleis van sy vyand laat vlieg om die afstand tussen sy troepe en die paleis te bepaal. Die grond tussen sy posisie en die paleis was gelyk.

(a) As die Generaal 800 m tou laat uitgaan het, en die tou ’n hoek van 35° gemaak het met die grond, ongeveer hoe ver was die paleis van sy posisie af? (**Wenk:** Teken eers ’n driehoek!)

(b) As die vlieër so ver opgegaan het dat hy nog 150 m tou moes gebruik om die vlieër oor die paleis te hou, wat sou die hoogtehoek van die vlieër nou wees?

AANHANGSEL 1

Hersiening: Wat is die grafiek van 'n funksie?

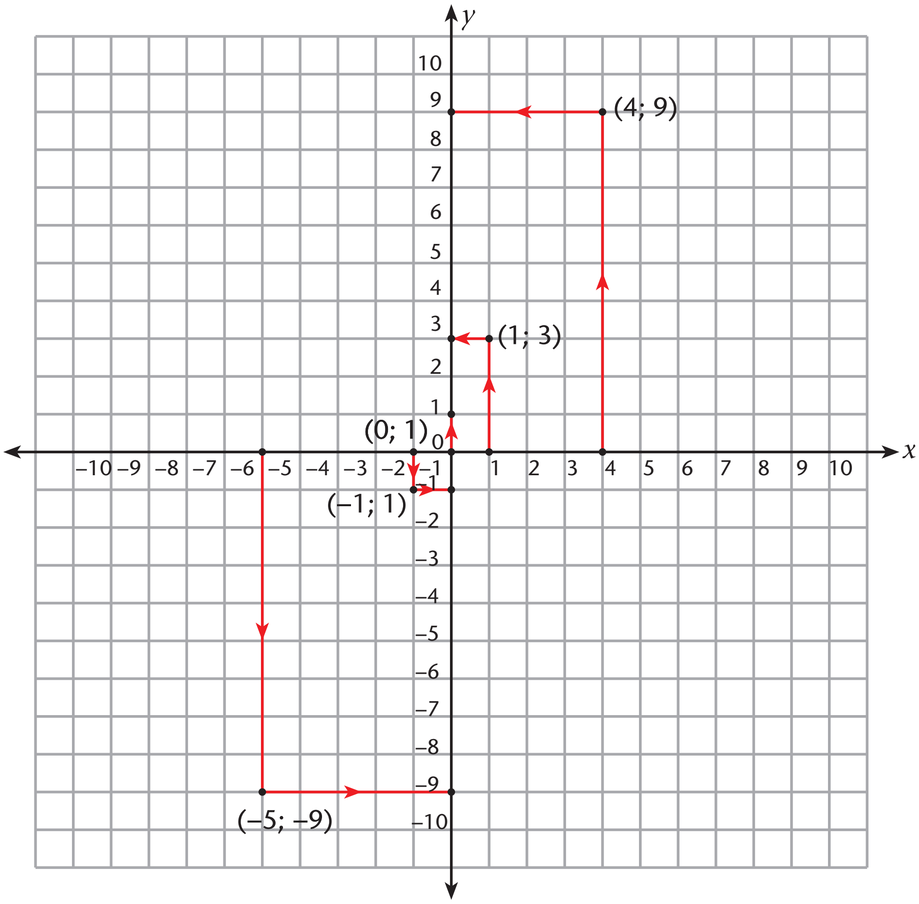
Jy het in die verlede reguitlynfunksies soos $y = 2x + 1$ as grafieke voorgestel. Ons kan dit vir enige funksie doen. Al wat ons benodig, is genoeg (*inset*; *uitset*) koördinaatpare om te stip.

Met ander woorde, die horisontale as is 'n getallelyn vir insetwaardes en die vertikale as is 'n getallelyn vir uitsetwaardes. Ons noem hulle gewoonlik die x- en y-asse (omdat ons gewoonlik insetwaardes met die lettersimbool x voorstel, en die uitsetwaardes met y).

Voorbeeld

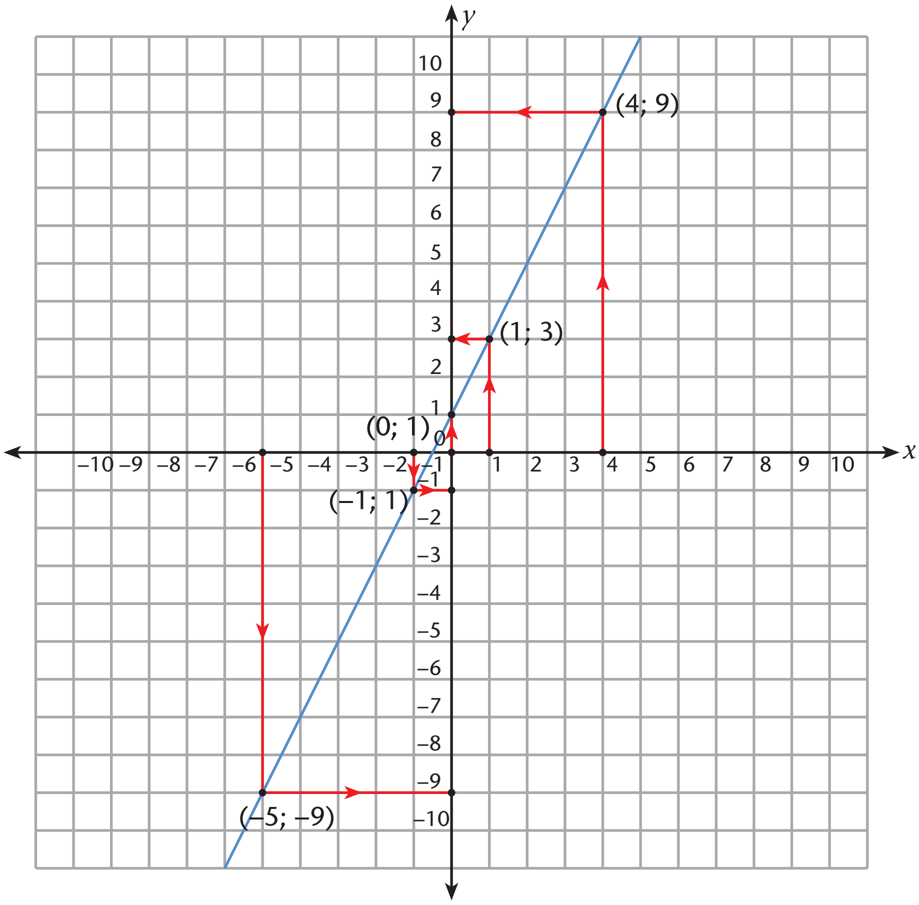
In die vorige reguitlynfunksie is die volgende sommige van die (*inset*; *uitset*) pare (gaan hulle na deur vervanging): (–5; –9); (–1; –1); (0; 1); (1, 3); (4; 9)

Ons kan hierdie punte op 'n Cartesiese ruitenet stip:



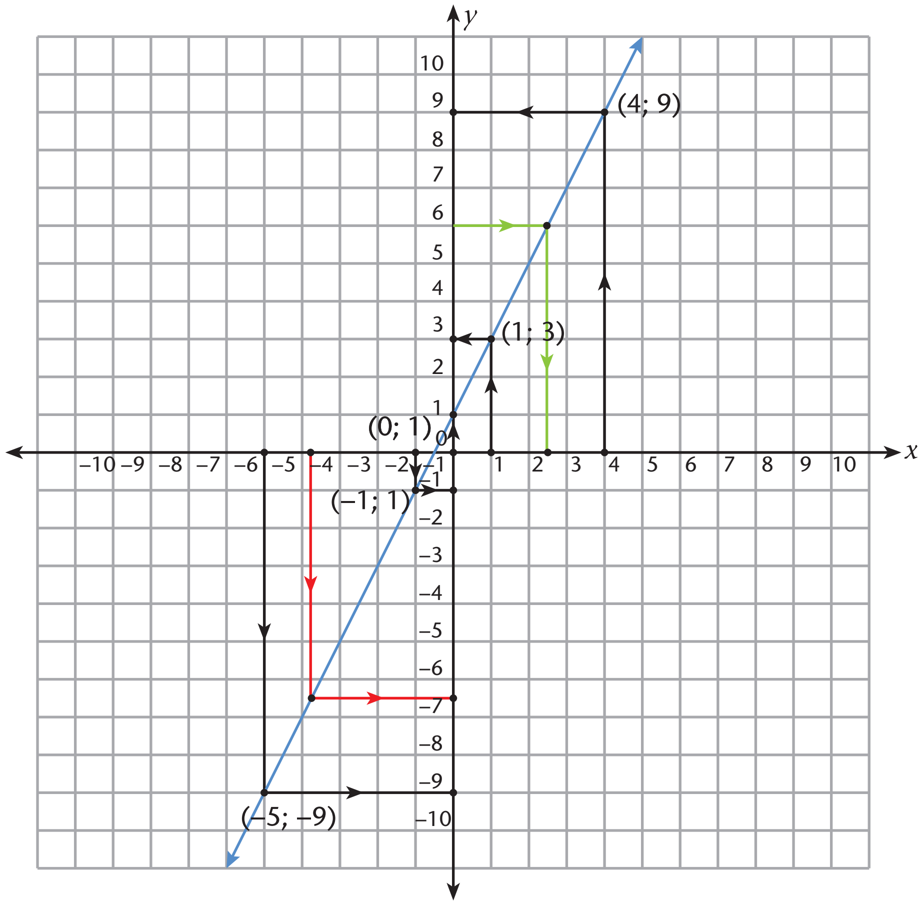
Let daarop hoe ons die uitsetwaardes op die *y*-as van die insetwaardes op die *x*-as kan aflees. Volg die stippellyne met die ruitenet langs in die rigting van die pyltjies van inset na uitset.

Ons kan 'n gladde 'kromme' (hier 'n reguit lyn) deur al die gestipte punte trek:



Nou kan ons die grafiek gebruik om ander inset-uitsetpare af te lees. Twee voorbeelde word hieronder gewys:

- rooi: die insetwaarde is –3,8. Deur die ruitenet te gebruik, kan ons die ooreenstemmende uitsetwaarde op die *y*-as aflees.
- groen: hier is die uitset, 6, bekend; as ons die lyne van die ruitenet in die teenoorgestelde rigting volg, kan ons aflees wat die inset moet wees om ’n uitset van 6 te gee.



Doen die lesings en bevestig hulle met behulp van jou sakrekenaar.

7 FUNKSIES EN GRAFIEKE

In hierdie hoofstuk gaan jy:

- die punt-vir-punt-stipping metode gebruik om die grafiek van ’n vergelyking met twee veranderlikes, te teken
- hierdie metode gebruik om ’n tabel van waardes op te stel wat bestaan uit verskeie punte as oplossings van die vergelyking, en dan die oplossingspunte op die Cartesiese vlak stip

7.1 Funksienotasie

Funksienotasie is een van baie konvensies wat ons gebruik om die verband tussen die waardes van twee veranderlikes voor te stel en te benoem.

Die definisie van 'n funksie bestaan uit die volgende komponente:
- die naam van die funksie
- die veranderlike wat 'n waarde verteenwoordig om die funksie te evalueer
- 'n reël wat sê hoe om die funksie se uitset te bereken vir die gegewe insetwaarde

Wanneer ons die reël tot 'n bepaalde insetwaarde toepas, word die getal wat voorkom die uitsetwaarde genoem en word aangedui deur $f(x)$.

Bestudeer die gegewe funksie: $f(x) = 3x + 2$

$3x + 2$ dit is 'n reël wat sê hoe om die funksie se uitset vir 'n gegewe inset te bereken

x is die waarde van die veranderlike waarmee die funksie geëvalueer word

die letter f is die naam van die funksie

7.2 Hersiening van liniêre funksies

Werk deur die voorbeelde om te hersien wat jy tot dusver oor liniêre funksies geleer het.

Uitgewerkte voorbeelde

A. Probleem:

(a) Teken die tabel hieronder in jou werkboek oor en voltooi dit vir die funksies wat deur $f(x) = x$ omskryf is.

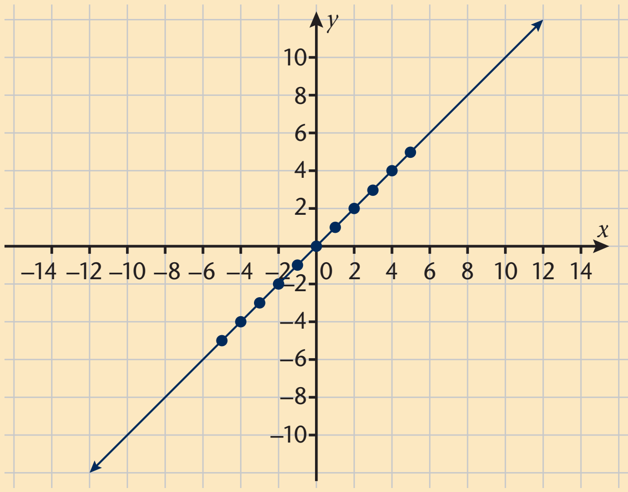
$f(-5) = -5$ $f(-4) = -4$ $f(-3) = -3$ $f(-2) = -2$ $f(-1) = -1$ $f(0) = 0$
$f(1) = 1$ $f(2) = 2$ $f(3) = 3$ $f(4) = 4$ $f(5) = 5$

Oplossing:

(a)

x	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5

(b) Teken die grafiek van die funksie deur die koördinate op die Cartesiese vlak in te stip.



(c) Die x-afsnit: (0; 0)

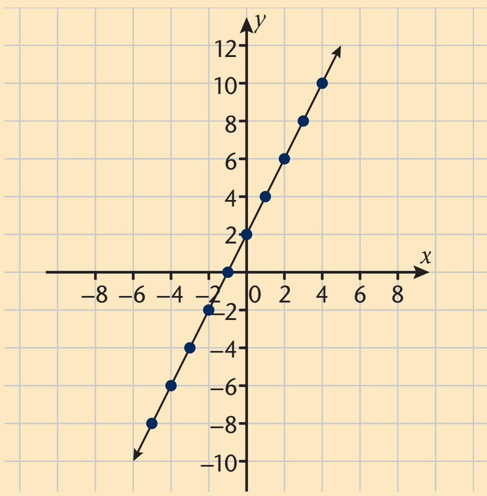
(d) Die y-afsnit: (0; 0)

(e) Definisieversameling: $x \in \mathbb{R}$

(f) Waardeversameling: $y \in \mathbb{R}$

Uitgewerkte voorbeeld

B. Probleem: ’n Grafiek van ’n gegewe funksie word hieronder gegee.



Teken die tabel hieronder in jou werkboek oor en voltooi dit vir hierdie funksie deur die waardes vanaf die grafiek te lees.

Oplossing:

x	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	–8	–6	–4	–2	0	2	4	6	8	10	12
$(x; f(x))$	(–5; –8)	(–4; –6)	(–3; –4)	(–2; –2)	(–1; 0)	(0; 2)	(1; 4)	(2; 6)	(3; 8)	(4; 10)	(5; 12)

(b) x-afsnit: (–1; 0)

(c) y-afsnit: (0; 2)

(d) Definisieversameling: $x \in \mathbb{R}$

(e) Waardeversameling: $y \in \mathbb{R}$

Die **definisieversameling** is die versameling van al die moontlike insetwaardes waarvoor die reël geld.

Die **waardeversameling** is die versameling van al die moontlike uitsetwaardes waarvoor die reël geld.

Oefeninge

1 Teken die tabel hieronder oor en voltooi dit vir die funksies gegee deur:

(a) $f(x) = -x$ (b) $g(x) = x + 5$ (c) $h(x) = -x - 1$

x	**–5**	**–4**	**–3**	**–2**	**–1**	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
$f(x)$												
$g(x)$												
$h(x)$												

2 Teken die grafieke van elke funksie in oefening 1 hierbo, op dieselfde assestelsel.

3 Voltooi die tabel hieronder vir die drie funksies wat jy in oefening 2 geteken het.

Funksie	***x*-afsnit**	***y*-afsnit**	**Definisieversameling**	**Waardeversameling**
$f(x) = -x$				
$g(x) = x + 5$				
$h(x) = -x - 1$				

4 Gebruik die twee afsnit-metode om die grafiek van die volgende funksies te skets:

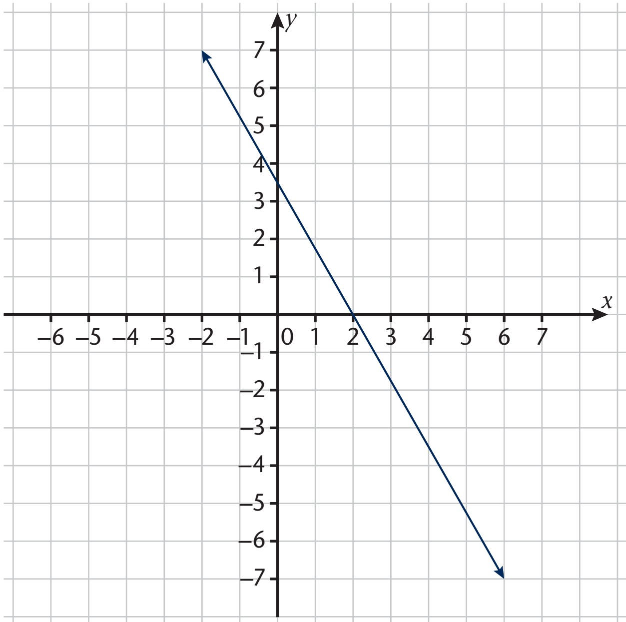
(a) $y = x + 2$ (b) $y = x - 3$ (c) $y = 2x + 1$ (d) $y = -2x + 4$

(e) $x = y - 4$ (f) $x = y$ (g) $y = -3x + 6$

5 'n Grafiek van 'n bepaalde funksie $g(x)$ word hieronder aangedui.

Teken die tabel hieronder oor vir die funksie $g(x)$. Lees die ooreenstemmende x- en y-waardes van punte op die grafiek van $g(x)$ af en voltooi die tabel deur bepaalde ooreenstemmende x- en y-waardes neer te skryf

x						
$y = g(x)$						



7.3 Kwadratiese funksie $y = ax^2$

Uitgewerkte voorbeeld

Probleem: Oorweeg die funksie wat weergegee word deur $f(x) = x^2$.

Oplossing:

Stap 1: Bereken die uitsetwaardes van $f(x) = x^2$ vir heelgetal x-waardes –4 tot +4.

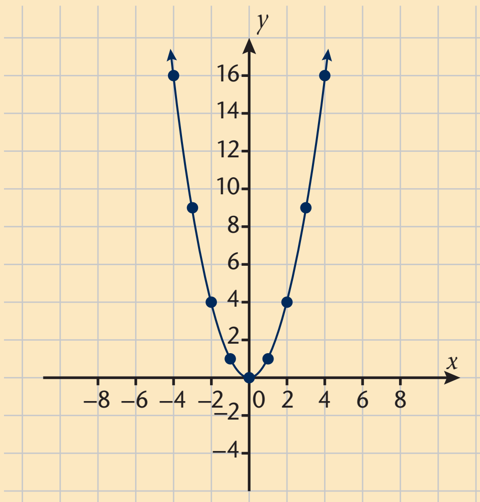
$f(-3) = (-3)^2 = 9$ $\quad f(0) = (0)^2 = 0$ $\quad f(3) = (3)^2 = 9$

$f(-2) = (-2)^2 = 4$ $\quad f(1) = (1)^2 = 1$ $\quad f(4) = (4)^2 = 16$

Stap 2: Stel die funksie $f(x) = x^2$ voor deur van ’n tabel gebruik te maak.

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
$f(x)$	16	9	4	1	0	1	4	9	16

Stap 3: Teken die grafiek wat die funksie $f(x) = x^2$ verteenwoordig.



Stap 4: Identifiseer die vorm van die grafiek.

Die grafiek maak boontoe oop (vorm).

Stap 5: Identifiseer die afsnitte van die grafiek.
Die grafiek kruis die x-as by een punt (0;0).
Die x-afsnitte word ook die wortels genoem.

’n **Afsnit** is ’n punt waar die grafiek die x- of y-as kruis.

Stap 6: Wat is die draaipunt?
Hierdie grafiek het ook 'n draaipunt by (0; 0).

Stap 7: Wat is die definisieversameling?
Die definisieversameling is die versameling van al die reële waardes van x.
Ons skryf dit as $x \in \mathbb{R}$ of $(-\infty; \infty)$.

Stap 8: Wat is die waardeversameling?
Van die grafiek kan ons sien dat die kleinste uitsetwaarde 0 is.
Ons skryf dit as $y \geq 0$ of $[0; \infty)$.

Stap 9: Skryf die as van simmetrie neer; die grafiek is simmetries om die y-as.

As van simmetrie: indien twee punte simmetries om die y-as is, dan is hulle y-koördinate dieselfde en teenoor mekaar en 'n gelyke afstand van die y-as.

Indien twee punte simmetries om die x-as is, dan is hulle x-koördinate dieselfde en teenoor mekaar en 'n gelyke afstand van die x-as.

Oefening Kwadratiese funksie $y = ax^2$

6 Ondersoek die funksie soos gedefinieer deur $f(x) = x^2$ en $g(x) = -x^2$.

(a) Teken die tabel hieronder oor en voltooi:

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
$g(x)$									
$f(x)$									

(b) Teken die grafiek van $g(x) = -x^2$ en $f(x) = x^2$ op dieselfde assestelsel.

(c) Teken die tabel hieronder oor en voltooi.

Funksie	x-afsnit(te)	y-afsnit	Asse van simmetrie	Draaipunt	Definisie-versameling	Waarde-versameling	Vorm
$f(x)$							
$g(x)$							

7.4 Kwadratiese funksie: $y = ax^2 + q$

Uitgewerkte voorbeeld

Probleem: Bestudeer die funksie soos gedefinieer deur $f(x) = x^2$ en $h(x) = x^2 + 1$.

Oplossing: Stap 1: Bereken die uitsetwaardes van $f(x) = x^2$ en $h(x) = x^2 + 1$ en skryf die koördinate vir elke insetwaarde en uitsetwaarde neer.

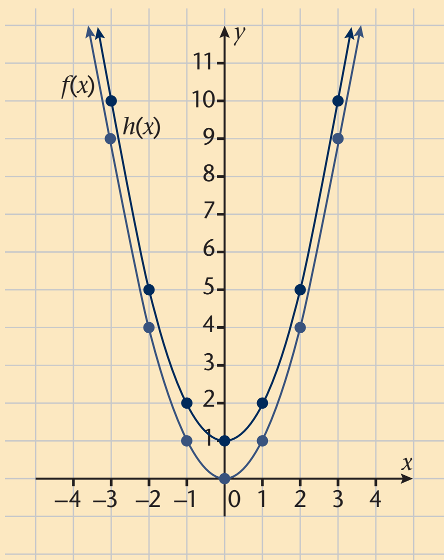
Koördinate vir:

$f(x) = x^2$:
(–4; 16), (–3; 9), (–2; 4), (–1; 1), (0; 0), (1; 1), (2; 4), (3; 9), (4; 16)

$h(x) = x^2 + 1$:
(–4; 17), (–3; 10), (–2; 5), (–1; 2), (0; 1), (1; 2), (2; 5), (3; 10), (4; 17)

Stap 2: Stel die funksies $f(x) = x^2$ en $h(x) = x^2 + 1$ deur middel van 'n tabel voor.

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
$f(x)$	16	9	4	1	0	1	4	9	16
$h(x)$	17	10	5	2	1	2	5	10	17



Stap 3: Die grafiek van $f(x) = x^2$ is alreeds vir jou op die assestelsel gestip. Bepaal die punte vir $h(x) = x^2 + 1$ op dieselfde assestelsel as die van $f(x) = x^2$.

Stap 4: Op watter manier is die grafieke van $f(x) = x^2$ en $h(x) = x^2 + 1$ eenders? (Praat oor hulle vorms.)
Die grafieke van die funksies wat deur $f(x) = x^2$ en $h(x) = x^2 + 1$ verteenwoordig word, maak albei boontoe oop.

Stap 5: Hoe verskil die grafieke van $f(x) = x^2$ en $h(x) = x^2 + 1$ van mekaar?

(a) Die draaipunt van die grafiek wat die funksie $f(x) = x^2$ verteenwoordig, is (0; 0) maar die draaipunt van die grafiek wat die funksie, gedefinieer deur $h(x) = x^2 + 1$, verteenwoordig is (0; 1).

(b) Die insetwaardes van albei funksies is dieselfde, maar die uitsetwaardes van die funksie gedefinieer deur $h(x) = x^2 + 1$ is 1 meer as die uitsetwaardes van die funksie gedefinieer deur $f(x) = x^2$.

Stap 6: Die definisieversameling van $h(x) = x^2 + 1$ is $x \in \mathbb{R}$.

Stap 7: Die waardeversameling van $h(x) = x^2 + 1$ is $y \geq 1$.

Stap 8: Die vergelyking van die simmetrie-as vir die grafiek van $h(x) = x^2 + 1$ is $x = 0$ (y-as).

Oefeninge Kwadratiese funksie $y = ax^2 + q$

7 Sonder om die grafiek van die funksies wat hieronder gedefinieer is te teken, skryf die koördinate van die draaipunte van die grafieke wat elke funksie verteenwoordig, neer.

(a) $f(x) = x^2 + 2$
(b) $f(x) = x^2 + 12$
(c) $f(x) = x^2 + 21$
(d) $f(x) = x^2 + 100$
(e) $f(x) = x^2 + 121$

8 Teken die grafieke van die funksies (a), (c), en (d) op dieselfde assestelsel; en teken die grafieke van die funksies (b), (e) en (f) op 'n ander assestelsel.

(a) $f(x) = x^2 + 5$
(b) $f(x) = x^2 + 2$
(c) $f(x) = x^2 + 3$
(d) $f(x) = x^2 + 4$
(e) $f(x) = x^2 + 7$
(f) $f(x) = x^2 + 6$

9 Teken die tabel hieronder oor en voltooi.

	Funksie	x-afsnitte	y-afsnitte	Koördinate van draaipunt	Definisie-versameling	Waarde-versameling	As van simmetrie
(a)	$f(x) = x^2 + 5$						
(b)	$f(x) = x^2 + 6$						
(c)	$f(x) = x^2 + 3$						
(d)	$f(x) = x^2 + 4$						
(e)	$f(x) = x^2 + 7$						
(f)	$f(x) = x^2 + 10$						

Uitgewerkte voorbeeld

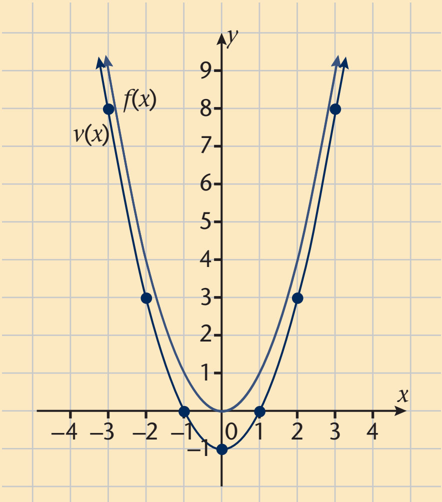
Probleem: Bestudeer die grafiek van $v(x) = x^2 - 1$.

Oplossing:

Stap 1: Teken die tabel hieronder in jou werkboek oor en voltooi.

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
$v(x)$	15	8	3	0	–1	0	3	8	15

Stap 2: Teken die grafiek van $v(x) = x^2 - 1$ op dieselfde assestelsel as die funksie wat deur $f(x) = x^2$ gedefinieer word.



Stap 3: Die draaipunt van die grafiek van die funksie gedefinieer deur $v(x) = x^2 - 1$ is $(0; -1)$.

Stap 4: (a) Die grafiek sny die x-as by $x = -1$ of $x = 1$.

(b) Ons kan die punte waar die grafiek die x-as sny, in koördinate vorm voorstel as $(-1; 0)$ of $(1; 0)$.

Stap 5: (a) Die grafiek sny die y-as by $y = -1$.

(b) Ons kan die punt waar die grafiek die y-as sny in koördinate vorm voorstel as $(0; -1)$.

Stap 6: Die grafiek maak opwaarts oop.

Stap 7: Die definisieversameling van $v(x) = x^2 - 1$ is $x \in \mathbb{R}$.

Stap 8: Die waardeversameling van $v(x) = x^2 - 1$ is $y \geq -1$.

Stap 9: Die vergelyking van die as van simmetrie vir $v(x) = x^2 - 1$ is $x = 0$ (y-as).

2154 TechMaths Afr G10 LB.indb 245 2015/11/25 4:13 PM

Oefeninge Interpreteer die grafiek

10 Teken grafieke van die funksies van (a), (c), en (d) op dieselfde assestelsel, en teken die grafieke van funksies (b), (e) en (f) op 'n ander assestelsel.

(a) $g(x) = x^2 - 4$ (b) $h(x) = x^2 - 9$ (c) $q(x) = x^2 - 16$

(d) $p(x) = x^2 - 25$ (e) $r(x) = x^2 - 36$ (f) $s(x) = x^2 - 49$

11 Gebruik nou die grafieke wat jy geteken het in oefening 10 hierbo, om die tabel hieronder te voltooi. Teken hierdie tabel oor in jou oefeningboek.

	Funksie	x-afsnitte	y-afsnitte	Koördinate van draaipunt	Definisie-versameling	Waarde-versameling	As van simmetrie
(a)	$g(x) = x^2$						
(b)	$h(x) = x^2 - 4$						
(c)	$g(x) = x^2 - 16$						
(d)	$p(x) = x^2 - 25$						
(e)	$r(x) = x^2 - 36$						
(f)	$s(x) = x^2 - 49$						
(g)	$u(x) = x^2 - 121$						
(h)	$v(x) = x^2 - 81$						

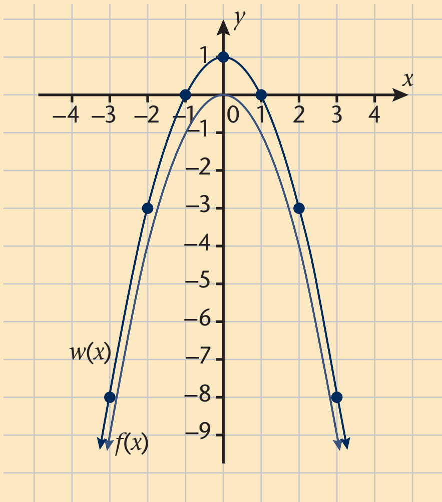
Uitgewerkte voorbeeld

Probleem: Bestudeer die funksie gedefinieer deur $w(x) = -x^2 + 1$.

Oplossing: Stap 1: Teken die tabel hieronder oor en voltooi.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$w(x)$	-15	-8	-3	0	1	0	-1	-8	-15

Stap 2: Teken die grafieke van $f(x) = -x^2$ en $w(x) = -x^2 + 1$ op dieselfde assestelsel.



Stap 3: Die koördinate van die draaipunt van die funksie gedefinieer deur $w(x) = -x^2 + 1$ is $(0; 1)$ en die koördinate van die draaipunt van die funksie gedefinieer deur $f(x) = -x^2$ is $(0; 0)$.

Stap 4: Die x-afsnitte vir die grafiek $w(x) = -x^2 + 1$ is $x = -1$ of $x = 1$.

Stap 5: Die definisieversameling van $w(x) = -x^2 + 1$: $x \in \mathbb{R}$

Stap 6: Die waardeversameling van $w(x) = -x^2 + 1$: $y \leq 1$

Stap 7: As van simmetrie van $w(x) = -x^2 + 1$ is $x = 0$ (y-as).

Oefeninge

12 Teken grafieke van die funksies (a), (b), en (c) op dieselfde assestelsel en grafieke van die funksies (d), (e) en (f) op 'n ander assestelsel.

(a) $g(x) = -x^2 + 4$ (b) $h(x) = -x^2 + 9$

(c) $q(x) = -x^2 + 16$ (d) $p(x) = -x^2 + 25$

(e) $r(x) = -x^2 + 1$ (f) $v(x) = -x^2 + 81$

13 Teken die tabel hieronder oor in jou werkboek en voltooi.

	Funksie	x-afsnitte	y-afsnitte	Koördinate van draaipunt	Definisie-versameling	Waarde-versameling	As van simmetrie
(a)	$g(x) = x^2$						
(b)	$h(x) = -x^2 + 4$						
(c)	$q(x) = -x^2 + 16$						
(d)	$p(x) = -x^2 + 25$						
(e)	$r(x) = -x^2 + 36$						
(f)	$s(x) = -x^2 + 49$						
(g)	$u(x) = -x^2 + 121$						
(h)	$v(x) = -x^2 + 81$						

Oefening Die waarde van q en grafiek $f(x) = ax^2$

14 Gaan terug na die grafieke van die funksies van die vorm $f(x) = ax^2 + q$.

Gebruik die tabel hieronder en skryf neer wat jy opmerk oor hoe die waarde van q die grafiek $f(x) = ax^2 + q$ beïnvloed:

	$q < 0$	$q > 0$
$a > 0$		
$a < 0$		

7.5 Eksponensiële grafiek $y = ab^x$

'n Eksponensiële funksie is 'n funksie in die vorm $y = ab^x$ of $f(x) = ab^x$, waar b 'n positiewe reële getal is, maar nie 1 nie, en x kan enige reële getal wees.

Ons sal 'n grafiek van 'n gegewe eksponensiële funksie teken deur eerstens 'n tabel van waardes op te stel en die punte op die Cartesiese vlak te bepaal. Wanneer ons 'n tabel van waardes skep, is dit baie belangrik om verskillende tipes getalle te gebruik: sommige negatief, sommige positief, en 0.

'n **Horisontale lyn** parallel aan die x-as is 'n **horisontale asimptoot van 'n kurwe** wanneer: die afstand tussen koördinaatpunte op die kurwe en die asimptootlyn voortdurend verminder, maar nooit nul word nie, soos wat die x-koördinate van hierdie punte na regs beweeg (toeneem) of na links beweeg (afneem).

Uitgewerkte voorbeeld

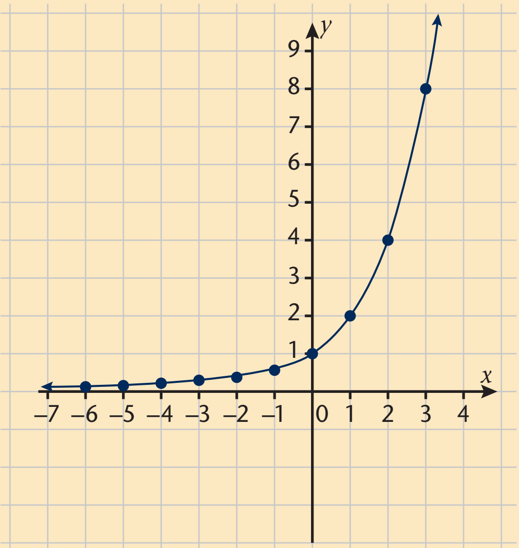
Problem: Trek die grafiek van $y = 2^x$.

Oplossing:

Stap 1: Teken die tabel hieronder oor in jou werkboek en voltooi.

x	–6	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5	6
y	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32	64

Stap 2: Teken die grafiek van $f(x) = 2^x$ deur die punte op die Cartesiese vlak aan te dui.



Stap 3: Identifiseer die kenmerke van die grafiek

1. Definisieversameling van $f(x) = 2^x$: $x \in \mathbb{R}$
2. Waardeversameling van $f(x) = 2^x$: $y > 0$
3. Afsnit van $f(x) = 2^x$: slegs die y-as by (0; 1).
4. Namate die waardes van x kleiner word (van 6 tot -6), kom die grafiek van die funksie nader en nader aan die x-as. Ons sê daar is 'n **horisontale asimptoot** by die x as of $y = 0$.
5. Die y-waarde neem toe namate die x-waarde toeneem. Ons sê daarom dat dit 'n stygende funksie is.

Oefeninge Eksponensiële grafieke

15 Teken elke grafiek hieronder op 'n aparte assestelsel:

(a) $g(x) = 3^x$
(b) $q(x) = 4^x$
(c) $t(x) = 5^x$
(d) $f(x) = 1{,}25^x$
(e) $h(x) = 2(5)^x$
(f) $y = 3(2)^x$
(g) $y = 2(2)^x$
(h) $y = 2(3)^x$
(i) $y = 2(4)^x$

16 Teken die tabel hieronder in jou oefeningboek. Gebruik die grafieke wat jy in oefening 15 geteken het om die tabel hieronder te voltooi.

	Funksie	Afsnit	Definisie-versameling	Waarde-versameling	Asimptoot
(a)	$g(x) = 3^x$				
(b)	$q(x) = 4^x$				
(c)	$t(x) = 5^x$				
(d)	$f(x) = 1{,}25^x$				
(e)	$h(x) = 2(5)^x$				
(f)	$y = 3(2)^x$				
(g)	$y = 2(2)^x$				
(h)	$y = 2(3)^x$				
(i)	$y = 2(4)^x$				

17 Teken nou die volgende grafieke op dieselfde assestelsel wat jy gebruik het om die van oefening 15(a) tot (f) te teken:

(a) $y = -1(3)^x$
(b) $y = -1(4)^x$
(c) $y = -1(5)^x$
(d) $y = -1(1{,}25)^x$
(e) $y = -2(5)^x$
(f) $y = -3(2)^x$

18 Teken die tabel hieronder in jou oefeningboek. Gebruik die grafieke wat jy in oefening 17 geteken het om die tabel hieronder te voltooi.

	Funksie	Afsnit	Definisie-versameling	Waarde-versameling	Asimptoot
(a)	$y = -1(3)^x$				
(b)	$y = -1(4)^x$				
(c)	$y = -1(5)^x$				
(d)	$y = -1(1{,}25)^x$				
(e)	$y = -2(5)^x$				
(f)	$y = -3(2)^x$				

19 In watter opsigte is die grafieke van $y = -1(3)^x$ en $g(x) = 3^x$ dieselfde? Jy kan die vraag beantwoord deur die volgende aspekte te oorweeg:

(a) definisieversameling

(b) waardeversameling

(c) y-afsnit

(d) horisontale asimptoot

20 Hoe verskil die grafieke van $y = -1(3)^x$ en $g(x) = 3^x$ van mekaar? Jy kan die vraag beantwoord deur aandag te gee aan:

(a) die rigting van elke grafiek

(b) watter funksie verminder en watter funksie vermeerder

7.6 Die hiperbool

Die hiperbool-funksie is funksies van die tipe, $y = \frac{a}{x}$; $x \neq 0$ en $y \neq 0$. Net soos ons met die eksponensiële funksie gemaak het, kan ons 'n grafiek van die hiperboliese funksie trek deur eers 'n tabel van waardes te voltooi en daarna die punte op die Cartesiese vlak aan te dui.

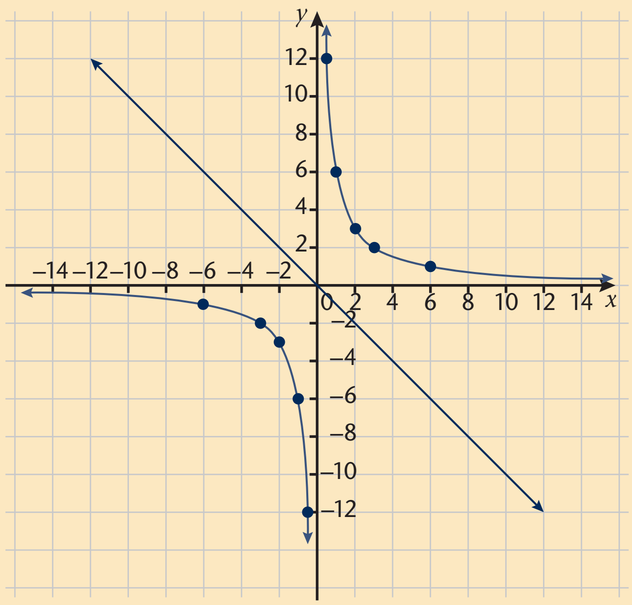
'n Horisontale lyn parallel aan die y-as is 'n **vertikale asimptoot van 'n kurwe** wanneer die afstand tussen koördinaatpunte op die kurwe en die asimptootlyn voortdurend verminder, maar nooit nul word nie, soos wat die y-koördinate van hierdie punte na regs beweeg (toeneem) of na links beweeg (afneem).

Uitgewerkte voorbeeld

Problem: Veronderstel ons wil 'n grafiek teken van 'n funksie gegee deur $y = \frac{6}{x}$.

Oplossing: Ons herskryf hierdie funksie as $xy = 6$ en voltooi dan 'n tabel wat die verhouding tussen die x- en y-waardes verskaf, soos aangedui in die tabel hieronder. Dan stip ons die punte op die Cartesiese vlak neer en verbind hulle.

x	–6	–3	–2	–1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	6
y	–1	–2	–3	–6	–12	12	6	3	2	1



Die grafiek van die hiperbool wat ons geteken het, het die volgende eienskappe:

(a) Definisieversameling van $y = \frac{6}{x}$: $\{x: x \in R, x \neq 0\}$

(b) Waardeversameling van $y = \frac{6}{x}$: $\{y: y \in R, y \neq 0\}$

(c) Die funksie het ’n diskontinuiteit by $x = 0$

(d) Daar is twee asimptote:
  1. ’n Horisontale asimptoot by $y = 0$
  2. ’n Vertikale asimptoot by $x = 0$

(e) Die grafiek het ’n lyn van simmetrie $y = –x$, wat beteken dat een helfte van die hiperbool ’n spieëlbeeld van die ander helfte is.

Oefeninge Die hiperbool

21 Deur gebruik te maak van die tabel metode, teken die grafieke van die funksies wat hieronder gedefinieer word. Gebruik aparte asse.

(a) $y = \frac{-12}{x}$ (b) $y = \frac{6}{x}$ (c) $y = \frac{-6}{x}$

(d) $y = \frac{8}{x}$ (e) $y = \frac{-8}{x}$ (f) $y = \frac{-10}{x}$

(g) $y = \frac{16}{x}$ (h) $y = -\frac{20}{x}$ (i) $xy = 1$

22 Vir elke funksie waarvoor jy in oefening 21 ’n grafiek getrek het, skryf neer:

(a) die definisieversameling

(b) die waardeversameling

(c) die vergelyking van die lyn van simmetrie

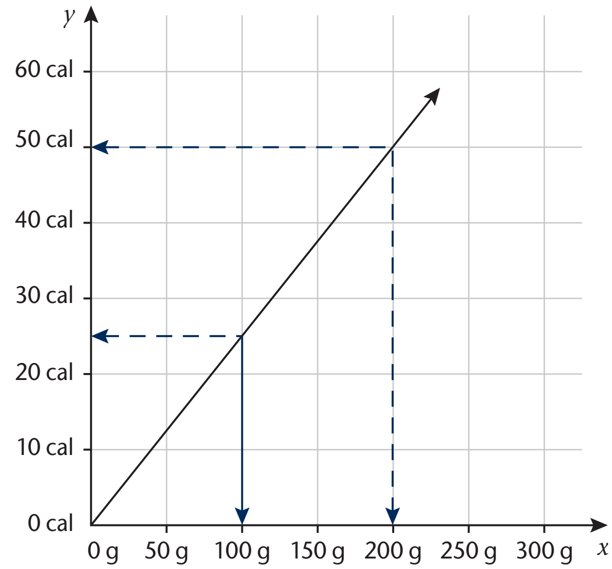
(d) die vergelyking van die asimptote

23 Wat is die effek van die teken a in $y = \frac{a}{x}$?

7.7 Lees van grafieke af

In hierdie afdeling gaan ons inligting van grafieke af lees. Die grafiek hieronder dui die verhouding tussen die aantal gram en die aantal kalorieë van 'n bepaalde ontbytgraan aan.

Die x-as verteenwoordig gram en die y-as verteenwoordig die kalorieë.



Uitgewerkte voorbeeld

Probleem: Watter inligting word op die grafiek aangedui?

Oplossing:

(a) Uit die grafiek kan ons op die horisontale as sien watter hoeveelheid gram gewys word en die aantal kalorieë word op die vertikale as aangedui.

(b) Die gramme word aangedui in intervalle van 50 en die kalorieë in intervalle van 10.

(c) Volgens die inligting op die grafiek bevat 100 gram ontbytgraan 25 kalorieë, en 200 gram ontbytgraan bevat 50 kalorieë.

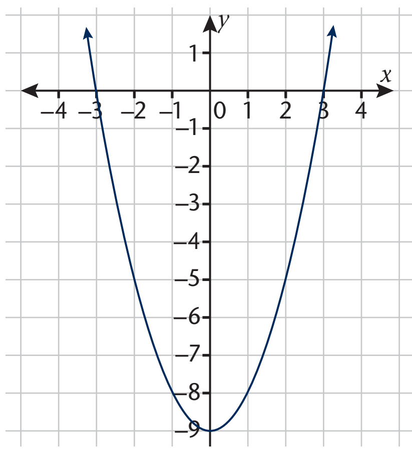
Oefeninge

Verwys na die grafiek wat in die voorbeeld gegee word om die volgende vrae te beantwoord.

24 Indien jy 10 gram ontbytgraan eet, hoeveel kalorieë sal jy inneem?

25 Indien jy 35 kalorieë wil inneem, hoeveel gram ontbytgraan moet jy eet?

26 'n Grafiek van 'n spesifieke kwadratiese funksie word hieronder gegee.



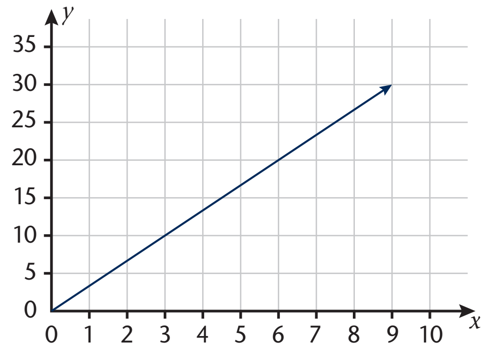
2154 TechMaths Afr G10 LB.indb 252 2015/11/25 4:13 PM

(a) Teken die tabel hieronder in jou werkboek oor en voltooi dit deur die waardes van die grafiek af te lees.

x											
y											

(b) Skryf die koördinate van die draaipunt neer deur van die grafiek af te lees.

27 Sommige mense gebruik nog steeds voet as 'n eenheid van meting. Ons kan lengte in voet (vt.) omreken na lengte in meter. Die grafiek hieronder stel die verhouding tussen meter en voet grafies voor, met die y-as wat mate in voet verteenwoordig, terwyl mates in meter op die x- as aangedui word.



(a) Hoeveel voet is gelyk aan 20 meter?

(b) Die lengte van 'n gebou se fondasie is 25 voet. Wat is die ekwivalente lengte in meter?

(c) Wat is langer: 6 meter of 15 voet?

7.8 Opsomming

- Die definisie van 'n funksie bevat die volgende komponente:
  - die naam van die funksie
  - die veranderlikes wat 'n waarde verteenwoordig waarmee die funksie geëvalueer kan word
  - 'n reël wat bepaal hoe die uitset van die funksie bereken kan word vir die gegewe insetwaarde
  - die getal wat verkry word as die reël toegepas word op 'n bepaalde insetwaarde, word die uitsetwaarde genoem en word uitgedruk deur $f(x)$.

- Die **definisieversameling** is die versameling van al die moontlike insetwaardes waarvoor die reël geld
- **Waardeversameling** is die versameling van al die uitsetwaardes
- Die **afsnit** is die punt waar die grafiek die x- of y-as sny
- Die **asimptoot** is die lyn waarnatoe die grafiek sal beweeg vir baie groot waardes vir een van die veranderlikes

7.9 Konsolideringsoefeninge

1 Teken die tabel hieronder in jou werkboek oor en voltooi vir die funksie gedefinieer deur $f(x) = x$

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$									

(a) Wat is die x-afsnit?

(b) Wat is die y-afsnit?

(c) Wat is die definisieversameling?

(d) Wat is die waardeversameling?

2 Teken die grafieke van die volgende funksies:

(i) $f(x) = -x$ (ii) $g(x) = 3x + 4$ (iii) $h(x) = -x + 1$

(a) Vir elk van bogenoemde, verskaf die x-afsnit.

(b) Vir elk van bogenoemde, verskaf die y-afsnit.

(c) Vir elk van bogenoemde, verskaf die definisieversameling.

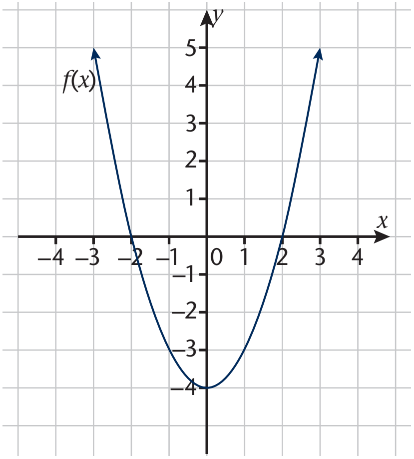
(d) Vir elk van bogenoemde, verskaf die waardeversameling.

3 Bestudeer die grafieke hieronder en skryf neer vir watter waardes van x

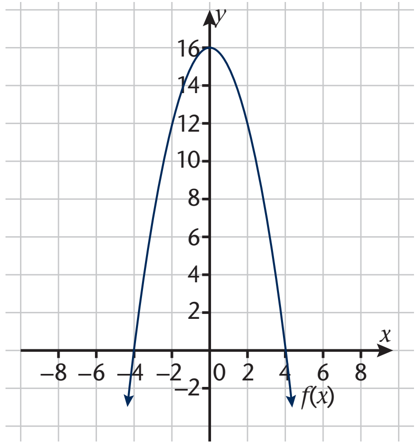
(i) $f(x) = 0$ (ii) $f(x) > 0$ (iii) $f(x) \geq 0$

(iv) $f(x) < 0$ (v) $f(x) \leq 0$

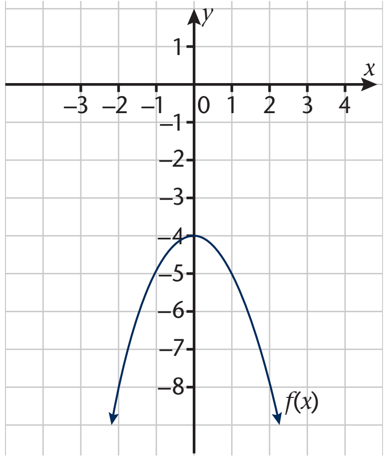
(a) $f(x) = x^2 - 4$



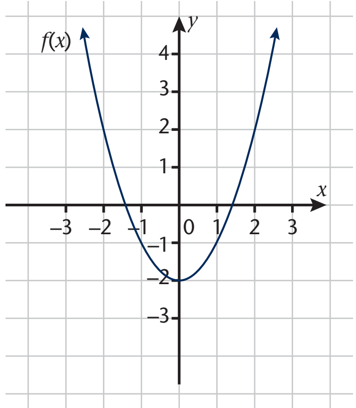
(b) $f(x) = -x^2 + 16$



(c) $f(x) = -x^2 - 4$



(d) $f(x) = x^2 - 2$



4 Bestudeer die volgende funksies en beantwoord die vrae wat volg:

$f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 6$ en $g(x) = 4x + 6$

(a) Teken die grafieke op dieselfde assestelsel.

(b) Gebruik jou grafieke om vir x op te los indien:

(i) $f(x) \geq 0$ (ii) $f(x) = g(x)$ (iii) $f(x) < g(x)$

(c) Wat is die waardeversameling van $f(x)$ en $g(x)$?

(d) Wat is die definisieversameling van die twee grafieke?

5 Beantwoord die vrae op grafiek $y = -x^2$

(a) Indien die punt $(-1; y)$ op die grafiek $y = -x^2$ lê, vind die waarde van y in hierdie koördinate.

(b) Wat is die definisieversameling?

(c) Wat is die waardeversameling?

(d) Het hierdie grafiek 'n minimum of maksimum waarde? Wat is hierdie waarde?

(e) Vir watter waardes van x is die grafiek besig om toe te neem?

(f) Vir watter waardes van x is die grafiek besig om af te neem?

(g) Is die grafiek kontinu?

6 Beantwoord die vrae oor grafiek $y = x^2$

(a) Indien die punt $(2; y)$ op die grafiek $y = x^2$ lê, vind die waarde van y in hierdie koördinate.

(b) Wat is die definisieversameling?

(c) Wat is die waardeversameling?

(d) Het hierdie grafiek ’n minimum of maksimum waarde? Wat is hierdie waarde?

(e) Vir watter waardes van x is die grafiek besig om toe te neem?

(f) Vir watter waardes van x is die grafiek besig om af te neem?

(g) Is die grafiek kontinu?

7 Wat is die draaipunte van die volgende grafieke?

(a) $f(x) = x^2 - 2$ (b) $f(x) = x^2 + 10$

(c) $f(x) = x^2 + 3$ (d) $f(x) = x^2 - 4$

8 Teken die grafieke op dieselfde assestelsel en verskaf in elke geval die volgende inligting:

(i) Afsnit (ii) Definisieversameling (iii) Waardeversameling

(a) $g(x) = 4^x$ (b) $t(x) = 8^x$ (c) $h(x) = \frac{2^x}{3}$ (d) $p(x) = 1{,}75^x$

9 Oorweeg die funksies wat deur $y = -\frac{x}{3}$ en $xy = 2$ voorgestel word.

(a) Teken die grafieke op dieselfde assestelsel.

(b) Skryf die definisieversameling neer.

(c) Skryf die waardeversameling neer.

10 Herskryf die volgende funksies in terme van $y = \frac{a}{x}$

(a) $xy = 5$ (b) $xy = -2$ (c) $xy = 6$ (d) $xy = -12$

8 Meetkunde

Hierdie hoofstuk is hoofsaaklik ’n hersiening van wat jy in vorige grade gedoen het. Dit sal jou die kans gee om jou begrip van meetkunde te verbeter. Maak seker dat jy aandagtig luister na die idees wat geopper word. Dit sal jou help om enige misverstande op te klaar oor die basiese begrippe van meetkunde.

In hierdie hoofstuk gaan jy leer oor:

- die konsep van hoeke
- hoekverhoudings met parallelle lyne
- hoekverhoudings met driehoeke
- die soorte driehoeke en hulle eienskappe
- gelykvormigheid en kongruensie van driehoeke
- soorte vierhoeke en hulle eienskappe
- die stelling van Pythagoras.

Wat jy in hierdie hoofstuk moet kan doen:

- bereken hoeke in diagramme deur jou kennis van parallelle lyne, driehoeke en vierhoeke te gebruik
- identifiseer parallelle lyne, soorte driehoeke en vierhoeke, en hulle eienskappe, en gebruik dit om probleme op te los
- bereken lengtes deur jou kennis van driehoeke (insluitend die stelling van Pythagoras in reghoekige driehoeke) en vierhoeke te gebruik
- besluit of twee driehoeke gelykvormig of kongruent is en dit gebruik om probleme op te los.

2154 TechMaths Afr G10 LB.indb 257 2015/11/25 4:13 PM

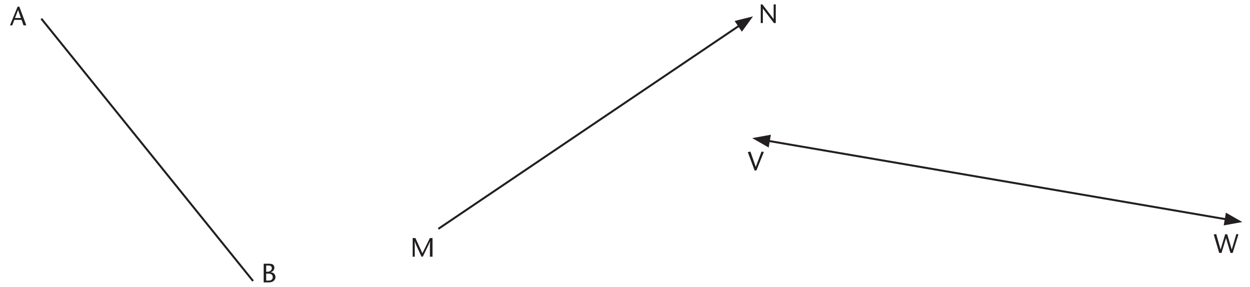
8.1 Hersien hoeke wat met parallelle lyne verband hou

Lynterminologie

Lynsegment: Dit is ’n reguit lyn met twee eindpunte, bv. AB hieronder.

Straal: Dit is ’n reguit lyn met net een eindpunt. Ons stel ons voor dat die ander ‘punt’ aanhou verby enige punt wat ons kan kies. Ons kan ’n pylpunt aan die punt sit om dit te toon, bv. MN hieronder.

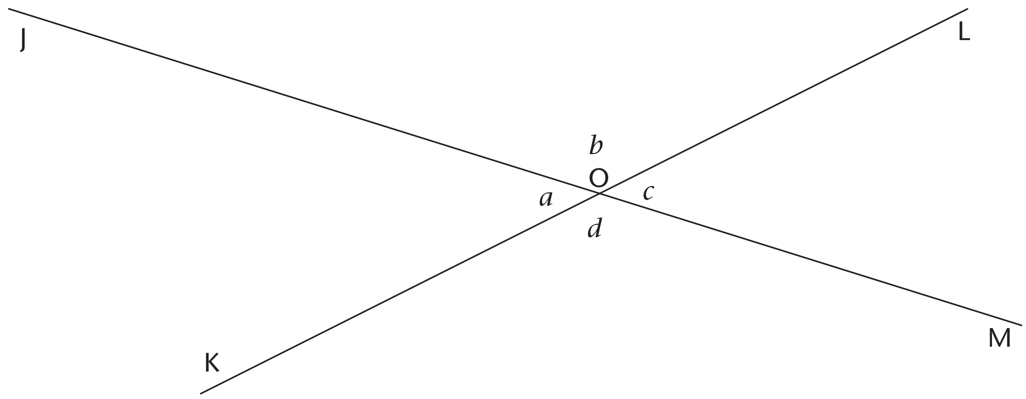
Lyn: Dit is ’n reguit lyn waar albei ‘eindpunte’ aanhou verby enige punte wat ons kan kies. Ons sit pylpunte aan albei punte om dit te toon, bv. VW hieronder.



Let wel: Ons sal die alledaagse konvensie volg en die woord ‘lyn’ gebruik om enige van die drie aan te toon tensy ons duidelikheid moet hê oor presies wat bedoel word.

Terminologie en eienskappe van hoeke by ’n hoekpunt

Hieronder is twee lyne JM en KL wat mekaar by punt O sny om vier aangrensende hoeke a, b, c, en d te vorm:



Hoekpunt: Waar twee strale ontmoet of waar twee lyne mekaar sny, bv. die punt O hierbo.

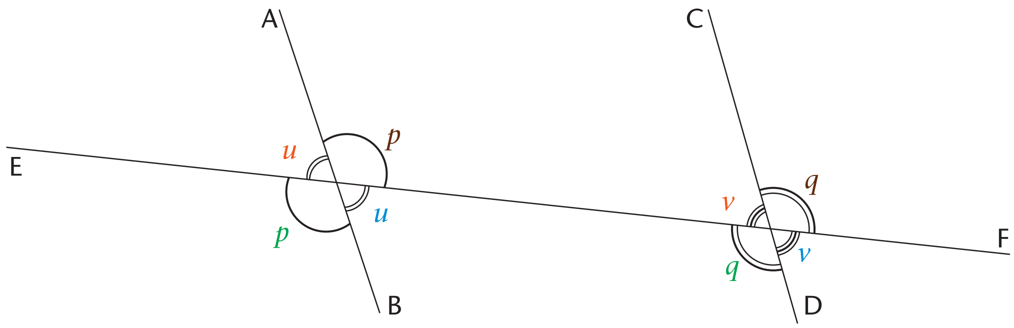
Regoorstaande hoeke: Die twee hoeke aan die teenoorgestelde kante van ’n hoekpunt wat altyd ewe groot is. Daar is twee pare van hierdie hoeke, nl. $\angle a = \angle c$ is regoorstaande en $\angle b = \angle d$ is regoorstaande.

Supplementêre hoeke: hoeke wat saam 180° is, byvoorbeeld die som van die hoeke op ‘n reguit lyn wat gelyk is aan 180°

2154 TechMaths Afr G10 LB.indb 258 2015/11/25 4:13 PM

Terminologie vir hoeke wanneer twee lyne deur ’n snylyn gesny word

Twee lyne AB en CD word deur ’n snylyn EF gesny:



Snylyn: Enige lyn wat twee of meer lyne sny is ’n snylyn, byvoorbeeld lyn EF is ’n snylyn van lyn AB en CD.

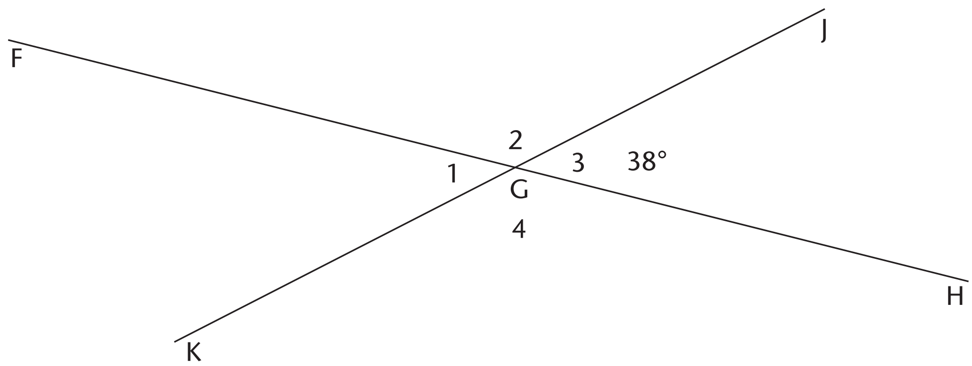
Ooreenkomstige hoeke: Twee hoeke wat in dieselfde posisie relatief tot die snylyn is. Die hoeke in die diagram met dieselfde kleure, byvoorbeeld u en v, is ooreenkomstige hoeke. Daar is vier pare ooreenkomstige hoeke.

Ko-binnehoeke: Twee hoeke wat aan dieselfde kant van die snylyn en tussen die lyne is. Daar is twee pare ko-binnehoeke, p en v , en u en q.

Verwisselende hoek: Twee hoeke wat aan verskillende kante van die snylyn en tussen die twee lyne is. Daar is twee pare verwisselende hoeke, p en q, en u en v.

Oefeninge Basiese hersiening van hoeke

1 Twee lyne FH en JK sny mekaar by die hoekpunt G. Een van die hoeke by hoekpunt G is $\angle G_3$, wat 38° is.

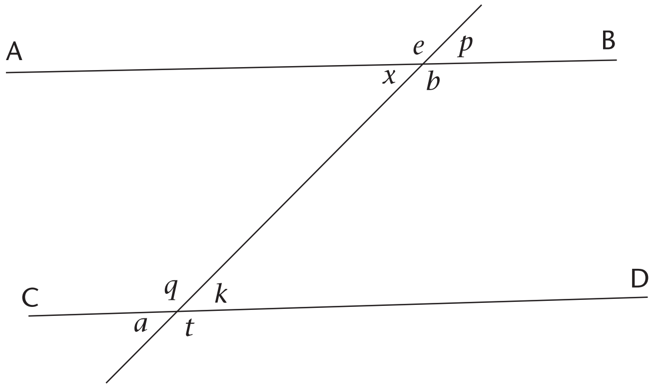


(a) Hoe groot is die ander drie hoeke by die hoekpunt?

(b) Gebruik die denkwyse dat ’n hoek ’n maatstaf van rotasie is, m.a.w. ’n breuk van ’n omwenteling, om te verduidelik waarom:

- $\angle G_1 + \angle G_2 = 180°$
- $\angle G_2 = \angle G_4$.

2 Drie lyne sny mekaar soos getoon. Die agt verskillende hoeke rondom die lyne word met simbole voorgestel.



Identifiseer al die moontlike pare:

(a) verwisselende hoeke

(b) ooreenkomstige hoeke

(c) regoorstaande hoeke

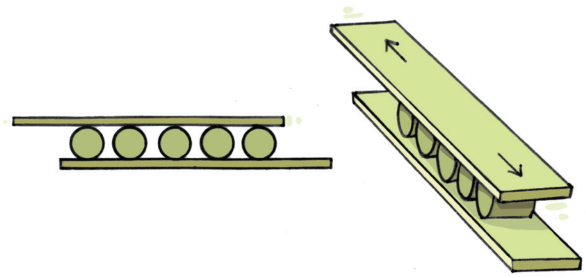
(d) ko-binnehoeke

(e) supplementêre hoeke.

Sommige eienskappe van parallelle lyne word onthul

Oefening Parallelle lyne

3 Silindriese koeëllaers kan gebruik word om swaar voorwerpe gladweg oor ’n plat oppervlak te beweeg met baie min wrywing:



Die boonste plaat in die diagram kan vorentoe en agtertoe rol op die metaalsilinders wat as lineêre bewegingslaers optree. Ons wil hê die boonste plaat moet ten alle tye parallel aan die onderste plaat bly. (Wat gebeur as dit nie die geval is nie?)

(a) Aan watter vereistes moet die silindriese koeëllaers voldoen sodat dit die geval sal wees?

(b) Gebaseer op (a), skryf ’n feit neer oor parallelle lyne en lyne wat nie parallel is nie. (**Wenk:** Laat die deursnee van die koeëllaers jou inspirasie wees.)

2154 TechMaths Afr G10 LB.indb 260 2015/11/25 4:13 PM

Iets baie belangrik oor hoe ons meetkundige diagramme gebruik

As ons ’n **skaaldiagram** het, kan ons hoeke en lengtes direk daarop meet. Die vloerplan van ’n fabriek is ’n voorbeeld van ’n skaaldiagram.

As ons ’n **sketsdiagram** het, is geen van die hoeke en lengtes volgens ’n bepaalde skaal geteken nie. Dit is onmoontlik om mate op so ’n diagram te meet.

Hoe om die twee soorte sketse te gebruik

- Skaaldiagramme: Gebruike direkte mates en enige meetkundige feite wat jy ken om hoeke en lengtes te bereken en goed te verduidelik.
- Sketsdiagramme: Gebruik net meetkundige feite om hoeke en lengtes te bereken en goed te verduidelik. *Moenie jou oë vertrou wanneer jy ’n sketsdiagram gebruik nie. Vertrou net jou begrip*.

Versterk begrip van parallelle en nie-parallelle lyne

Daar is baie maniere waarop ons twee parallelle lyne, en twee lyne wat nie parallel is nie, kan beskryf.

In die volgende drie oefeninge word daardie begrip versterk. Werk nougeset daardeur. Van die begrippe sal later in die hoofstuk gebruik word.

Oefeninge Nog maniere om parallelle lyne en nie-parallelle lyne te verstaan

4 Met gebruik van sirkels:

(a) Trek ’n lyn van minstens 12 cm oor jou bladsy. Merk vier punte 4 cm van mekaar op die lyn. Merk hulle van links na regs P_1, P_2, P_3 en P_4.

Dink eers na oor die volgende. *Stel jou voor* wat sal gebeur.

- Teken ’n sirkel met radius 3 cm met P_1 as middelpunt. Teken ’n sirkel met radius 4 cm met P_2 as middelpunt. Teken nog twee sirkels, met radiusse 5 cm en 6 cm, met onderskeidelik P_3 en P_4 as middelpunt.
- Trek ’n lyn wat al die sirkels aan die *bokant* raak. Noem dit lyn *a*. Die lyn moet nie deur die omtrek sny nie, maar die sirkels net raak. Hierdie lyn is ’n **raaklyn** aan al vier sirkels.
- Trek nou ’n lyn wat al die sirkels aan die *onderkant* raak. Noem dit lyn *b*.
- Wat kan jy omtrent lyne *a* en *b* sê?

Maak ’n ruwe skets van wat jy dink gaan gebeur.

Wanneer jy tevrede is dat jy weet wat gaan gebeur, konstrueer die sirkels en lyne. Maak seker dat jy sien wat jy gedink het gaan gebeur.

(b) Trek soos hierbo ’n lyn op ’n bladsy met punte P_1 tot P_4.

Hoe sal jy die konstruksie in (a) gebruik om twee lyne te trek wat parallel en 12 cm van mekaar is? Skryf eers die stappe neer en doen dan die konstruksie.

(c) Gebruik jou kennis uit Oefening 3 en uit (a) en (b) hierbo om die volgende neer te skryf:

- ’n beskrywing van nie-parallelle lyne
- ’n beskrywing van parallelle lyne.

5 Gebruik snylyne en vergelyk hoeke:

(a) Teken weer die konstruksie in Oefening 4(a). Trek al die lyne dofweg, soos konstruksielyne, behalwe die twee lyne *a* en *b*.

Trek 'n snylyn *t* oor die lyne *a* en *b*.

Meet al die hoeke waar *t* vir *a* en *b* onderskeidelik sny.

Wat let jy op omtrent die pare:

- ooreenkomstige hoeke?
- verwisselende hoeke?
- ko-binnehoeke?

(b) Herhaal wat jy in (a) gedoen het vir die konstruksie in Oefening 4(b).

(c) Gebruik jou kennis uit Oefening 3 en uit (a) en (b) hierbo om die volgende neer te skryf:

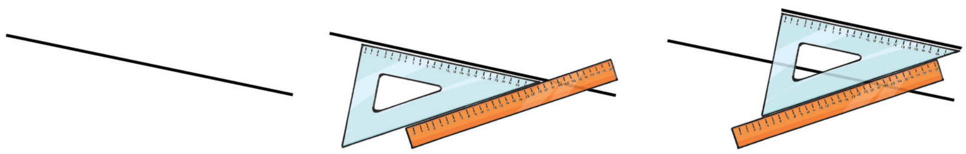
- 'n beskrywing van nie-parallelle lyne
- 'n beskrywing van parallelle lyne.

6 Gebruik twee parallelle snylyne en vergelyk lengtes:

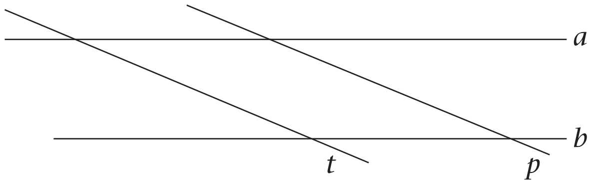
(a) Teken weer die konstruksie in Oefening 4(a). Trek al die lyne dofweg, soos konstruksielyne, behalwe die twee lyne *a* en *b*.

Trek 'n snylyn *t* oor die lyne *a* en *b*.

Gebruik die volgende metode om nog 'n snylyn parallel aan *t* te trek. Noem hierdie snylyn *p*.



Jou diagram behoort min of meer só te lyk:



Meet die lengte van die segment van *t* wat tussen lyne *a* en *b* is. Doen dieselfde vir snylyn *p*.

Wat kan jy sê oor die lengtes van die twee segmente van die parallelle snylyne wanneer *a* en *b* nie parallel is nie?

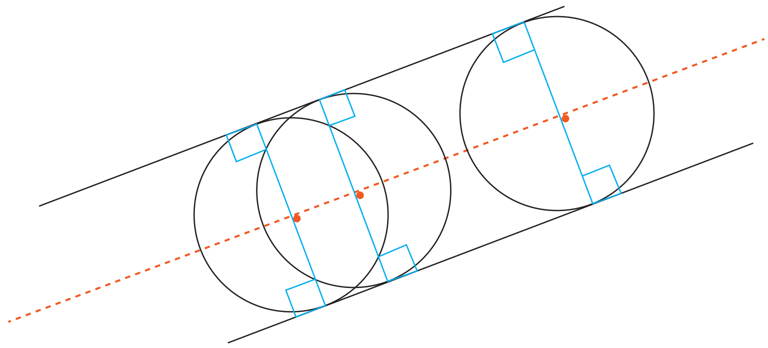
(b) Herhaal wat jy in (a) gedoen het, maar vir die konstruksie in Oefening 4(b).

Wat kan jy sê oor die lengtes van die twee segmente van die parallelle snylyne wanneer *a* en *b* parallel is?

2154 TechMaths Afr G10 LB.indb 262 2015/11/25 4:13 PM

Wat kan ons uit Oefening 3 tot 6 leer?

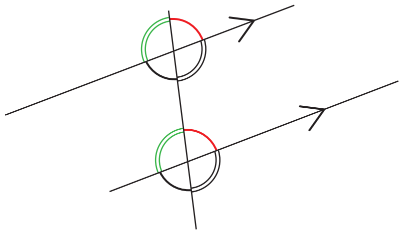
Ons kan duidelikheid kry oor wat parallelle lyne is. Daar is baie maniere om parallelle lyne te definieer.



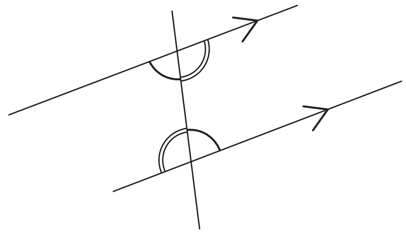
Die sirkels het almal dieselfde deursnee (middellyne is in blou getoon, loodreg op die twee parallelle lyne) en hulle middelpunte is op dieselfde lyn (die rooi stippellyn).

Belangrike maniere om parallelle lyne te beskryf en te definieer

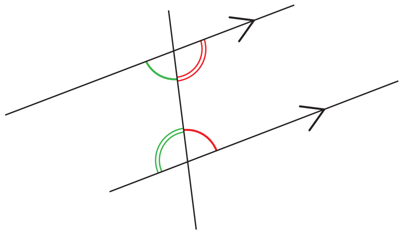
- As jy ’n enkele snylyn deur twee parallelle lyne trek, sal die pare ooreenkomstige hoeke ewe groot wees, soos hier aangedui vir die vier pare hoeke met dieselfde kleure:



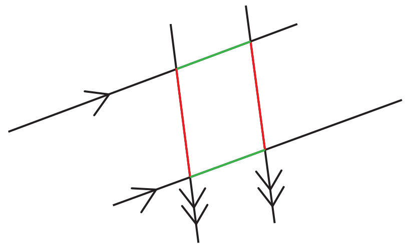
- As jy ’n enkele snylyn deur twee parallelle lyne trek, sal die pare verwisselende hoeke ewe groot wees, soos hier aangedui.



- As jy ’n enkele snylyn deur twee parallelle lyne trek, sal die pare ko-binnehoeke supplementêr wees, m.a.w. saam 180° wees, soos hier deur die rooi paar en groen paar hoeke aangedui.



- As jy twee parallelle snylyne deur twee parallelle lyne trek, sal die teenoorstaande lynsegmente tussen die vier hoekpunte ewe lank wees, soos wat hier die geval is met die twee pare segmente met dieselfde kleure.



Parallelle lyne is lyne wat ’n konstante afstand van mekaar is. Parallelle lyne ontmoet nooit nie, ongeag hoe jy hulle teken m.a.w. as jy twee parallelle lynsegmente verleng, sal hulle mekaar nooit sny nie ongeag hoeveel jy hulle verleng.

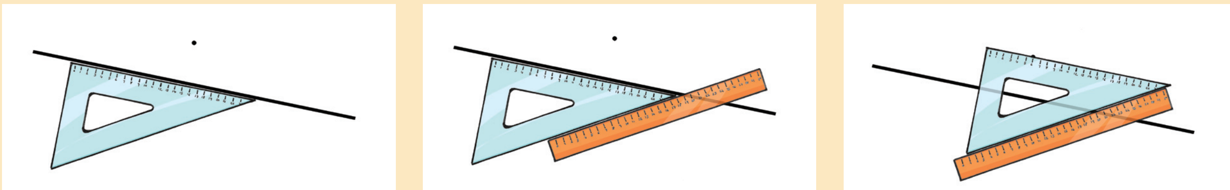
2154 TechMaths Afr G10 LB.indb 263 2015/11/25 4:13 PM

Toekomstige werk: Watter soort meetkundige figuur word in die laaste diagram getoon?

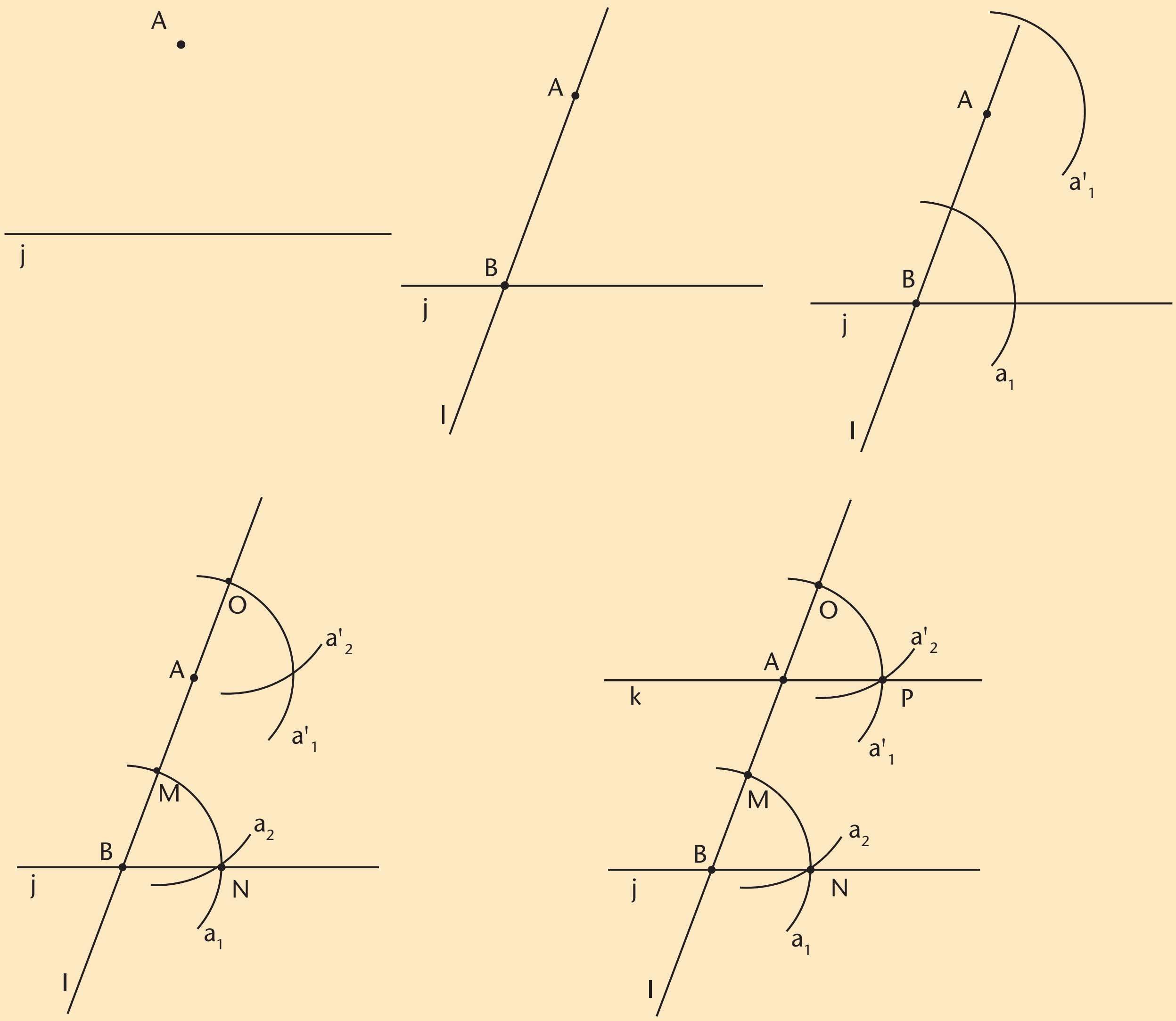
’n Aantal standaard-konstruksies

Voorbeelde Hoe om ’n lyn parallel aan ’n ander lyn te konstrueer

Benadering 1: Gegee ’n lyn en punt wat nie op die lyn is nie; gebruik ’n liniaal en ’n tekendriehoek.



Benadering 2: Gegee ’n lyn en punt wat nie op die lyn is nie; gebruik ’n liniaal en ’n passer.



Benadering 3: Trek ’n lyn parallel aan ’n gegewe lyn op ’n sekere afstand daarvandaan met gebruik van ’n liniaal en passer. Die stappe is amper dieselfde as in Oefening 4(b):
- Stel jou passer op die gegewe lengte.
- Teken sirkels met hulle middelpunte op die lyn.
- Gebruik jou liniaal en trek een of albei van die lyne wat die omtrek van die sirkels raak (dit is in werklikheid raaklyne).

Hierdie manier is nie baie akkuraat nie en is ’n bietjie morsig.

Dit is moeilik om te oordeel waar om die lyn te trek wat al die sirkels raak (die raaklyn). Jy moet baie sirkels teken om seker te wees dat jy min of meer korrek is. Hier is nog ’n manier wat ’n meer akkuraat en vinniger is:

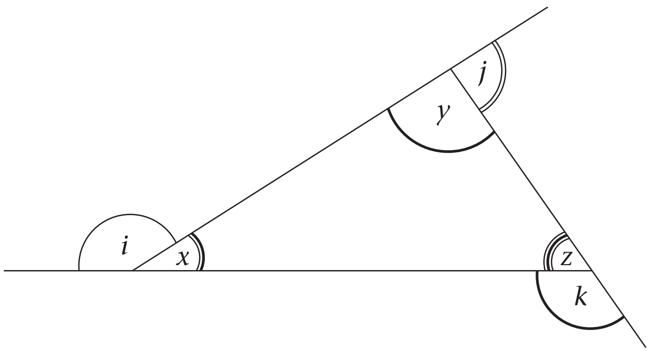
Benadering 4: Trek ’n lyn parallel aan ’n gegewe lyn op ’n sekere afstand daarvandaan met gebruik van ’n liniaal en passer (’n ander manier):
- Hierdie stappe behoort vir jou bekend te wees.
- Kies enige punt of die lyn. Noem dit A.
- Konstrueer ’n loodlyn deur punt A.
- Meet die afstand op hierdie lyn van A na B.
- Konstrueer ’n lyn deur B loodreg op AB.

Oefening

7 Oefen elk van die bostaande konstruksies tot jy tevrede is dat jy dit verstaan en sal onthou.

8.2 Hersien die hoeke van driehoeke

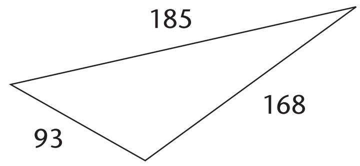
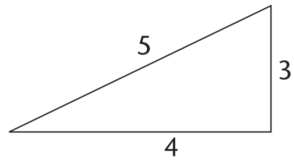
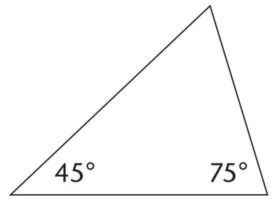
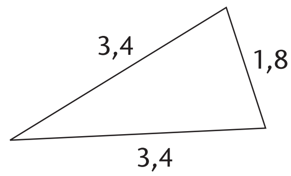
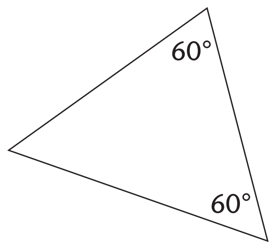
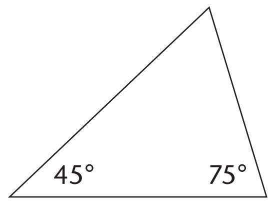
Terminologie

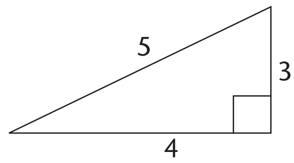
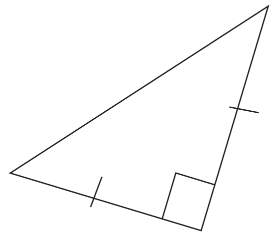
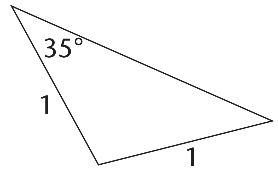
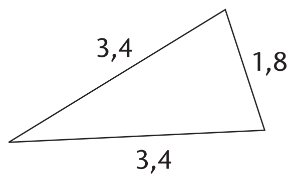
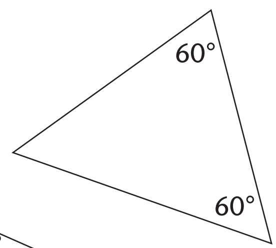
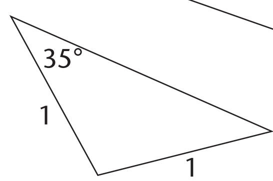
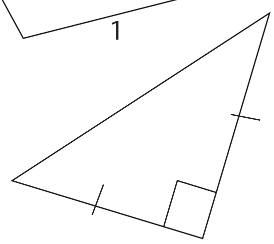
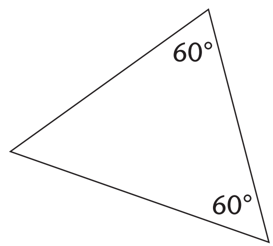


Binnehoek: Die binnehoeke van ’n driehoek is altyd 180°, bv. $\angle x$, $\angle y$ en $\angle z$ in die driehoek hierbo.

Wanneer ons van die ‘hoeke van ’n driehoek’ praat, verwys ons gewoonlik na die binnehoeke.

Buitehoek: Die buitehoek van ’n driehoek is gelyk aan die som van die twee teenoorstaande binnehoeke van die driehoek, bv. $\angle i = \angle z + \angle y$ in die driehoek hierbo. Die som van die buitehoeke van ’n veelhoek is 360°.

Driehoek wat spesiaal is vanweë hulle binnehoeke en die lengte van hulle sye		
Ongelykbenige driehoek	• Binnehoeke het verskillende waardes. • Sye het altyd verskillende lengtes.	  
Skerphoekige driehoek	• Al drie binnehoeke is kleiner as 90°.	  

Driehoek wat spesiaal is vanweë hulle binnehoeke en die lengte van hulle sye		
Reghoekige driehoek	• Een van die hoeke is 90°. • Albei oorblywende hoeke is skerphoeke (hoekom?). • Sye het ’n spesiale wiskundige verwantskap: die stelling van Pythagoras: $(\text{skuinssy})^2 = (sy_1^{\,2}) + (sy_2^{\,2})$ • Die sy teenoor die regte hoek word die skuinssy genoem en is die langste sy van die driehoek.	 
Stomphoekige driehoek	• Een van die hoeke is groter as 90°. • Albei die oorblywende hoeke is skerphoeke (hoekom?).	
Gelykbenige driehoek	• Twee van die hoeke is ewe groot. • Hierdie ewe groot hoeke moet skerphoeke wees (hoekom?). • Sye teenoor die twee ewe groot hoeke is ook altyd ewe lank. • Twee sye is ewe lank. • Die binnehoeke teenoor hierdie twee ewe lang sye is ook altyd ewe groot.	   
Gelykhoekige driehoek	• Al drie hoeke is dieselfde en is gelyk aan 180° ÷ 3 = 60°. • Word ook ’n **gelyksydige** driehoek genoem omdat al drie sye ewe lank is.	

Oefeninge Die driehoek-familie en belangrike eienskappe van driehoeke

8 Gee voorbeelde van die volgende driehoeke, indien moontlik. Jy moet 'n skaaltekening van elke soort driehoek op gestippelde papier maak wat jou onderwyser sal voorsien. Jy kan enige hoekgrootte en sylengte kies, solank die driehoek volgens die beskrywing is.

(a) 'n reghoekige ongelykbenige driehoek

(b) 'n stomphoekige gelykbenige driehoek

(c) 'n reghoekige driehoek met twee stomp hoeke

(d) 'n gelykhoekige driehoek waarvan een sy 5 cm lank is

(e) 'n skerphoekige driehoek wat ook gelykbenig is

(f) 'n gelykbenige reghoekige driehoek

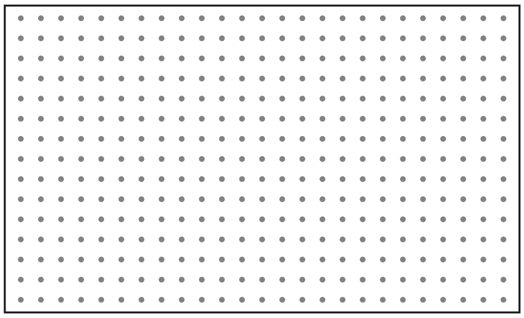
(g) 'n ongelykbenige stomphoekige driehoek

(h) 'n driehoek waarvan die sye in die verhouding 1:2:3 is

(i) 'n gelykbenige driehoek met twee hoeke groter as die derde hoek.

Let wel: Gestippelde papier is bloot 'n rooster van stippels wat op gelyke afstande van mekaar langs die twee hoofrigtings op 'n vel A4-papier gerangskik is. Kyk in die hoofstuk getiteld Addendum hoe om dit te gebruik.

As jy om die een of ander rede nie gestippelde papier in die hande kan kry nie, moet jy die driehoeke met 'n liniaal en passer konstrueer.



9 'n Leerder sê die volgende: '*Die langste sy van 'n driehoek is altyd teenoor die grootste binnehoek.*'

(a) Stem jy saam hiermee? Vind uit of dit waar is deur drie of meer driehoeke te teken wat baie verskillend lyk. Jy behoort nie iets te meet nie, tensy een van jou driehoeke amper gelyksydig of gelykhoekig is.

(b) 'n Ander leerder vra dan: '*Beteken dit dus dat die grootste hoek altyd teenoor die langste sy is?*' Hoe dink jy?

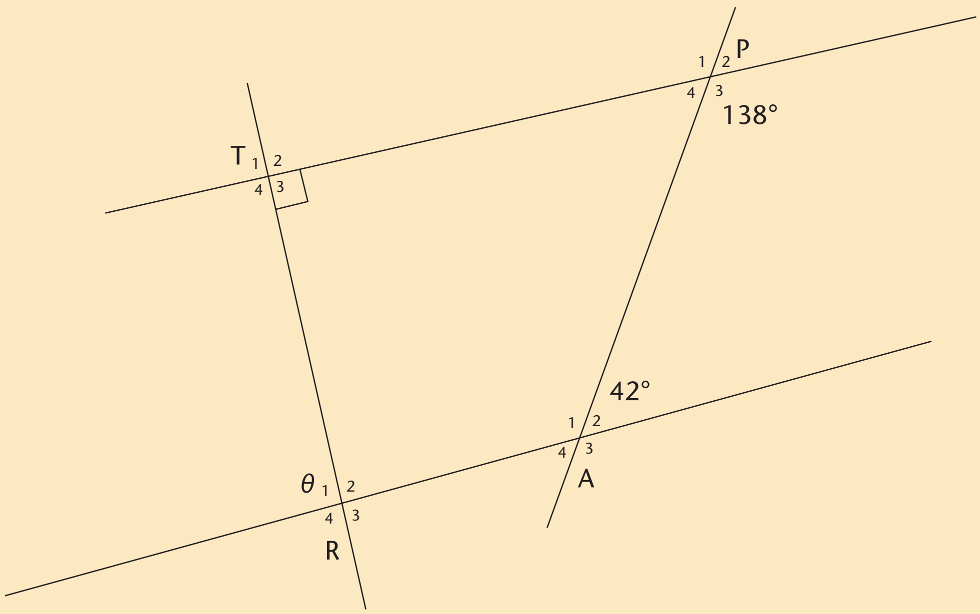
(c) Dink na oor of die volgende sin maak: '*In enige driehoek waarvan die drie sye verskillende lengtes is, is die langste sy en die grootste hoek teenoor mekaar, en is die kortste sy en die klein hoek teenoor mekaar.*'

(d) Wat kan jy oor die sy van 'n driehoek sê waarvan die lengte tussen dié van die kortste en langste sye is?

Samevatting van die meetkunde van parallelle lyne en driehoeke

Uitgewerkte voorbeeld **Redeneer meetkundig**

Probleem: Bereken hoek θ in die diagram hieronder:



Oplossing: Bestudeer die diagram aandagtig om te sien of jy iets besonders opmerk. Baie min inligting word gegee, so begin deur dit te ondersoek. Let daarop dat die gegewe ko-binnehoeke supplementêr is.

Stap 1: $\angle P_3 + \angle A_2$

$= 138° + 42°$

$= 180°$

Dit beteken dat:

PT || AR [ko-binnehoeke is supplementêr]

Stap 2: $\angle R_1 = \angle T_3$ [verwisselende hoeke tussen parallelle lyne is ewe groot]

$\therefore \theta = 90°$

Toekomstige werk: Watter soort meetkundige figuur is TRAP?

2154 TechMaths Afr G10 LB.indb 269 2015/11/25 4:14 PM

Uitgewerkte voorbeeld **Algebraïese vergelykings uit meetkundige verwantskappe**

Probleem: In die skets is IQ ’n reguit lyn. Bepaal die volgende:

(a) die waarde van α, en

(b) die waarde van x

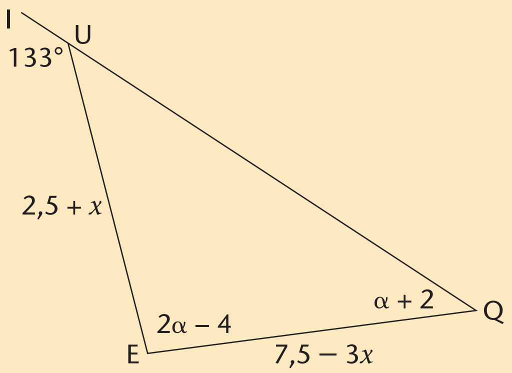
Gegee: $\angle IUE = 133°$

$\angle E = 2\alpha - 4$

$\angle Q = \alpha + 2$

$EU = 2,5 + x$ en

$EQ = 7,5 - 3x$



Oplossing:

(a) $\angle E + \angle Q = \angle IUE$ [buitehoek van driehoek = som van teenoorstaande binnehoeke]

So: $(2\alpha - 4) + (\alpha + 2) = 133°$

$3\alpha - 2 = 133°$

$3\alpha = 135°$

Dus: $\alpha = 45°$

$\angle Q = \alpha + 2 = (45°) + 2 = 47°$

$\angle QUE = 180° - \angle IUE = 180° - 133° = 47°$ [hoeke op ’n reguit lyn is supplementêr]

$EU = EQ$ [$\triangle QUE$ is gelykbenig]

Dus: $2,5 + x = 7,5 - 3x$

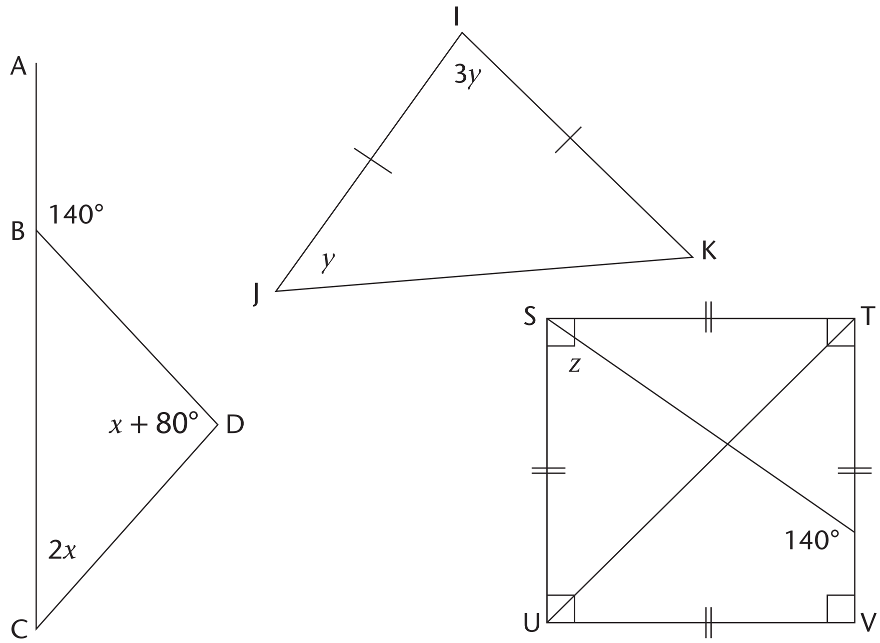
$4x = 10$

$x = 2,5$ eenhede

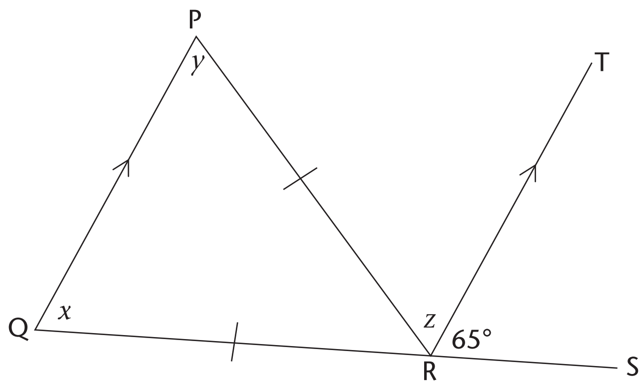
Oefeninge

NB: Gee redes vir elke stap wanneer jy dit as ’n feit stel.

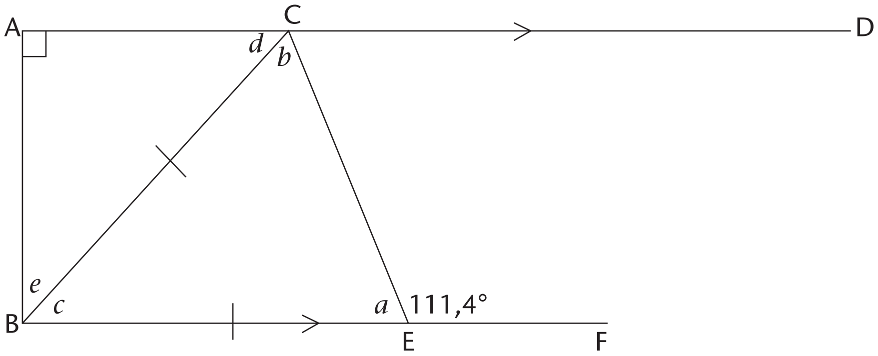
10 Bereken die waarde van x, y, en z in die volgende figure:



11 Bereken die ontbrekende hoeke in die volgende diagram:

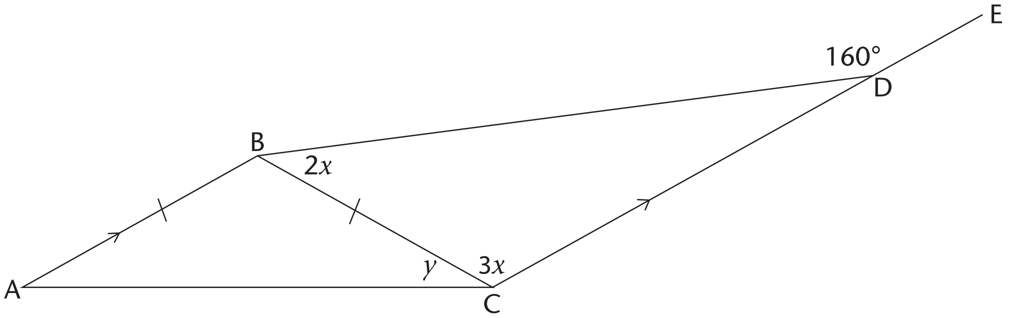


12 Bepaal hoeke a, b, c, d, en e in die volgende diagram:

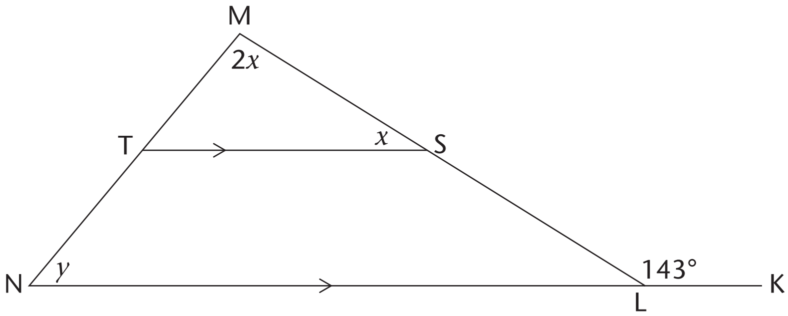


13 Bepaal die onbekende hoeke in die volgende diagramme:

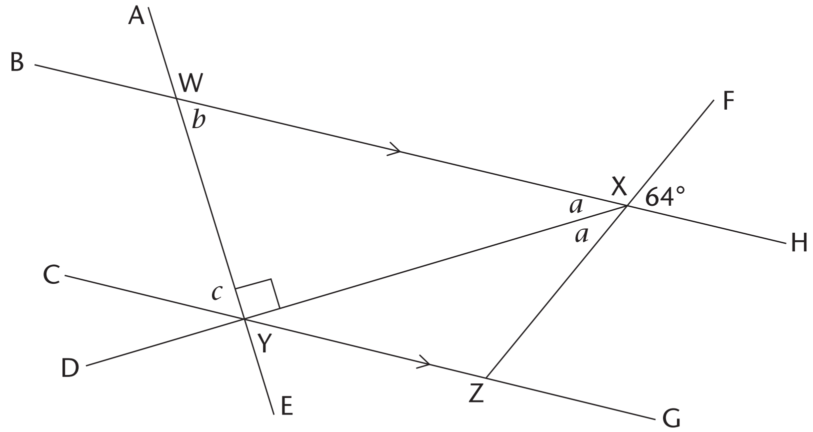
(a) In die diagram is AB = BC en AB || CE.



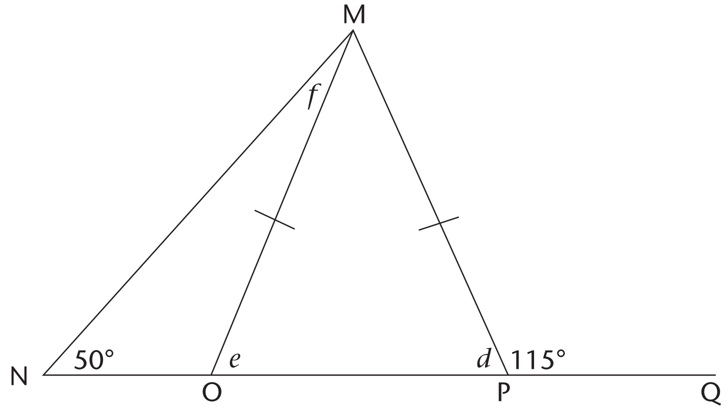
(b) In die diagram is ST || KN.



14 (a) Bepaal die onbekende hoeke *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, en *f* in die volgende diagramme:



(b)



15 Sê of die volgende waar of onwaar is (indien onwaar, verander die stelling om dit waar te maak):

(a) Alle skerphoekige driehoeke is ongelykbenige driehoeke.

(b) Sommige gelykhoekige driehoeke is nie gelyksydig nie.

(c) Die kortste sy van ’n driehoek is teenoor die grootste hoek.

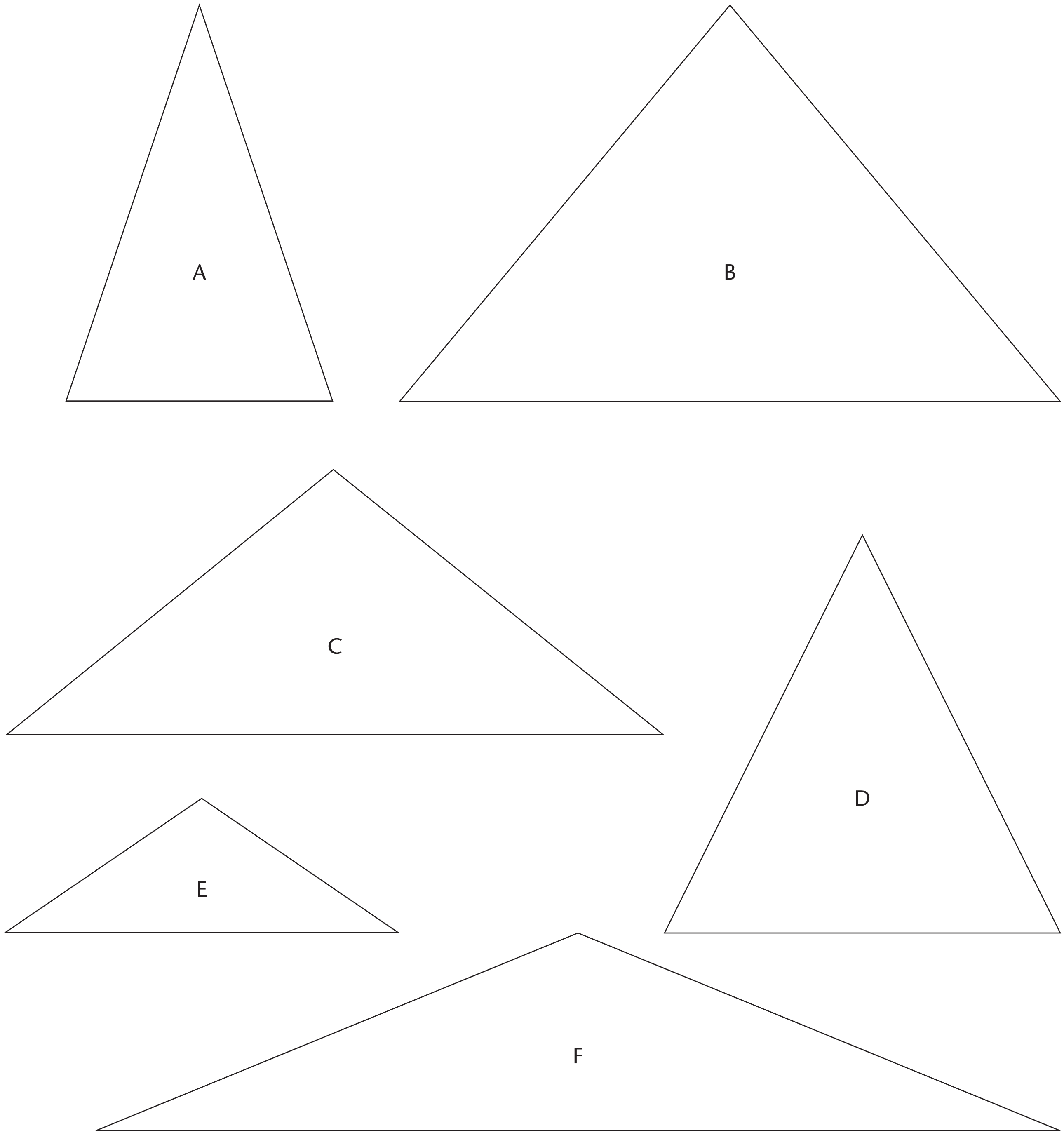
(d) Sommige driehoeke het twee stomphoeke.

(e) ’n Gelyksydige driehoek is altyd gelykbenig.

8.3 Kongruensie van driehoeke

Oefeninge Ondersoek kongruensie

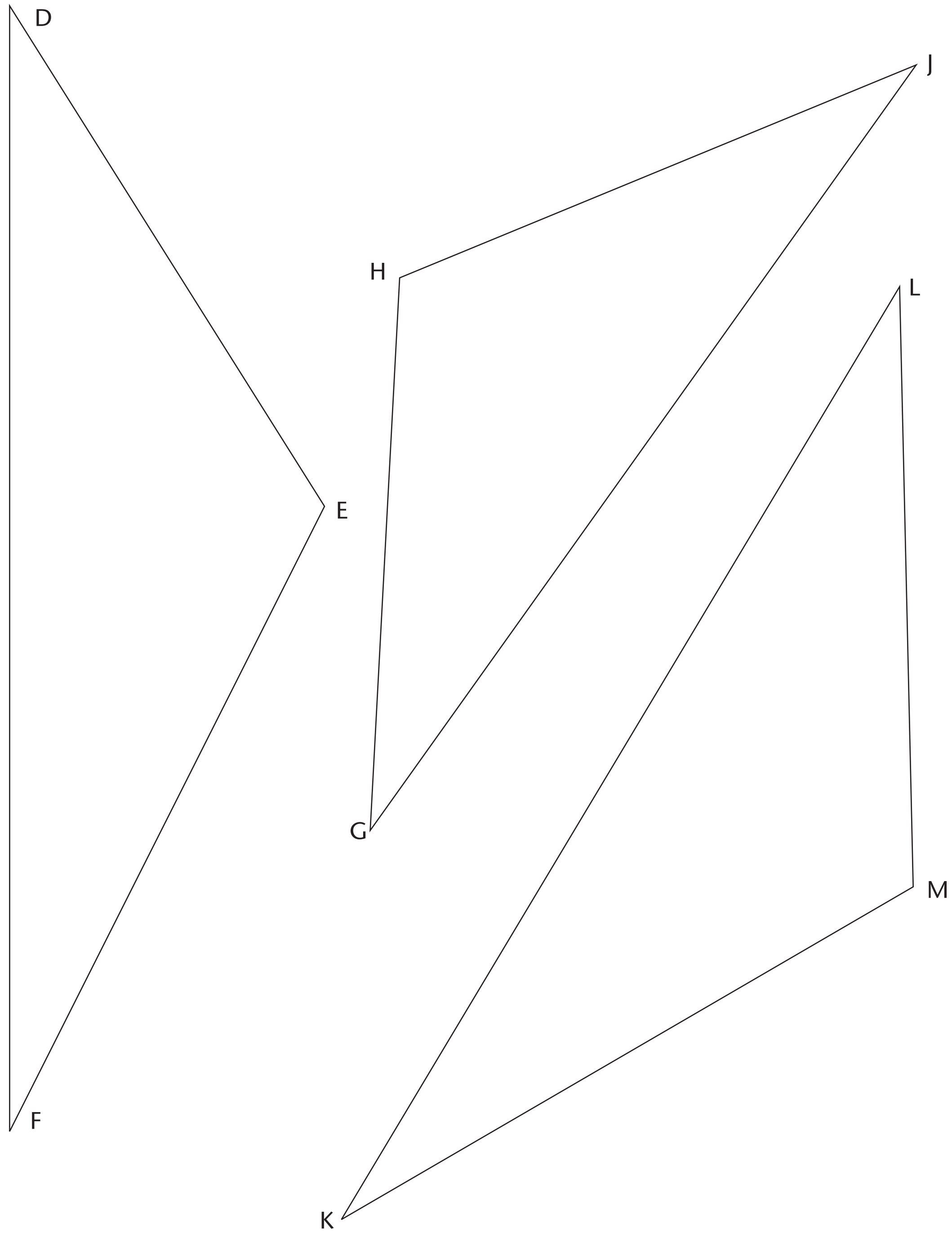
16 In die ses driehoeke hieronder, is daar iets wat dieselfde is? Beskryf in woorde wat jy oplet dieselfde is. Begin jou beskrywing met die woorde: 'In elk van die driehoeke ...'

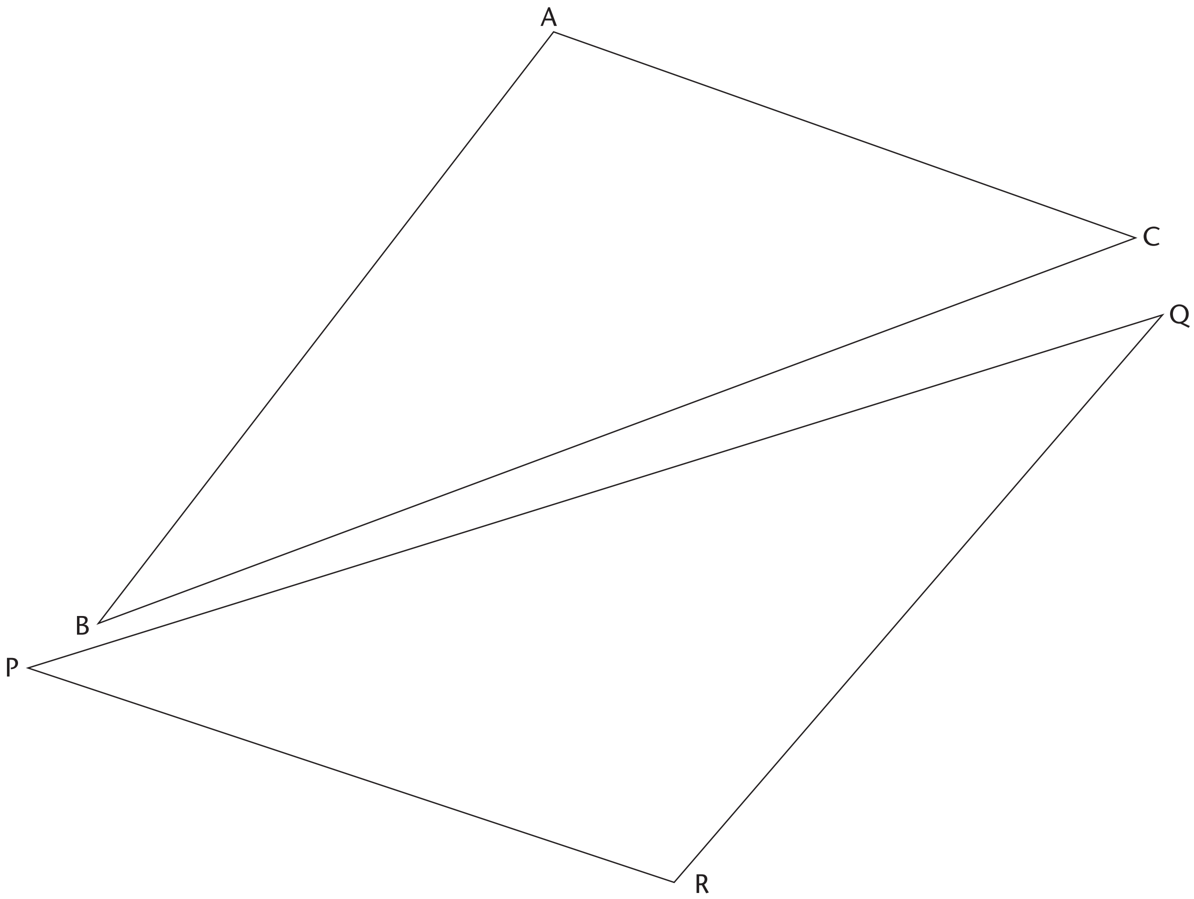


17 Is die vyf driehoeke hieronder en op die volgende bladsy almal dieselfde, of is daar verskille tussen hulle?

(a) Gebruik jou liniaal en gradeboog om al die sye en al die hoeke van elk van die vyf driehoeke hieronder en op die volgende bladsy te meet. Skryf die afmetings op die driehoeke neer.

(b) Watter eienskappe is dieselfde in die vyf driehoeke?

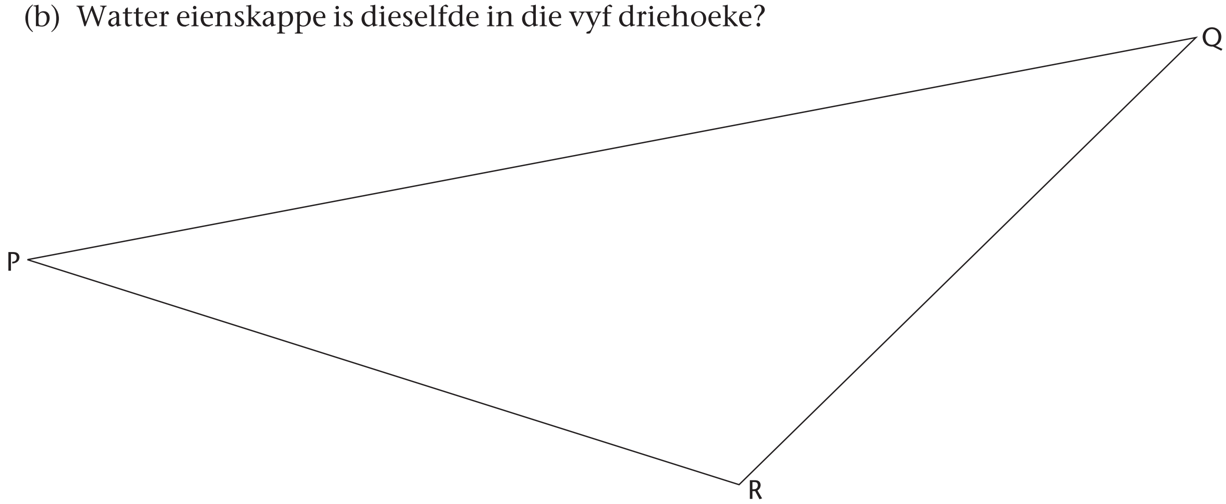


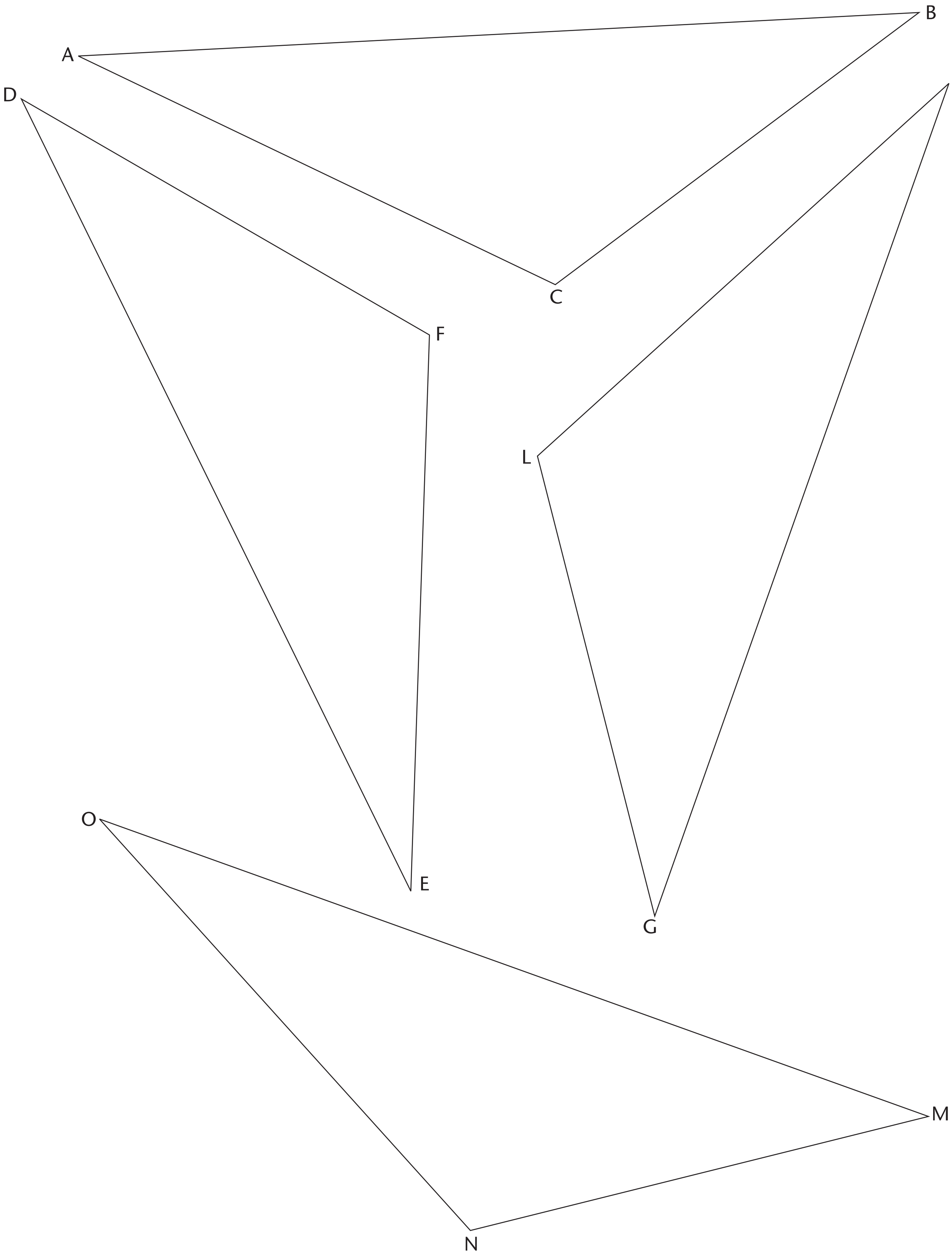


18 Is die vyf driehoeke hieronder en op die volgende bladsy dieselfde, of is daar verskille tussen hulle?

(a) Gebruik jou liniaal en gradeboog om al die sye en al die hoeke van elk van die vyf driehoeke hieronder en op die volgende bladsy te meet. Skryf die afmetings op die driehoeke neer.

(b) Watter eienskappe is dieselfde in die vyf driehoeke?




B
A
D
H
C
F
L
O
E
G
M
N

Driehoeke wat in alle opsigte dieselfde is, soos die vyf driehoeke op die vorige twee bladsye, word **kongruente driehoeke** genoem. Die woord "kongruent" beteken "dieselfde".

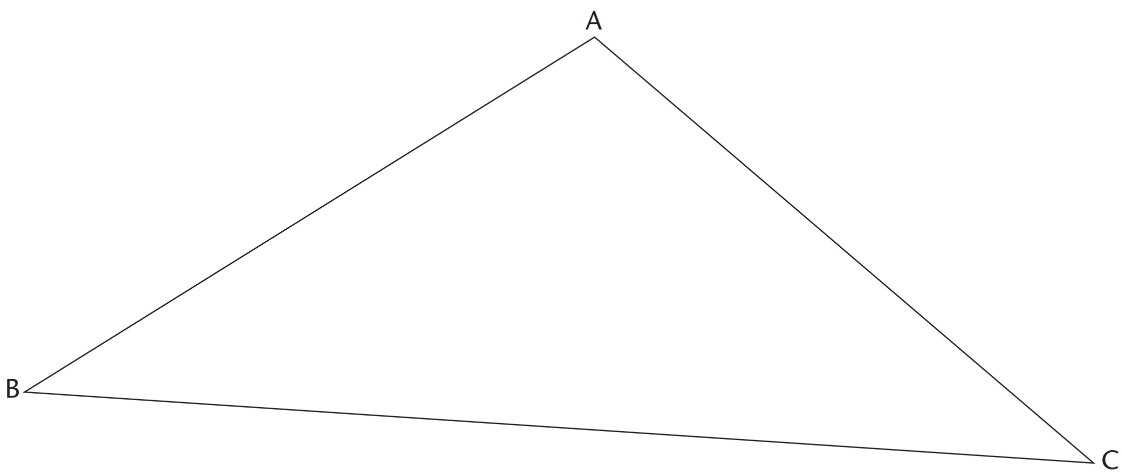
19 (a) Hoe groot is die derde hoek in die volgende twee driehoeke?

- $\triangle ABC$ met $BC = 12$ cm, $\angle B = 80°$ en $\angle C = 40°$
- $\triangle PQR$ met $PQ = 12$ cm, $\angle P = 80°$ en $\angle Q = 60°$

(b) Dink jy bogenoemde twee driehoeke is kongruent? Maak sketse en meet dit om die vraag te ondersoek.

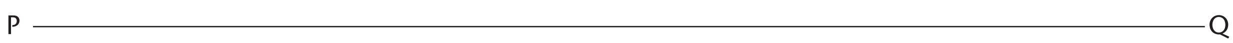
20 Teken driehoeke akkuraat:

(a) Teken 'n presiese kopie van $\triangle ABC$. Al die mates, hoekgroottes en sylengtes op jou driehoek, $\triangle A'B'C'$, moet presies dieselfde as die ooreenstemmende mates van $\triangle ABC$ wees.



(b) Beskryf enige onverwagte of interessante ervarings wat jy dalk gehad het terwyl jy $\triangle A'B'C'$ geteken het.

21 Die lynsegment PQ word gegee:



(a) Herteken lynsegment PQ. Merk 10 verskillende punte wat almal 10 cm weg is van die linkerkant, P, van lynsegment PQ. Gebruik jou passer om die taak makliker te maak. Merk van die punte bo en ander onder lynsegment PQ. Merk ook 10 verskillende punte wat almal 8 cm weg is van die regterkant, Q, van lynsegment PQ.

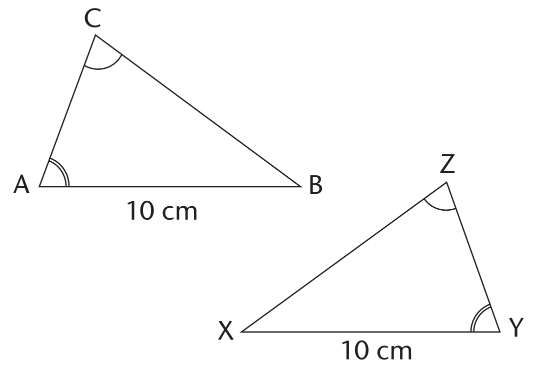
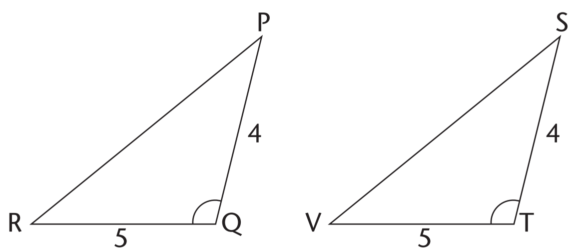
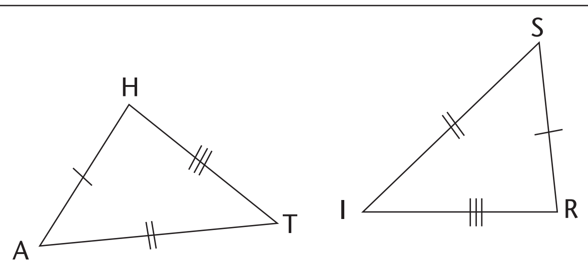
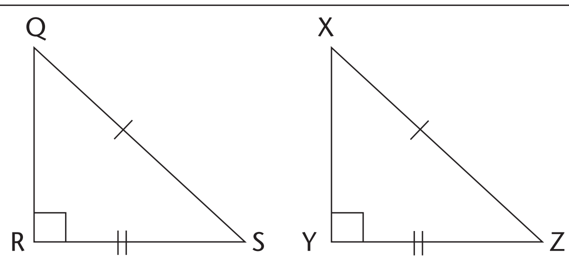
(b) Vind en merk punt X, wat presies 10 cm weg van P en 8 cm weg van Q is. Merk nog 'n punt Y wat ook 10 cm weg van P en 8 cm weg van Q is.

Wat het ons oor kongruente driehoeke geleer?

Wanneer twee driehoeke kongruent is, is hulle in alle opsigte identies:
- al drie pare ooreenkomstige hoeke is ewe groot
- al drie pare ooreenkomstige sye is ewe lank.

Die gelyke sye en hoeke moet in ooreenstemmende posisies wees – dieselfde relatiewe posisies.

Hoe om te besluit of twee driehoeke kongruent is

Term	Definisie	Diagram
hoek-hoek-sy [HHS]	Toon dat twee ooreenkomstige hoeke en een ooreenkomstige sy dieselfde is.	
sy-ingeslote hoek-sy [SHS]	Toon dat twee ooreenkomstige sye ewe lank is, en die ingeslote hoek tussen hulle ewe groot is.	
sy-sy-sy [SSS]	Bewys dat al drie ooreenkomstige sye ewe lank is.	
90°-skuinssy-sy [RSS]	Vir twee reghoekige driehoeke, toon dat die skuinssye ewe lank is en dat twee ooreenkomstige sye ewe lank is.	

Let wel: Kongruente driehoeke is outomaties gelykvormig in die verhouding 1:1.

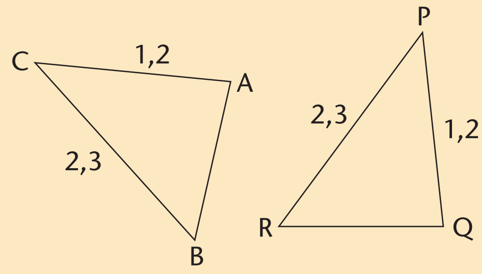
Notasie

Ons gebruik die simbool $\equiv$ as snelskrif vir 'is kongruent aan'. As ons skryf $\triangle XYZ \equiv \triangle MNO$, is dit 'n kort manier om te skryf '$\triangle XYZ$ is kongruent aan $\triangle MNO$'.

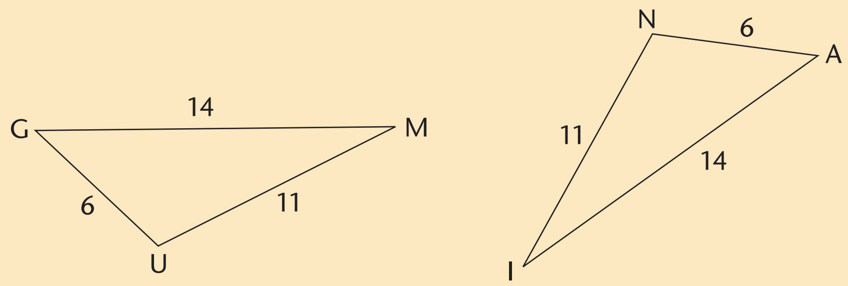
Uitgewerkte voorbeeld

Probleem: Besluit of die volgende pare driehoeke kongruent is al dan nie, *net* gebaseer op die inligting wat in die diagramme verskaf word:

Paar 1:



Paar 2:



Oplossing:

Paar 1: Driehoeke is nie kongruent nie.

Twee ooreenkomstige pare sye is ewe lank: AC = PQ en BC = PR. Ons het egter nie inligting oor die lengtes van AB en QR nie. Hulle *lyk* dalk ewe lank, maar ons werk nie met skaaldiagramme nie, so ons moet aanvaar dit is nie die geval nie.

Paar 2: Die driehoeke is kongruent:

In $\triangle GUM$ en $\triangle ANI$:

$$\left.\begin{array}{ll} 1. & GU = AN \\ 2. & UM = NI \\ 3. & GM = AI \end{array}\right\} \quad \text{[gegee]}$$

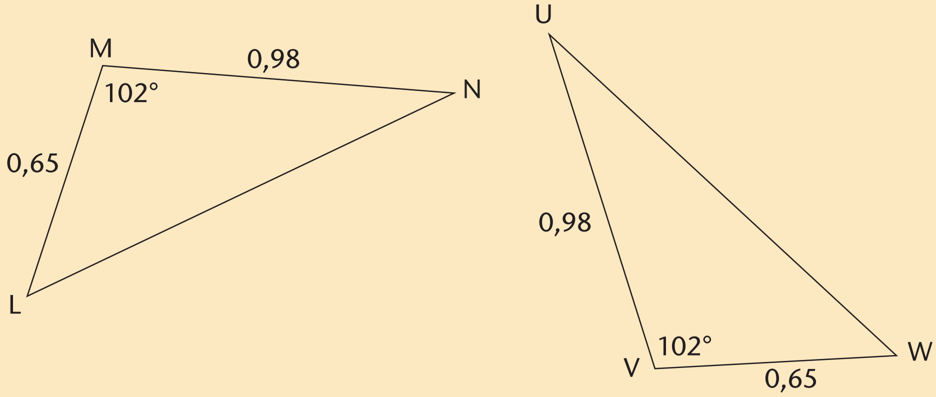
$\therefore \triangle GUM \equiv \triangle ANI$ [S; S; S]

Let daarop dat ons altyd aanvaar dat diagramme wat gegee word, sketsdiagramme is. Dit beteken dat al meet ons sye AB en QR in Paar 1 kan ons dit nie gebruik nie. As gesê word dat die diagramme volgens skaal is, kan ons metings op daardie spesifieke diagramme doen.

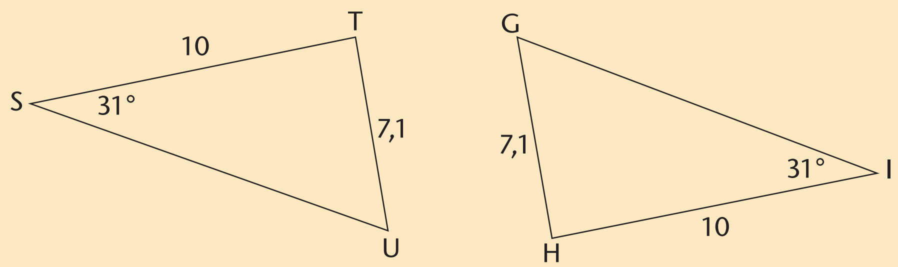
Uitgewerkte voorbeeld

Probleem: Sê of die volgende pare driehoeke kongruent is of nie:

Paar 3:



Paar 4:



Oplossing:

Paar 3: Die driehoeke is kongruent omdat $\angle M$ en $\angle V$ ingeslote hoeke is:

In $\triangle LMN$ en $\triangle WVU$:

$$\left.\begin{array}{ll} 1. & LM = WV \\ 2. & \angle M = \angle V \\ 3. & MN = VU \end{array}\right\} \quad \text{[gegee]}$$

$\therefore \triangle LMN \equiv \triangle WVU$ [SHS]

Paar 4: Die driehoeke is nie kongruent nie omdat $\angle S$ en $\angle I$ nie *ingeslote hoeke* is nie.

Hoekom moet die hoek ingeslote wees vir [SHS]?

Die enigste manier waarop twee driehoeke met twee sye en een gemene hoek kongruent kan wees, is as:

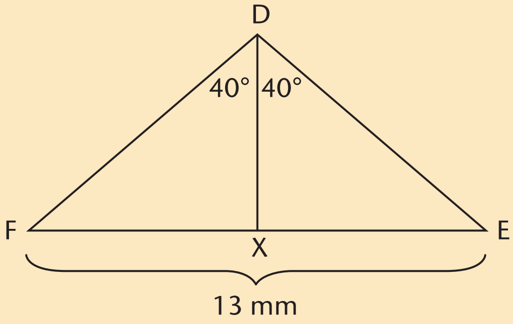
- die twee sye die bene van die hoek is, m.a.w. die gelyke hoek moet tussen die twee gelyke sye "ingesluit" word
- die hoek 'n regte hoek is [90°skuinssyS].

2154 TechMaths Afr G10 LB.indb 281 2015/11/25 4:14 PM

Uitgewerkte voorbeeld **Gebruik kongruensie**

Probleem: In $\triangle DEF$ is $EF = 13$ mm. DX is loodreg op EF en $\angle FDX = \angle EDX = 40°$.

Hoe lank is FX?



Oplossing:

In $\triangle DFX$ en $\triangle DEX$:

1. $\angle FDX = \angle EDX$ [gegee]
2. $\angle FXD = \angle EXD$ [DX⊥EF]
3. DX is gemeen aan die twee driehoeke

$\therefore \triangle DFX \equiv \triangle DEX$ [HHS]

$FX = XE$ [△e kongruent]

$FX = 13 \div 2 = 6{,}5$ mm

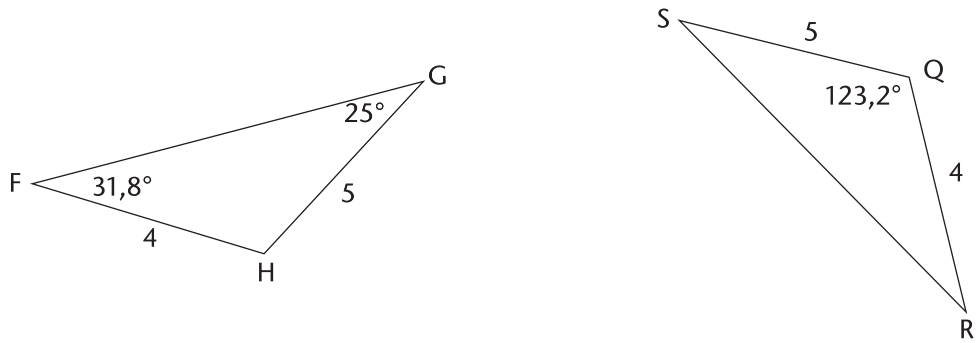
’n Paar woorde oor die gee van redes in meetkunde

In bostaande voorbeelde word elke aanspraak of belangrike stelling met ’n rede ondersteun, wat in vierkanthakies [...] getoon word. Dit is belangrik dat elke keer as jy ’n belangrike stap in ’n meetkundeprobleem doen, jy ’n rede moet gee hoekom die stap korrek is. *Jy kan die redes in jou eie woorde gee.* As jy nie aan ’n rede kan dink nie, is wat jy beweer waarskynlik nie waar nie.

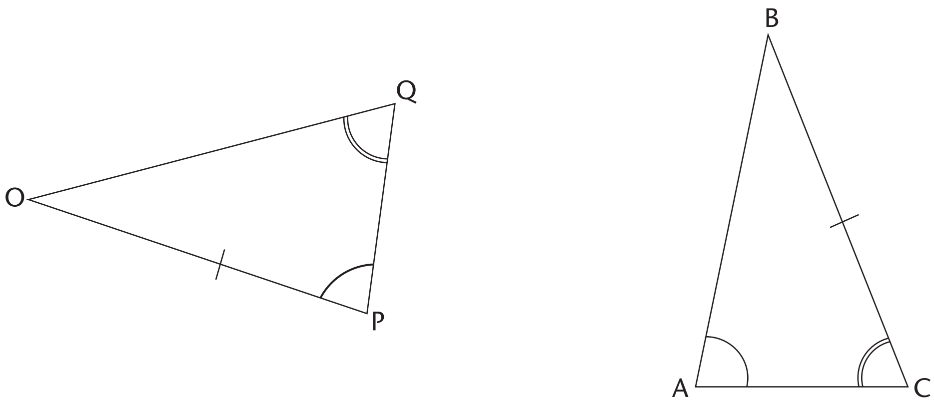
Oefeninge Oefen om kongruensie in driehoeke raak te sien en te gebruik

22 Bepaal met verduideliking of die volgende pare driehoeke kongruent is al dan nie.

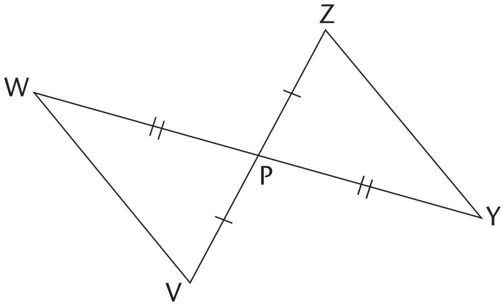
(a)



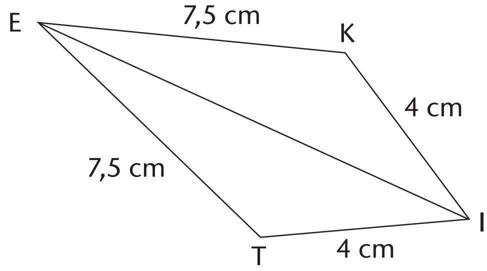
(b)



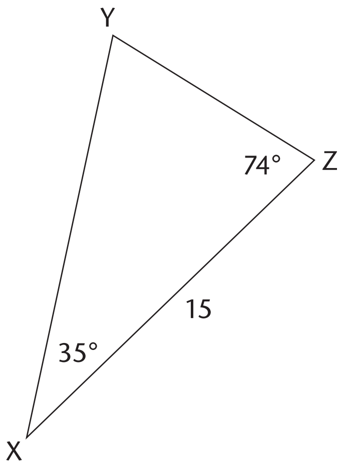
(c)

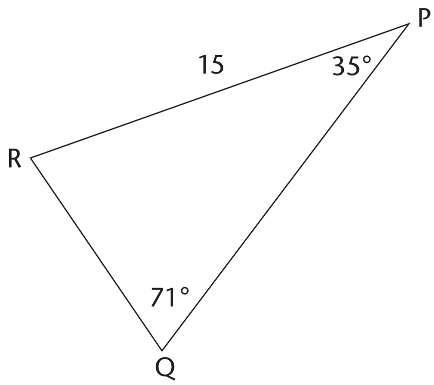


(d)

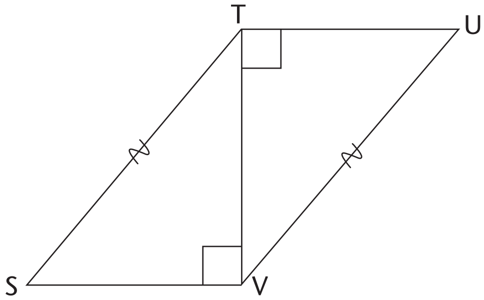


(e)

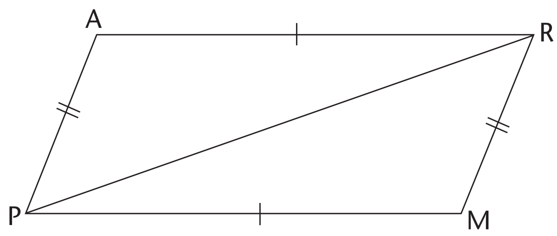




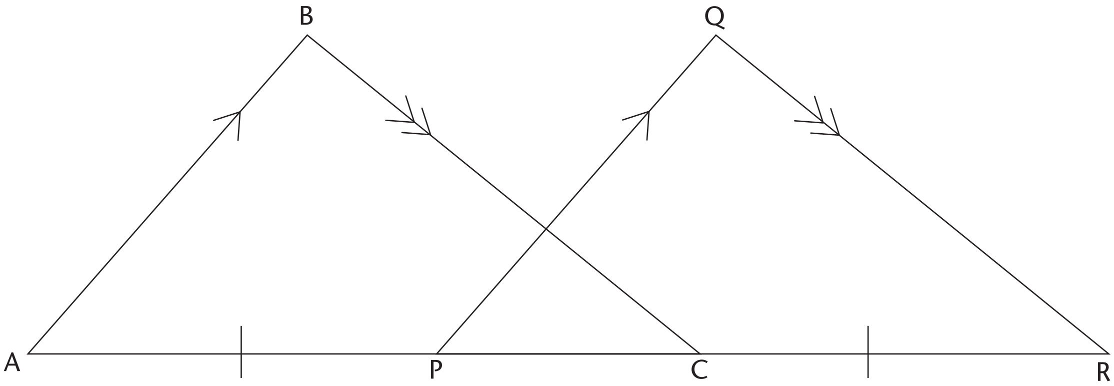
(f)



(g)



23 $\triangle ABC$ en $\triangle PQR$ oorvleuel, soos in die diagram getoon. $AB \parallel PQ$, $BC \parallel QR$ en APCR is 'n reguit lyn. Ook, AP is dieselfde lengte as CR. $\angle BAC = 37°$ en $\angle ABC = 105°$.

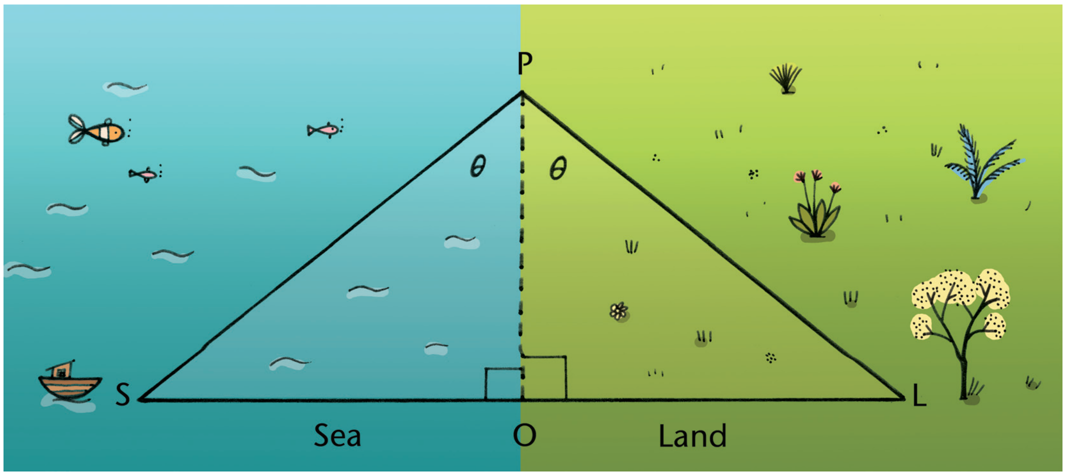


(a) Bepaal die groottes van die volgende hoeke en verduidelik kortliks hoe jy dit doen: $\angle BCA$, $\angle QPR$, $\angle PQR$ en $\angle QRP$.

(b) Verduidelik hoekom $AC = PR$.

(c) Is $\triangle ABC$ en $\triangle PQR$ kongruent? Verduidelik jou redenasie.

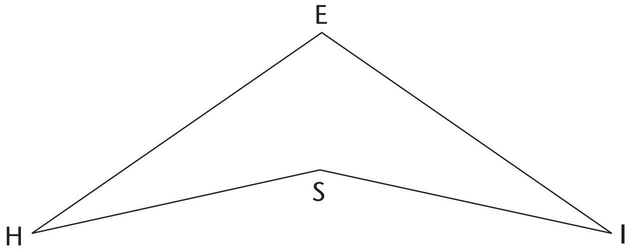
24 Volgens oorlewering het Thales van Miletus die [HHS]-voorwaarde vir kongruensie ontdek toe hy probeer het om die afstand van 'n skip vanaf die land te meet.



Die afstand wat hy moes bepaal was OS. Verduidelik hoe hy die [HHS]-voorwaarde gebruik het om die afstand OS te bepaal deur metings op land te maak. Jy kan aanvaar dat die landoppervlakte gelyk is.

25 In die diagram is $EI = EH$ en $SI = SH$:

Is $\angle H = \angle I$? Verduidelik jou redenasie. (**Wenk:** Herteken die diagram en verbind E en S.)

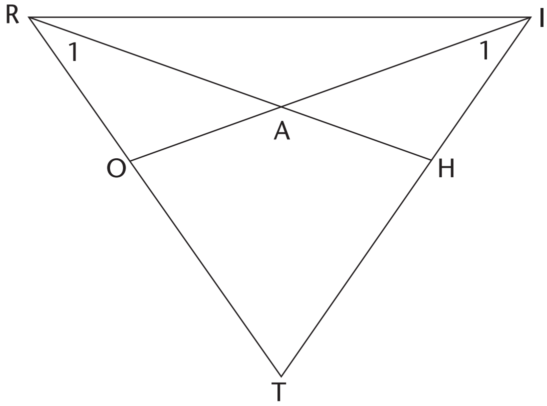


26 Die figuur toon $\triangle TRI$ met twee lynsegmente, HR en OI, met H op IT en O op RT. HR en OI sny by A. $OR = HI$ en $\angle R_1 = \angle I_1$.

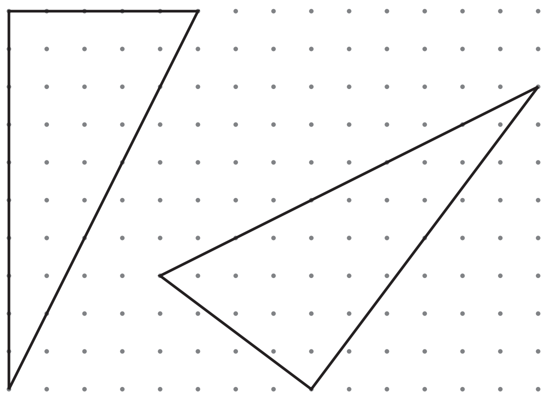
(a) Bewys dat $\triangle ORA \equiv \triangle HIA$.

(b) Is $HR = OI$? Verduidelik jou redenasie.

(c) Is $\triangle TRI$ gelykbenig? Verduidelik jou redenasie.



27 Die stippels op die rooster is horisontaal en vertikaal op gelyke afstande van mekaar. Toon dat die twee driehoeke kongruent is sonder om enige metings te doen.



8.4 Gelykvormigheid van driehoeke

Oefeninge Ondersoek gelykvormigheid

28 Teken △PQR met PQ presies 13 cm, PR presies 9 cm en RQ presies 7 cm. Meet die groottes van die drie hoeke van △PQR en skryf die mates neer.

29 Teken nog 'n driehoek met sye presies 19,5 cm, 13,5 cm en 10,5 cm, met ander hoekgroottes as bostaande △PQR.

30 Teken △XYZ met hoeke 50°, 60° en 70°. Meet die lengtes van die drie sye van △XYZ en skryf die mates neer.

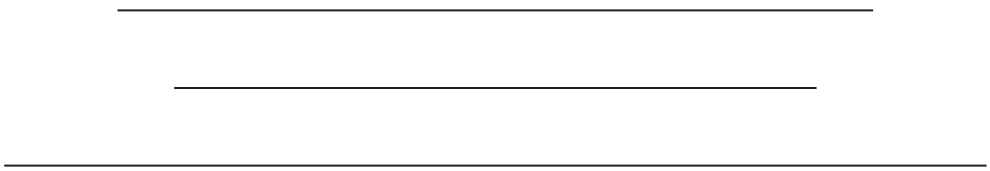
31 Probeer om nog 'n driehoek te teken met hoeke 50°, 60° en 70°, met ander sylengtes as △XYZ hierbo.

32 Wat het jy uit vraag 28 tot 31 geleer?

33 Gebruik elk van die lynsegmente hieronder as een sy van 'n driehoek. Meet hulle eers en doen dan die konstruksie. Teken in elke geval 'n hoek van 50° aan die linkerkant en 'n hoek van 70° aan die regterkant, en voltooi die driehoek opwaarts.

Wat verwag jy gaan die grootte van die derde hoek in elke driehoek wees?

Meet die derde hoeke om te bepaal of jou konstruksies korrek is.



(a) Meet al die sye in elke driehoek en skryf die mates langs die sye van elke figuur neer.

(b) Deel die lengte van die sy teenoor die hoek van 50° in elke driehoek deur die lengte van die onderste sy. Verskil die antwoorde vir die verskillende driehoeke?

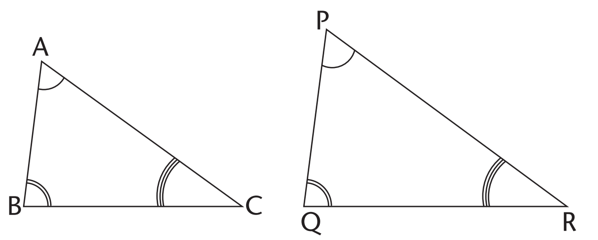
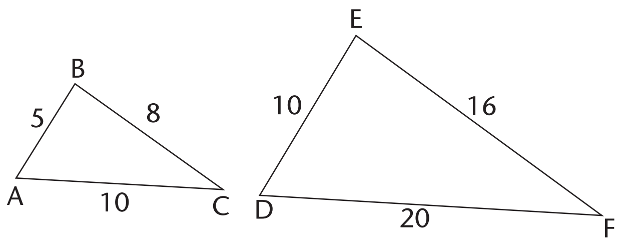
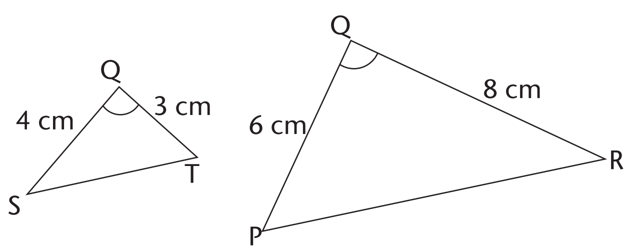
(c) Doen dieselfde vir die sye teenoor die hoeke van 70°.

Wat het ons oor gelykvormige driehoeke geleer?

- ooreenkomstige hoeke ewe groot
- verhoudings van al drie pare ooreenkomstige sye dieselfde (wat gebeur as net twee pare ooreenkomstige sye in dieselfde verhouding is?)

Let wel: Ons kan die woorde verhouding en eweredigheid op min of meer dieselfde manier gebruik. Ons sê twee sye is in 'n bepaalde verhouding, maar twee pare sye wat dieselfde verhouding het, is eweredig.

Hoe om te besluit of twee driehoeke gelykvormig is?

Term	Definisie	Voorbeeld
hoek-hoek-hoek [HHH]	Toon dat die driehoeke twee hoeke het wat ewe groot is; as dit waar is, is die derde hoek outomaties ewe groot.	
verhoudings van die drie pare ooreenkomstige sye is eweredig aan mekaar	Toon dat al drie pare ooreenkomstige sye eweredig is.	
verhoudings van die ooreenkomstige bene is gelyk aan mekaar	Toon dat een hoek dieselfde is en dat die twee pare bene van die gelyke hoek eweredig is.	

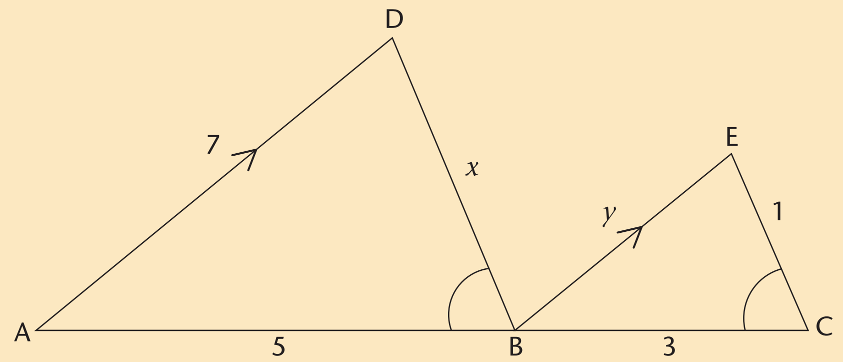
Driehoeke met dieselfde hoekgroottes word **gelykvormige driehoeke** genoem.

Notasie

Ons gebruik die simbool '|||' as snelskrif vir 'is gelykvormig aan'. Byvoorbeeld, △XYZ ||| △MNO is 'n kort manier om te skryf '△XYZ is gelykvormig aan △MNO'.

Uitgewerkte voorbeeld

Probleem: In △ADB en △BEC, AD || BE. ∠ABD = ∠BCE. AD = 7, AB = 5, BC = 3, EC = 1, BD = x en BE = y. Bepaal die onbekende lengtes x en y in die volgende diagram:



Oplossing:

In △ADB en △BEC:

	∠DAB = ∠EBC	[AD || BE, dus is ooreenkomstige hoeke ewe groot]
	∠ABD = ∠BCE	[gegee]
So:	△ADB ||| △BEC	[binnehoeke dieselfde]

Gebruik die verhouding van ooreenkomstige sye om x en y te bereken:

$$\frac{x}{1} = \frac{5}{3}$$

$$x = \frac{5}{3} \text{ eenhede}$$

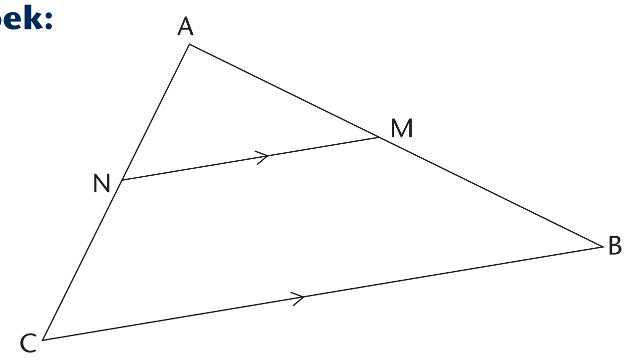
en

$$\frac{y}{7} = \frac{3}{5}$$

$$x = \frac{21}{5} \text{ eenhede}$$

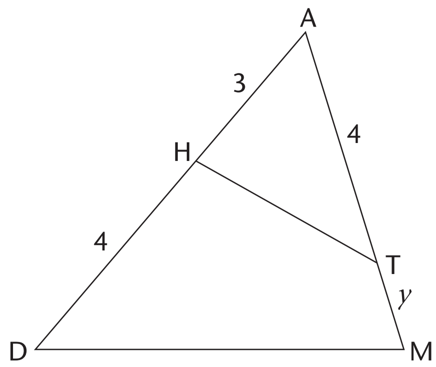
Lyne parallel aan een sy van 'n driehoek:

- As △AMN en △ABC gelykvormig is, dan is MN parallel aan BC.
- As MN parallel aan BC is, dan is △AMN gelykvormig aan △ABC.
- In besonder, as AN = NC of AM = MB, dan is CB = 2 NM, of as CB = 2 NM, dan is AN = NC en AM = MB.



Oefeninge

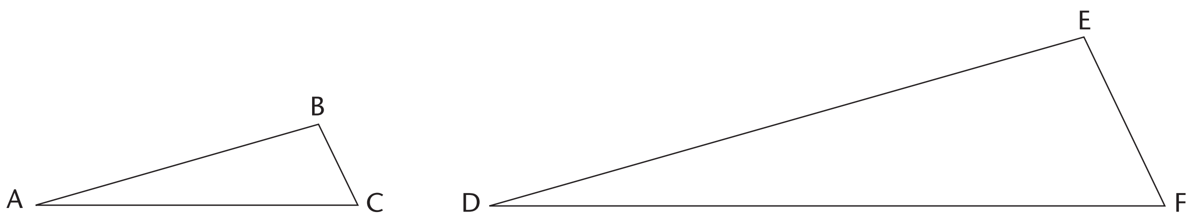
34 △MAD het punt H op AD verbind aan punt T op AM. ∠THA = ∠DMA = 70°.



(a) Voltooi die stelling: △MAD ||| △ _______.

(b) Bereken die waarde van y.

35 Elk van die sye van △ABC is een-derde van die lengte van die ooreenkomstige sy van △DEF.

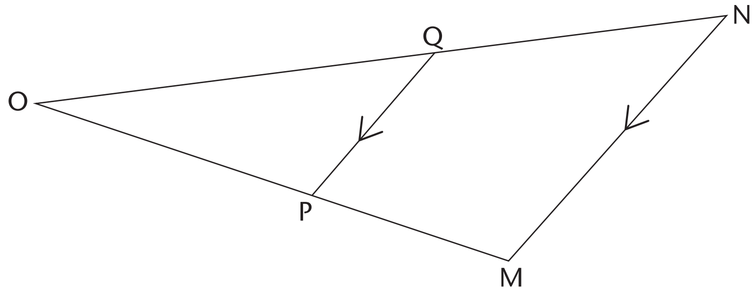


(a) Watter verwantskap is daar tussen die twee driehoeke?

(b) Gee die verhoudings van die:

- omtrek van △ABC tot die omtrek van △DEF
- oppervlakte van △ABC tot die oppervlakte van △DEF.

36 In die diagram is lyn MN parallel aan lyn PQ (MN || PQ).

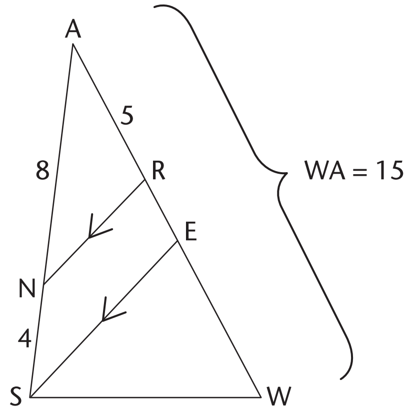


(a) Verduidelik hoekom △PQO en △MNO gelykvormig is.

(b) Daar word ook gegee dat MN = 9 eenhede en PQ = 6 eenhede.

- As ON = 12 eenhede, hoe lank is OQ? (Toon jou bewerkings.)
- As OP = 19 eenhede, hoe lank is PM? (Toon jou bewerkings.)

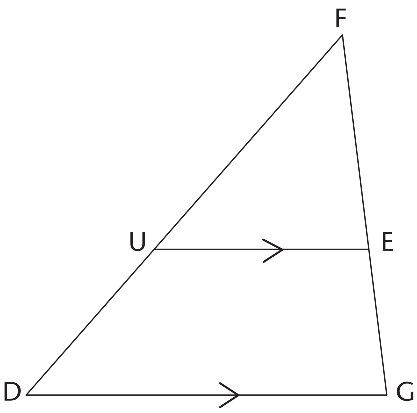
37 In die diagram AW = 15, AR = 5, AN = 8, NS = 4 and NR || SE.



Bepaal, met redes, die volgende verhoudings in breukvorm:

(a) $\frac{AN}{AS}$ (b) $\frac{AR}{RW}$

(c) $\frac{AR}{RE}$ (d) $\frac{AE}{EW}$

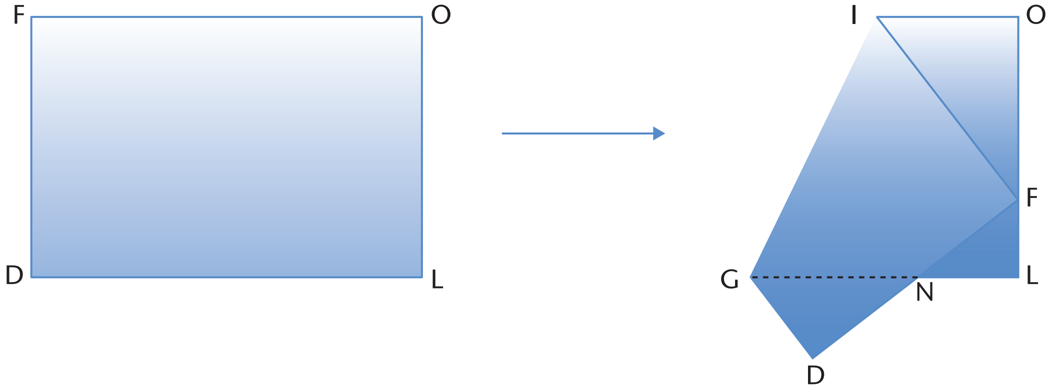


38 In die figuur is GF = UF = 3DU = 7 eenhede en DG = 2UF.

Bereken, met verduideliking, die waarde van:

(a) GE (b) UE

39 Jy sal A4-papier vir hierdie oefening nodig hê. Vou die papier sodat een van die hoeke presies op die teenoorstaande kort sy van die papier is:



In die proses word drie driehoeke by die rande van die bladsy gevorm.

(a) Wat kan jy sê oor die meetkundige verhouding tussen die drie driehoeke? Skryf hierdie verhouding in die korrekte wiskundige notasie.

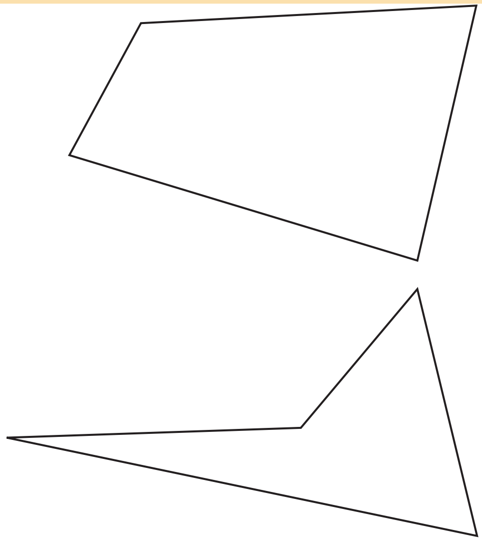
(b) Verduidelik hoekom die drie driehoeke hierdie verhouding het.

(c) Voltooi:

- $\frac{GD}{GN} = \frac{FL}{?}$
- $\frac{NL}{?} = \frac{LF}{OI}$
- $\frac{?}{IF} = \frac{ND}{OF}$

(d) Hang jou resultate in (a) - (c) af van waar jy punt F vou op die rand van OL?

8.5 Ondersoek vierhoeke



'n **Vierhoek** is 'n vlakfiguur met vier sye wat reguit lyne is. Vierhoeke kan óf **konveks** óf **konkaaf** wees.

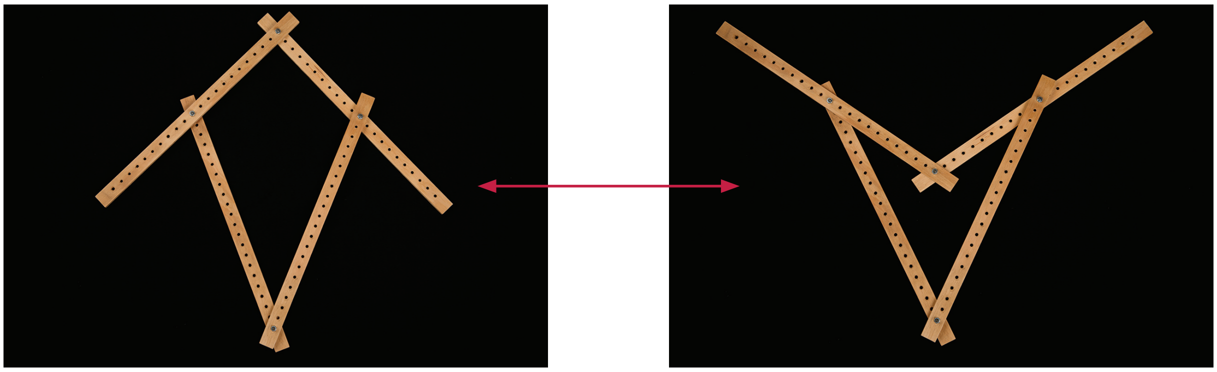
Konvekse vierhoeke, bv. die boonste figuur, se binnehoeke is almal in die interval (0°; 180°).

Konkawe vierhoeke, bv. die onderste figuur, het een inspringende hoek terwyl die ander drie hoeke in die interval (0°; 180°) is.

Ons sal meestal met konvekse vierhoeke werk, hoewel ons af en toe konkawe vierhoeke sal teëkom.

Die dinamiese vierhoek: 'n nuttige instrument

Ons sal 'n 'dinamiese vierhoek' gemaak van plankies met gaatjies wat op gelyke afstande van mekaar is, gebruik. Die plankies word met klein skroefies geheg. Dit laat ons toe om die vorm van die vierhoek te verander sonder om die lengte van die sye te verander. As jy handig in die werkswinkel is, kan jy jou eie stel maak.



Ons kan die aantal spasies tussen die gaatjies tel om die lengtes van die sye van die vierhoek te vergelyk. Byvoorbeeld, die langer en korter lengtes hierbo is 21 eenhede en 11 eenhede onderskeidelik.

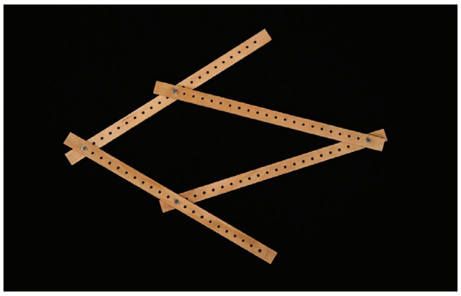
'n Belangrike konsep

'n **Simmetrielyn** is 'n lyn wat op so 'n manier deur 'n figuur loop dat die deel van die figuur aan die een kant van die lyn 'n spieëlbeeld is van die deel aan die ander kant van die lyn. Dit beteken dat die dele van die figuur aan weerskante van die simmetrielyn kongruent aan mekaar is.

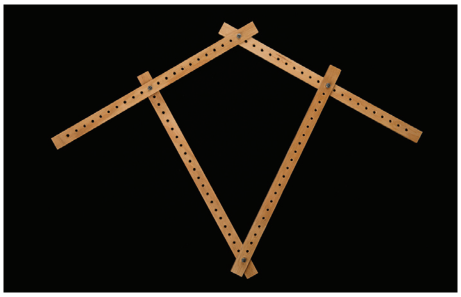
Oefeninge Ondersoek die eienskappe van vierhoeke

40 Dinamiese vlieërs

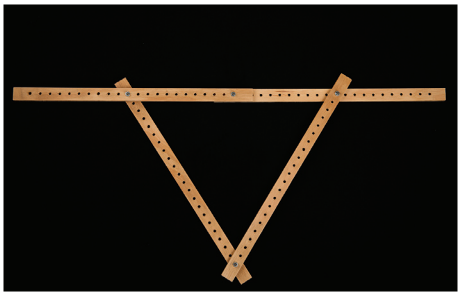
I



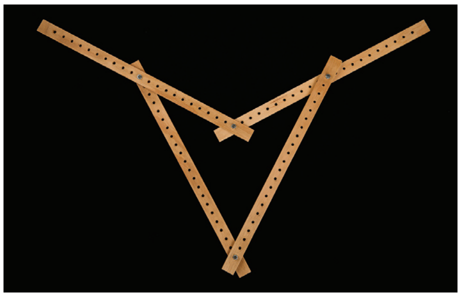
II



III



IV



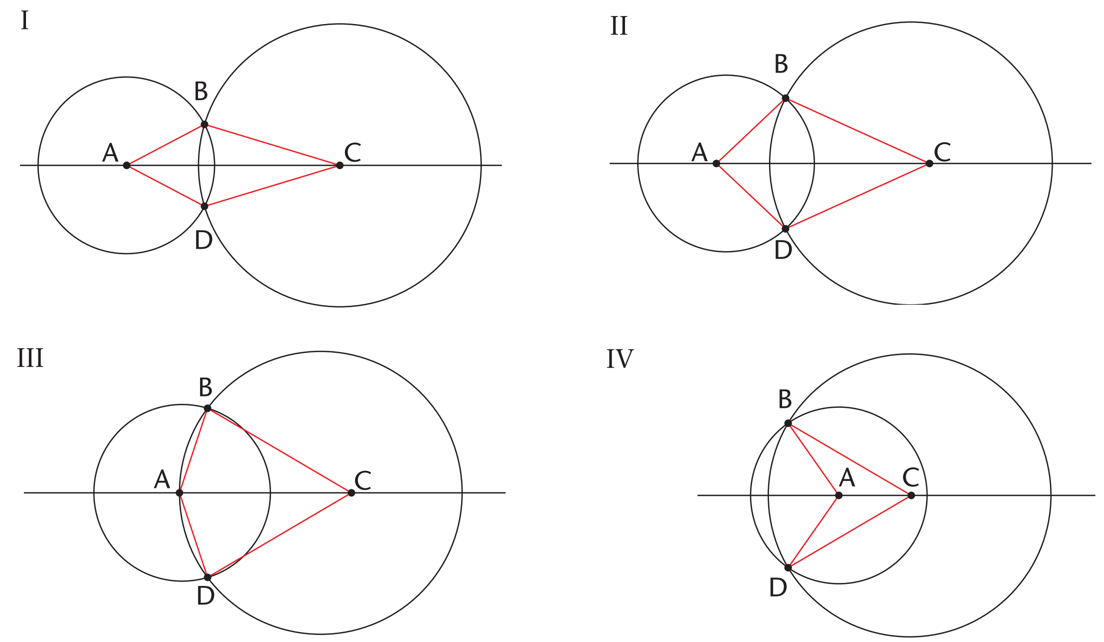
Die gaatjies in die dinamiese model is 1,5 cm uitmekaar.

(a) Bepaal die lengte van die sye van die verskillende vlieërs.

(b) Driehoeke met drie vaste sye is rigied. Met ander woorde, hulle kan nie van vorm verander nie, wat hulle nuttig in siviele tegnologie maak.

Is vierhoeke rigiede vorms?

Hier is ’n akkurate konstruksie van vier vierhoeke.



(c) In elk van die vierhoeke, hoe is △ABC meetkundig verwant aan △ADC? Verduidelik jou redenasie.

(d) Op grond van jou bevindings in (c), wat kan jy sê oor ∠B en ∠D in elk van die vlieërs?

(e) Wat kan jy sê van die lyn wat deur punte A en C gaan? Voltooi die volgende sin:

Een hoeklyn van ’n vlieër is altyd ’n ________________.

(f) Konstrueer een vlieër deur bostaande konstruksie te gebruik. Merk die vier hoekpunte van die vlieër soos hierbo gedoen. Trek ’n lyn wat punt B en D verbind. Jy het nou die twee hoeklyne van die vlieër: AC en BD. Merk hulle sny punt E. Meet die volgende:

- die hoek tussen BD en AC
- die lengtes BE en ED.

Tot watter gevolgtrekking kom jy? Voltooi die volgende sinne:

Die hoeklyne van ’n vlieër is __________ tot mekaar.

Die hoeklyn wat langs die simmetrie-as van ’n vlieër loop, __________ die ander hoeklyn van die vlieër.

(g) Lys al die eienskappe van ’n vlieër wat jy nou ken.

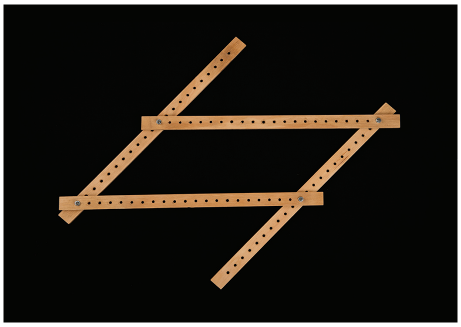
(h) Skryf definisies, m.a.w. akkurate beskrywings, vir ’n vlieër neer gebaseer op elk van die volgende:

- die lengte van die sye
- die binnehoeke
- simmetrie
- hoe die hoeklyne optree.

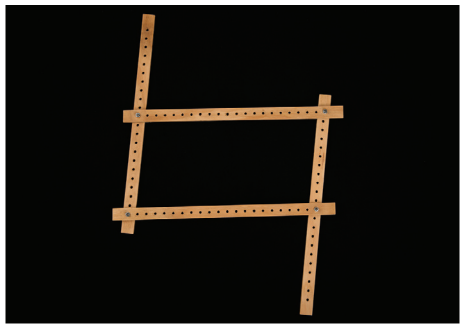
Sodra jy dit klaar gedoen het, vergelyk jou definisies met dié van jou klasmaats. Bereik ooreenstemming oor elke definisie.

41 Dinamiese parallellogramme

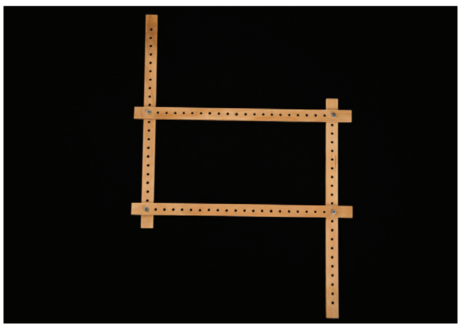
I



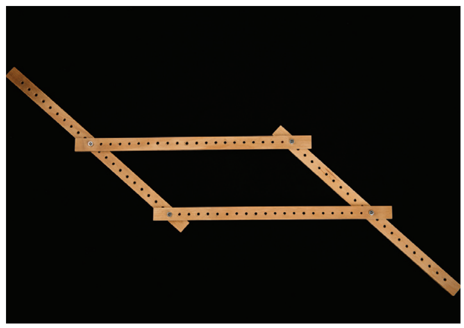
II



III



IV

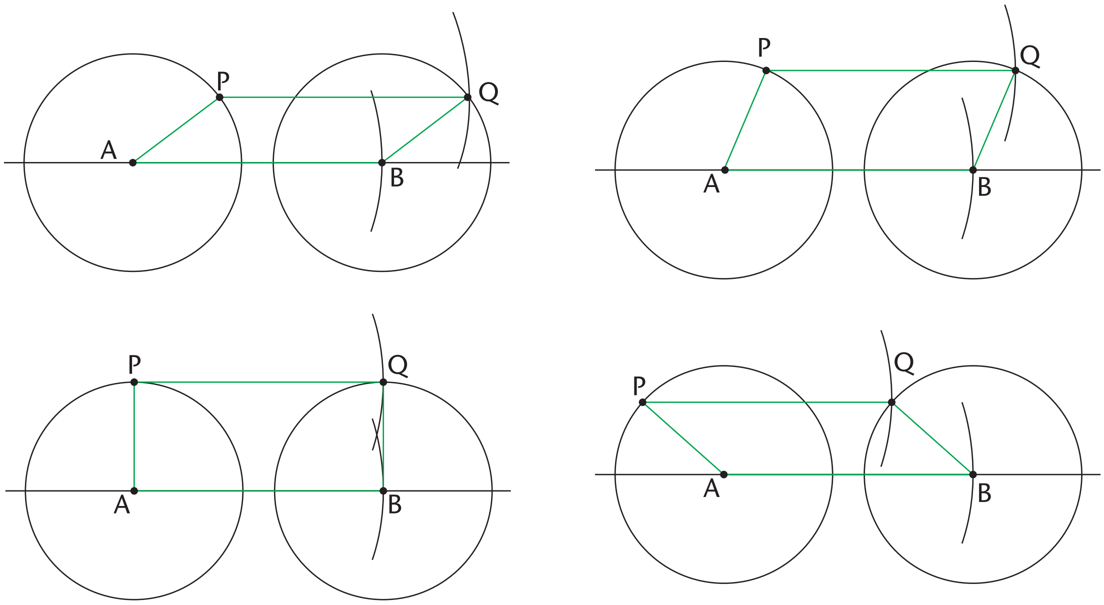


(a) Bepaal die lengtes van die sye van die vier vierhoeke.

(b) Watter eienskappe het die *lengtes* van die sye van ’n parallellogram?

(c) Gebaseer op die vier foto’s en jou antwoord in (b), verduidelik hoekom ’n reghoek ’n spesiale parallellogram is.

Hier is akkurate konstruksies van die vier parallellogramme:



Die stappe in die konstruksie is:

- Kies punte A en B op ’n lyn.
- Konstrueer twee identiese sirkels met middelpunte A en B.
- Kies ’n punt P op die omtrek van die sirkel met middelpunt A.
- Stel jou passer op die afstand AB – punt by A en potlood by B; trek ’n boog by B.
- Konstrueer ’n boog met middelpunt P wat die ander sirkel sny.

(d) Konstrueer een parallellogram. Merk die vier hoekpunte soos hierbo gedoen. Konstrueer die hoeklyn AQ. Wat kan jy sê oor die meetkundige verhouding tussen $\triangle$APQ en $\triangle$ABQ? Verduidelik jou redenasie. Wat sê dit vir jou oor die pare teenoorstaande binnehoeke van ’n parallellogram?

(e) Gebruik jou diagram uit (d) en konstrueer hoeklyn BP. Merk die snypunt van die twee hoeklyne E. Meet AE, PE, QE en BE. Tot watter gevolgtrekking kom jy oor die hoeklyne van ’n parallellogram? Voltooi die volgende sin:

Die hoeklyne van ’n parallellogram is __________ mekaar.

(f) Gebruik jou resultaat in (d) om te verduidelik hoekom albei pare teenoorstaande sye van ’n parallellogram parallel is.

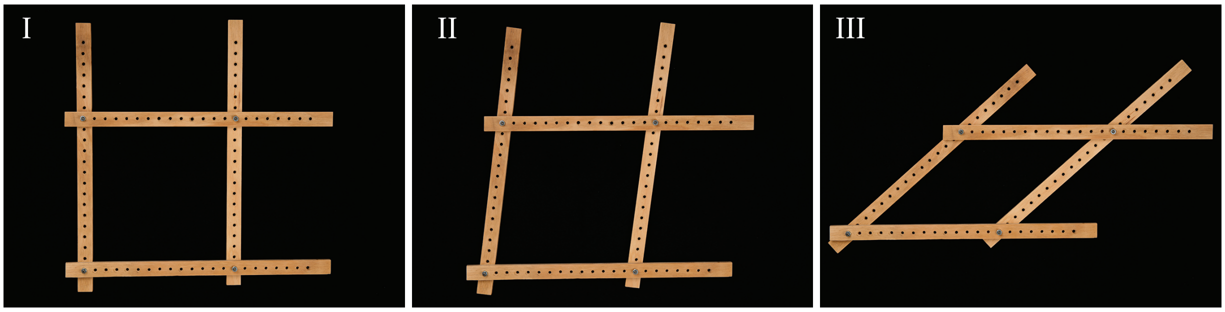
(g) Lys al die eienskappe van parallellogramme wat jy nou ken.

(h) Skryf definisies vir ’n parallellogram neer wat op elk van die volgende gebaseer is:

- die lengte van die sye
- die binnehoeke
- hoe die hoeklyne optree.

(i) Kan ’n parallellogram ’n simmetrie-as hê? Het geen parallellogram ’n simmetrie-as nie?

43 Dinamiese rombusse



(a) Gebaseer op die foto’s hierbo en in oefening 40 en 41, besluit of jy met die volgende saamstem al dan nie. Verduidelik in elke geval jou redenasie:

I. ’n Vierkant is ’n spesiale reghoek.

II. ’n Parallellogram is ’n spesiale ruit.

III. ’n Vierkant is ’n spesiale parallellogram.

IV. ’n Vlieër is ’n spesiale ruit?

V. ’n Vierkant is ’n spesiale vlieër.

(b) Gebruik die konstruksiemetode in Oefening 41 om drie ruite te konstrueer wat soos dié op die foto’s lyk. Om dit te doen, laat AB = radiusse van sirkels = 10 cm wees. Merk die hoekpunte presies soos vir die parallellogramme gedoen is. Gebruik die diagramme in (c) en (d) wat volg.

(c) Ondersoek of ruite die eienskappe van ’n parallellogram het.

(d) Ondersoek die eienskappe wat ruite het wat parallellogramme gewoonlik nie het nie.

(e) Lys al die eienskappe van ruite wat jy nou ken.

(f) Skryf definisies vir ’n ruit neer wat op elk van die volgende gebaseer is:

I. die lengte van die sye

II. die binnehoeke

III. hoe die hoeklyne optree

IV. die simmetrie-asse (daar is twee).

(g) Kan ’n parallellogram ’n simmetrie-as hê? Het geen parallellogram ’n simmetrie-as nie?

43 Reghoeke en vierkante

(a) Skryf al die eienskappe neer wat reghoeke en vierkante in gemeen het.

(b) Het reghoeke enige eienskappe wat vierkante nie het nie?

(c) Het vierkante enige eienskappe wat reghoeke nie het nie?

(d) Is ’n reghoek ’n tipe ruit?

(e) Is ’n vierkant ’n tipe reghoek?

(f) Skryf soveel definisies vir ’n vierkant neer as wat jy kan.

(g) Skryf soveel definisies vir ’n reghoek neer as wat jy kan.

44 Ondersoek die eienskappe van trapesiums.

(a) Konstrueer vier verskillende trapesiums met gebruik van ’n liniaal en passer. Maak seker dat hulle baie van mekaar verskil.

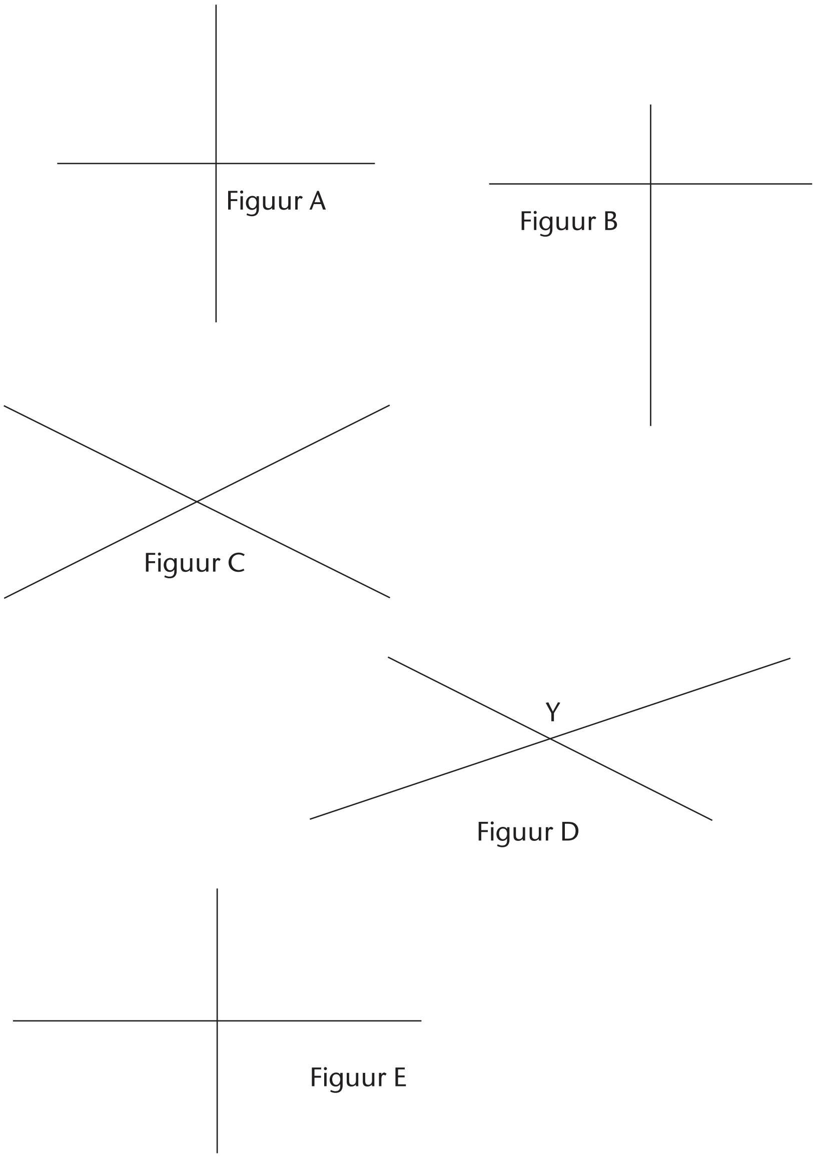
(b) Lys die eienskappe van trapesiums.

(c) Skryf soveel definisies as moontlik vir ’n trapesium neer.

(d) Gebaseer op wat jy nou weet oor die eienskappe van al die soorte vierhoeke wat ons ondersoek het, is:

- trapesiums parallellogramme?
- ruite trapesiums?
- vierkante trapesiums?
- parallellogramme trapesiums?
- reghoeke trapesiums?

45 ’n Samevatting van al die ondersoeke:



In elk van die figure hieronder het twee lynsegmente mekaar gesny:

> **Let wel:** Die woord 'halveer' beteken om in twee gelyke dele te deel.

(a) In watter van die figure is die twee lynsegmente ewe lank?

(b) In watter van die figure halveer die een lynsegment die ander?

(c) In watter van die figure halveer die twee lynsegmente mekaar?

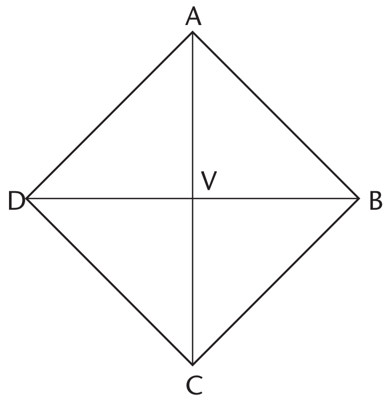
(d) In watter van die figure is die twee lynsegmente loodreg op mekaar?

(e) Voltooi die tabel met eienskappe van die figure (sê net 'ja' of 'nee'):

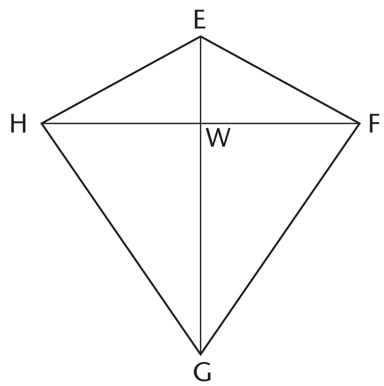
	Fig A	Fig B	Fig C	Fig D	Fig E
Twee lynsegmente is ewe lank					
Minstens een lynsegment halveer die ander een					
Twee lynsegmente halveer mekaar					
Twee lynsegmente is loodreg op mekaar					

Die punte van die lynsegmente is nou verbind om vierhoeke te vorm:

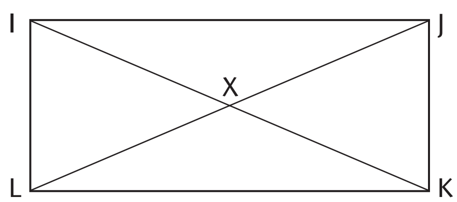
Figuur A



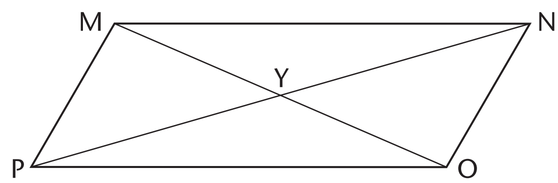
Figuur B



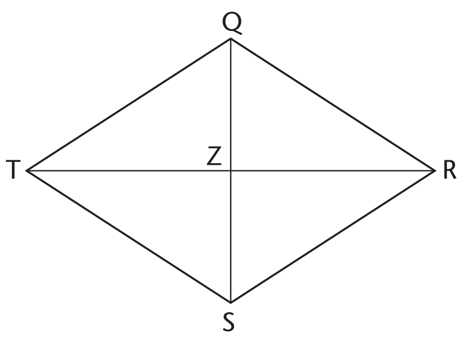
Figuur C



Figuur D



Figuur E



Die lynsegmente het nou hoeklyne van die vierhoeke geraak.

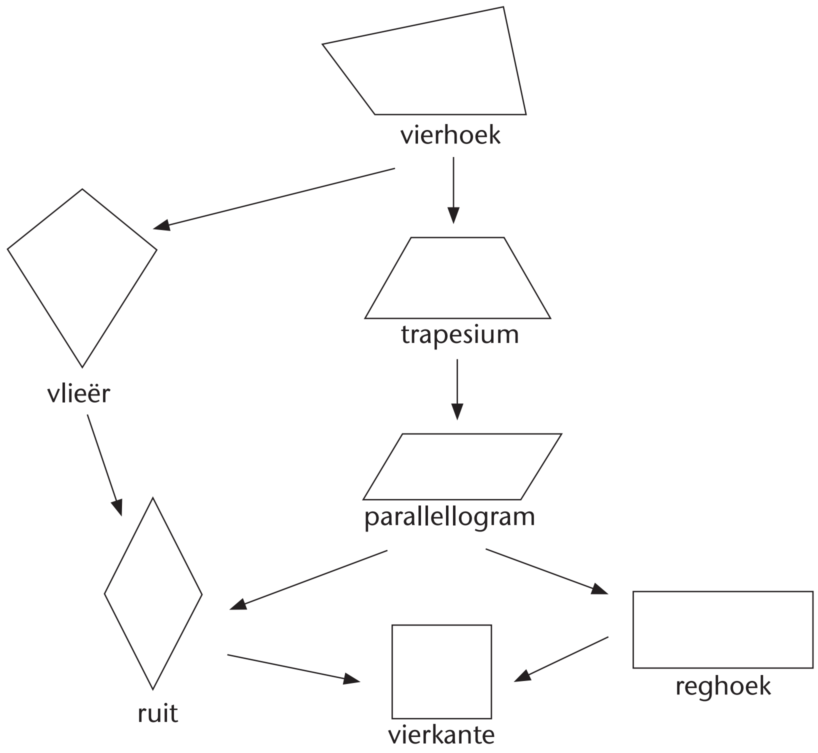
(f) Identifiseer in elke figuur die driehoeke wat kongruent is.

(g) Gebruik jou resultate uit (e) en die kongruensies in (f) om die volgende tabel met die eienskappe van die vierhoeke te voltooi:

	Fig A	Fig B	Fig C	Fig D	Fig E
Twee hoeklyne is ewe lank					
Minstens een hoeklyn halveer die ander een					
Twee hoeklyne halveer mekaar					
Twee hoeklyne is loodreg op mekaar					
Teenoorstaande sye is parallel					
Twee aangrensende sye is ewe lank en nog twee aangrensende sye is ook ewe lank					
Twee teenoorstaande hoeke is ewe groot					
Twee teenoorstaande hoeke is ewe groot en nog twee teenoorstaande hoeke is ook ewe groot					

Die hiërargie van vierhoeke

Ons kan nou die verskillende soorte vierhoeke in ’n hiërargie (met ander woorde ’n tipe struktuur) rangskik, soos die hiërargie van reële getalle in Hoofstuk 2. Enige vierhoek laer af in die hiërargie het al die eienskappe van enige vierhoek hoër op in die hiërargie.



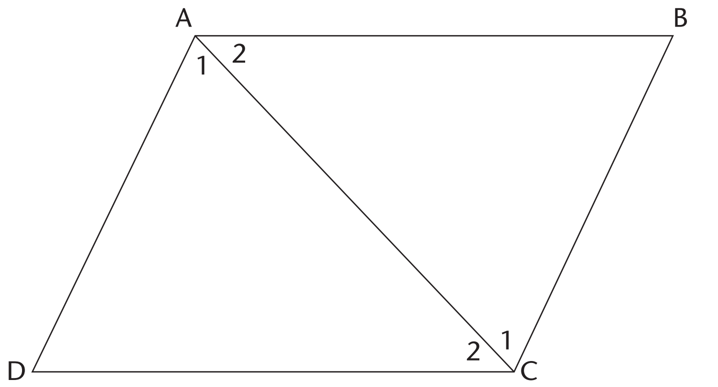
Hoe om vierhoeke te bemeester

As jy:

- verstaan dat elke soort vierhoek op baie maniere gedefinieer kan word (met gebruik van verwantskappe tussen sye, tussen hoeke en tussen hoeklyne)
- elk van die definisies baie goed verstaan
- verstaan hoe die verskillende soorte vierhoeke in die hiërargie verwant is, sal jy vind dat jy vierhoeke baie makliker kan hanteer as wanneer jy net al die eienskappe van elke soort vierhoek memoriseer.

Oefeninge

46 Hier is parallellogram ABCD met hoeklyn AC:



(a) Vul die ontbrekende woorde in: Die teenoorstaande sye van 'n parallellogram is ___________ en ___________.

(b) Verduidelik kortliks hoekom $\angle A_1 = \angle C_1$ en hoekom $\angle A_2 = \angle C_2$.

47 Beoordeel of die volgende stellings Waar of Onwaar is- en gee redes vir die onwaar stellings:

(a) Alle vierkante is gelykvormig.

(b) As twee sye en 'n hoek van twee driehoeke gelyk is, is hulle kongruent.

(c) As al vyf sye van twee vyfhoeke ewe lank is, is hulle kongruent.

(d) Alle vierkante is ruite.

(e) 'n Vierkant het die eienskappe van al die konvekse vierhoeke.

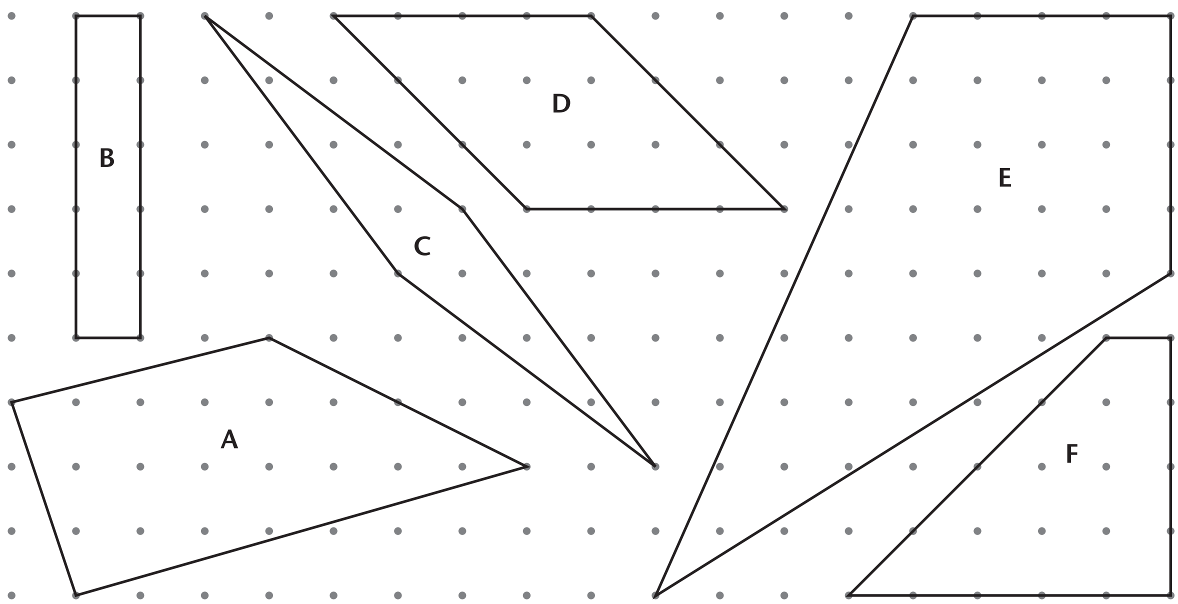
(f) Twee gelykbenige driehoeke met 'n gemene basishoek is gelykvormig.

(g) Twee driehoeke met twee sye en ’n hoek in gemeen is kongruent.

(h) As ’n vierhoek se hoeklyne teen 90° sny, is dit ’n vlieër.

(i) Om te sê dat ’n gegewe vierhoek ’n parallellogram is, is genoeg om te toon dat twee sye gelyk en twee teenoorstaande sye parallel is.

49 Beskou die volgende versameling vierhoeke op gestippelde papier (die stippels is eweredig gespasieer):



Gee die byskrifte (A–F) van die vierhoeke (indien enige) wat aan die volgende kriteria voldoen:

(a) parallellogramme sonder ’n simmetrie-as

(b) met presies een paar teenoorstaande binnehoeke gelyk

(c) nie ’n vlieër of ’n trapesium nie

(d) met vier simmetrie-asse

(e) met dieselfde oppervlakte as F

(f) parallellogramme maar nie ruite nie

(g) reghoeke

(h) trapesiums maar nie reghoeke nie

(i) beide trapesiums en vlieërs

(j) nie ruite of reghoeke nie.

2154 TechMaths Afr G10 LB.indb 301 2015/11/25 4:14 PM

49 Beantwoord hierdie vraag op velle gestippelde papier. (Sien ADDENDUM van hierdie hoofstuk vir meer oor gestipplede papier) Teken die figuur wat beskryf word op die gestippelde papier. Die voorbeeld hieronder wys wat verwag word. In sommige gevalle kan jy meer as een moontlike figuur teken. Jy hoef net een tekening te gee, maar maak gerus meer as een. Die horisontale of vertikale afstand tussen twee stippels is 1 eenheid.

(a) ’n Vierhoek met hoeklyne onderskeidelik 4 en 8 eenhede lank. Die langer hoeklyn halveer die korter een loodreg.

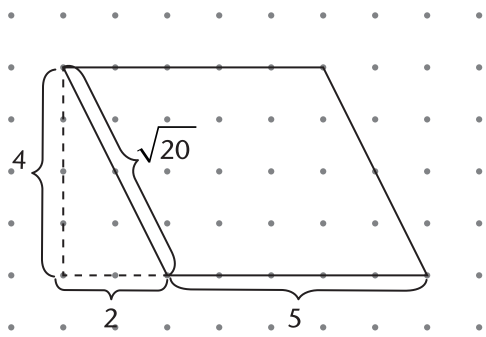
(b) ’n Trapesium wat nie ’n parallellogram is nie, en waarvan een paar teenoorstaande hoeke stomp en ’n derde 45° is.

(c) ’n Gelykbenige driehoek met ’n basis 6 eenhede lank en die hoek teenoor die basis 90°.

(d) ’n Parallellogram met een paar sye 5 eenhede lank en die ander paar $\sqrt{10}$ eenhede lank.

(e) Teken ’n ruit met sye 13 eenhede.

’n Voorbeeld van wat om te doen: Teken ’n parallellogram met sye 5 eenhede en $\sqrt{20}$ eenhede onderskeidelik.



Nota: Indien jy nie gestippelde papier het nie kan jy ook vierkantige blokkies papier gebruik

50 Jy spoor die volgende definisie van ’n vlieër op:

‘ ’n Vlieër is enige vierhoek waarvan die hoeklyne loodreg op mekaar is en mekaar halveer.’

Lewer kommentaar op hierdie ‘definisie’ en sê of jy saamstem al dan nie. Verduidelik jou redenasie. Sluit ’n diagram in.

51 Sê of die volgende stellings Waar of Onwaar is. As jy sê die stelling is Onwaar, moet jy ’n teenvoorbeeld gee en jy moet die stelling korrigeer.

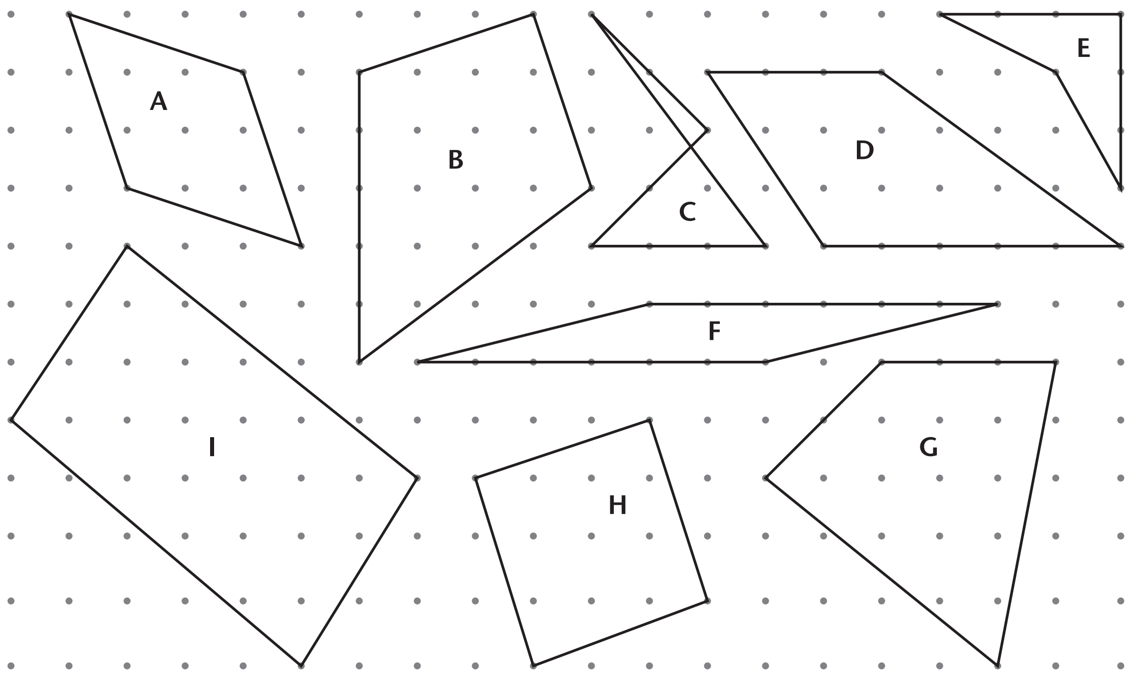
(a) Alle kongruente agthoeke (oktagone) is gelykvormig.

(a) Alle vierhoeke waarvan die hoeklyne ewe lank is, is reghoeke.

(b) ’n Ruit is ’n trapesium.

(c) Vierkante is die enigste vierhoeke wat beide vlieërs en trapesiums is.

52 Beskou die volgende versameling vierhoeke (die stippels is eweredige gespasieer):



Gee die byskrifte (A–I) van die vierhoeke (indien enige) wat aan die volgende kriteria voldoen:

(a) konkaaf

(b) parallellogramme sonder ’n simmetrie-as

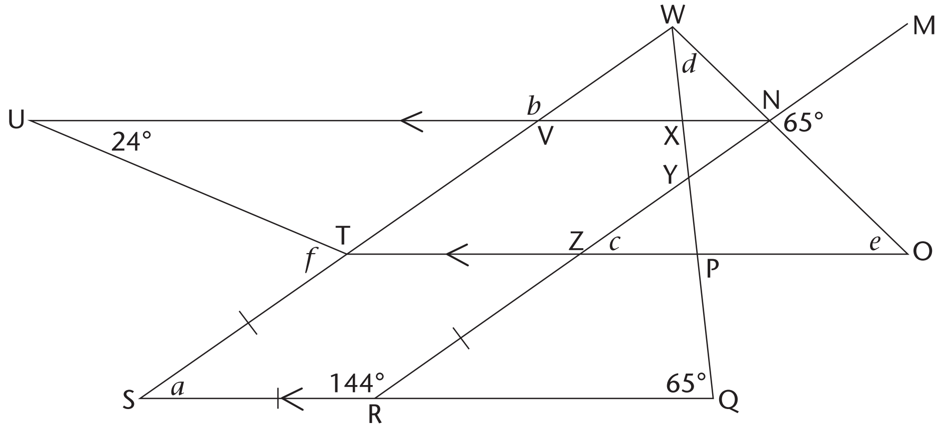
(c) met presies een paar teenoorstaande binnehoeke ewe groot

(d) nie ’n vlieër of ’n trapesium nie, maar konveks

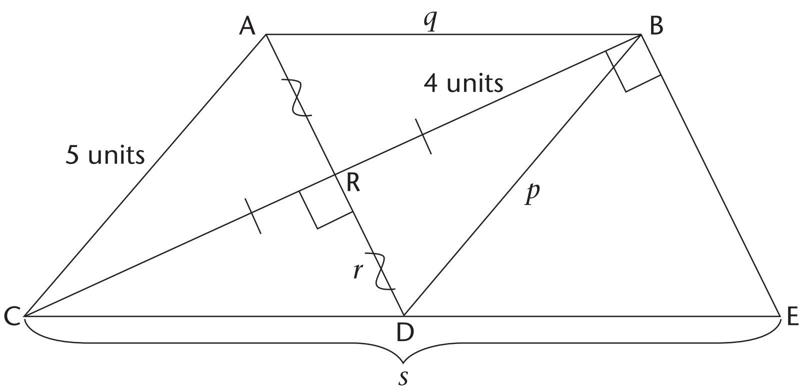
(e) met vier simmetrie-asse

(f) met dieselfde oppervlakte as A.

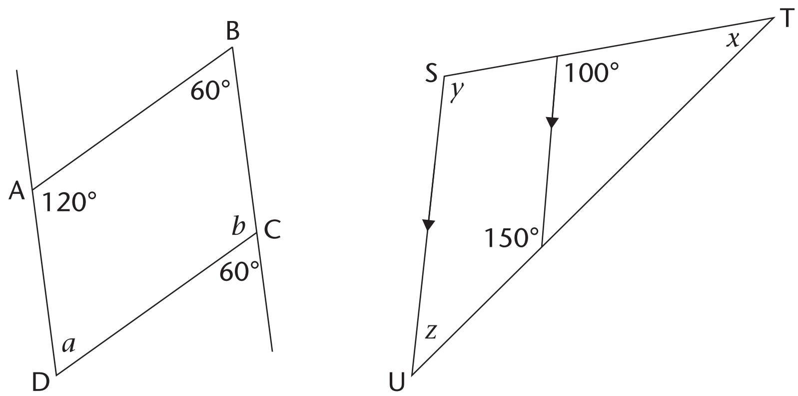
53 (a) In die diagram: UN, TO, SW, RM, WO, WQ en SQ is almal reguit lyne. Gee die ontbrekende hoeke a – f in die volgende diagramme. Gee net die waardes van die hoeke (geen redes nodig nie). Moenie raai nie. Gaan na of jou waardes sin maak in ag genome die ander waardes wat jy bepaal het.



(b) In die diagram: CE is 'n reguit lyn, AD en BC is hoeklyne van die vierhoek ABDC. Gee die lengtes p – s in die diagram. Moenie raai nie. Gaan na of jou waardes sin maak itv ander waardes wat jy bereken het .



54 In die diagramme: ST en TU is reguit lyne. Bepaal die waardes van die onbekende hoeke:



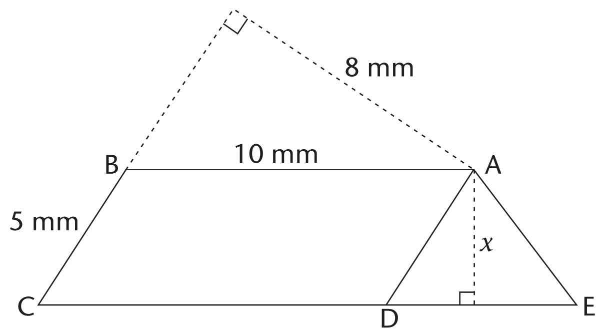
55 ABCD is ’n parallellogram. ADE is ’n driehoek wat daaraan vas is. CDE is ’n reguit lyn. AB is 10 mm en BC is 5 mm lank.

Die loodregte hoogte van ABCD vanaf BC is 8 mm (die stippellyn). Onthou om die korrekte eenhede by jou antwoorde in te sluit.

(a) Bereken die oppervlakte van die parallellogram.

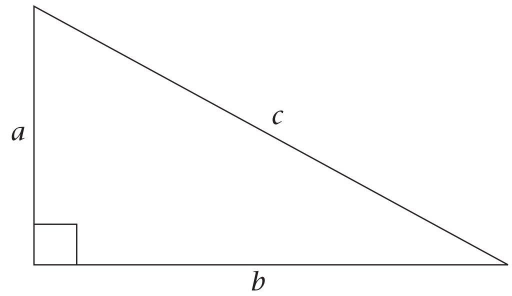
(b) Bepaal nou x, die lengte van die stippellyn in die driehoek.

(c) As die oppervlakte van die driehoek een-kwart van die oppervlakte van die parallellogram is, bereken die lengte van die hele CE.



8.6 Die stelling van Pythagoras

Die stelling van Pythagoras gee die verband tussen die lengtes van die sye van ’n reghoekige driehoek:

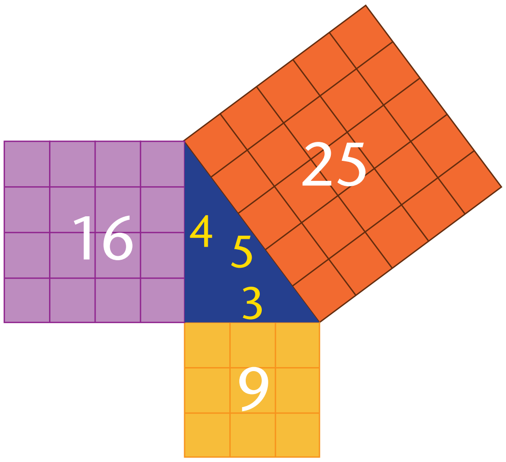


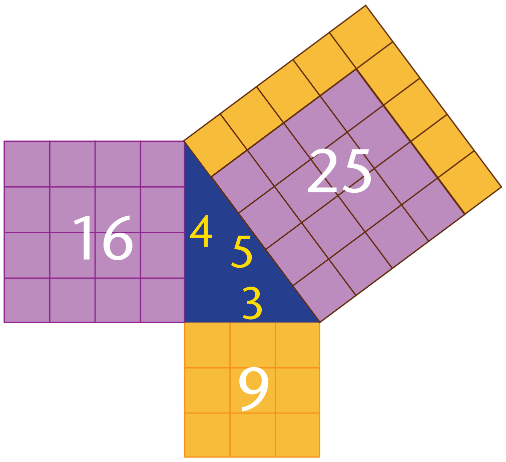
Dit lui: $a^2 + b^2$ is altyd gelyk aan c^2.

Daar is geen uitsonderings nie.

In woorde: Die kwadraat van die skuinssy is gelyk aan die som van die kwadrate van die ander twee sye.

Voorstelling van die stelling met die sye as heelgetalle:





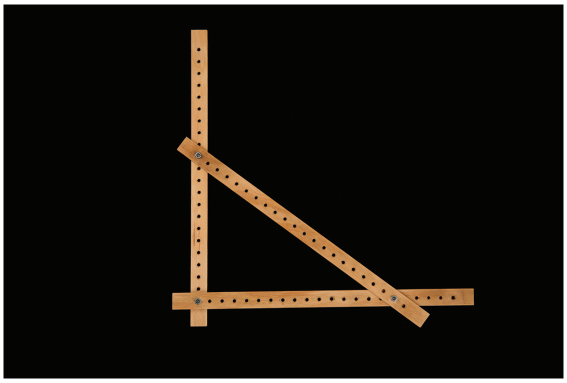
Jy kan die stelling van Pythagoras in twee gevalle gebruik:

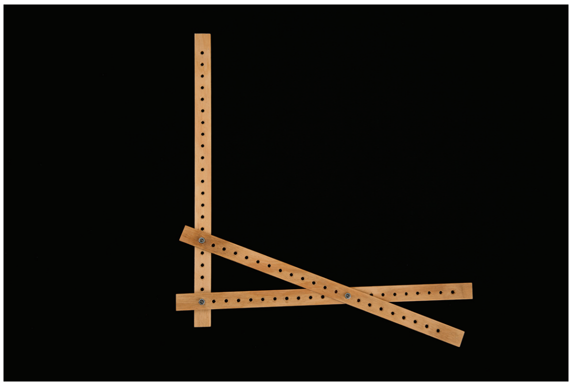
- As jy die lengte van al drie sye van 'n driehoek ken, kan jy besluit of 'n hoek 'n regte hoek is: bereken die kwadrate van die drie sye en kyk of die twee korter sye bymekaargetel dieselfde as die langer sy is.
- As jy weet 'n driehoek is reghoekig en jy die lengte van twee van die sye ken, kan jy die lengte van die derde sy bereken.

Belangrik, hierdie werk sluit by trigonometrie aan waar jy die trigonometriese funksies kan gebruik om goed te doen wat die stelling van Pythagoras nie op sy eie kan doen nie – die berekening van hoeke vanaf sye, en sye vanaf hoeke.

Oefeninge

56 Bevestig dat die twee driehoeke hieronder reghoekig is. Die gaatjies in die plankies is eweredig gespasieer sodat jy hulle relatiewe lengtes kan 'aflees' deur die aantal intervalle tussen die gaatjies te tel. Een of twee gaatjies is verberg in die tweede foto, so jy moet seker maak dat jy hulle insluit.

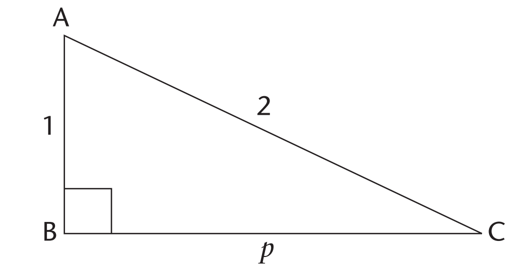




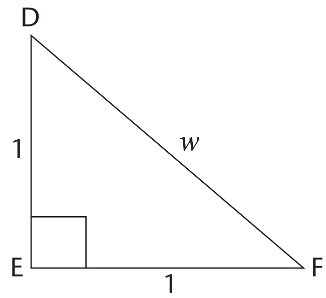
57 In $\triangle ABC$ word dit gegee dat $\angle C = 90°$. Voltooi: $\_\_\_\_\_\_^2 = \_\_\_\_\_\_^2 + \_\_\_\_\_\_^2$.

58 Bereken die onbekende waardes in die volgende driehoeke. Gee jou antwoorde tot 'n gepaste aantal beduidende syfers:

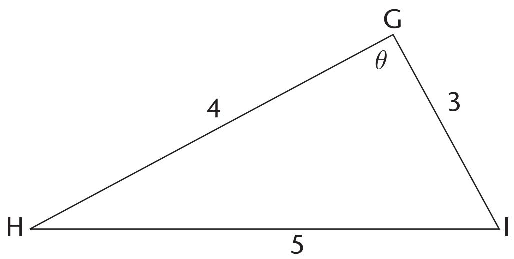
(a)



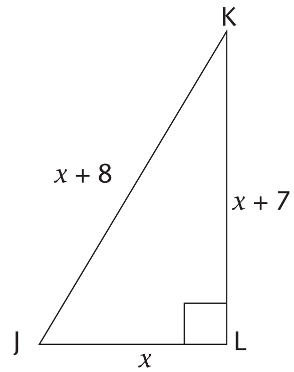
(b)



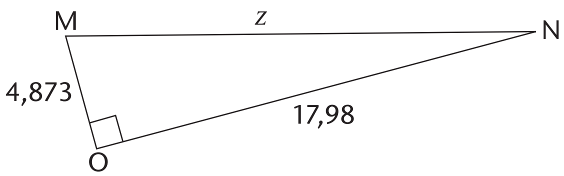
(c)



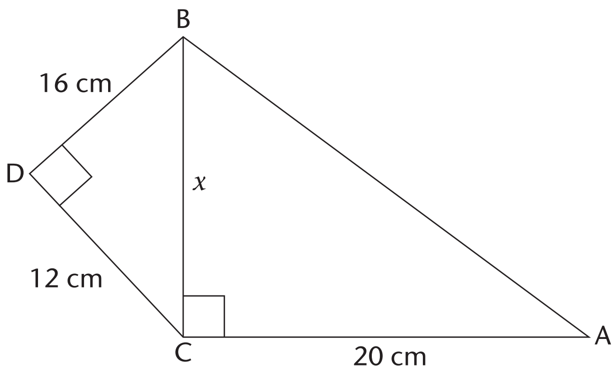
(d)



(e)



59 Gebruik die diagram om die volgende te bepaal:



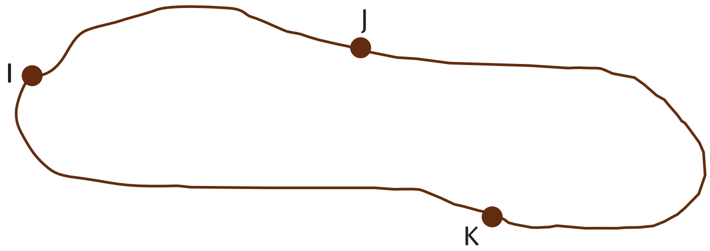
(a) x, die lengte van BC

(b) $\angle$BAC

(c) die oppervlakte van vierhoek ABDC (met korrekte eenhede)

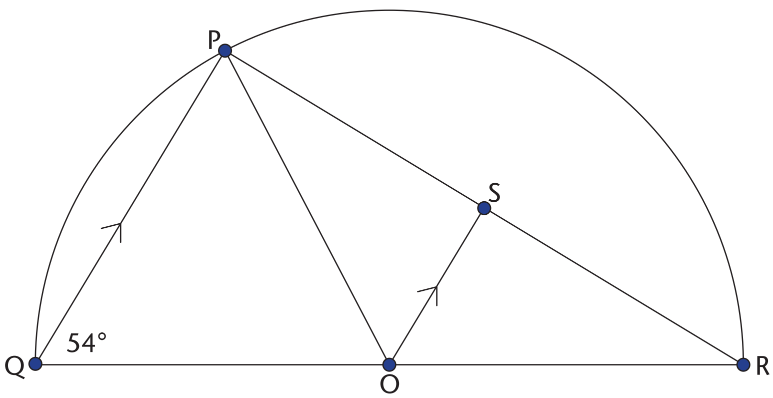
(d) die omtrek (2 desimale plekke) van ABDC (met korrekte eenhede).

60 ’n Manier wat bouers in die ou tyd gebruik het om ’n regte hoek op die grond uit te meet, was met ’n stuk tou, 12 m lank, wat by die punte aanmekaargeknoop is. Die afstand van I tot J, van J tot K en van K tot weer by I is 3 m, 4 m en 5 m onderskeidelik:



Verduidelik hoe om die regte hoek op die grond af te merk met gebruik van drie penne en die tou. Teken ’n skets om te wys wat jy bedoel.

61 Hieronder is ’n halfsirkel met middelpunt O en middellyn QR. △PQR is geteken, met P enige punt op die boog van die halfsirkel. Radius OP is getrek. Punt S word op PR gekies sodanig dat OS parallel is aan PQ. ∠PQR = 54°.



(a) Daar is drie ander hoeke gelyk aan 54°. Bepaal watter hulle is, en verduidelik in elke geval jou redenasie.

(b) Verduidelik hoekom △SOP kongruent aan △SOR is.

(c) Toon dat ∠QPR ’n regte hoek is. (**Wenk:** hoe groot is ∠OPS?)

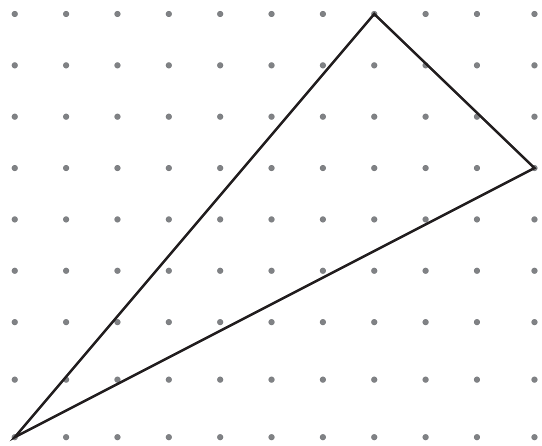
(d) Wat kan jy van △RSO en △RPQ sê?

(e) Wat is die volgende verhoudings?

- RO:OQ
- RS:RP
- PQ:SO

(f) As die radius van die sirkel 10 cm is, bereken al die oorblywende lengtes in die diagram. Gebruik dit om jou antwoorde in (b), (d) en (e) te kontroleer.

62 Die driehoek hieronder is op gestippelde papier geteken. Gebruik die stelling van Pythagoras om te toon dat die grootste hoek in die driehoek 'n regte hoek is.



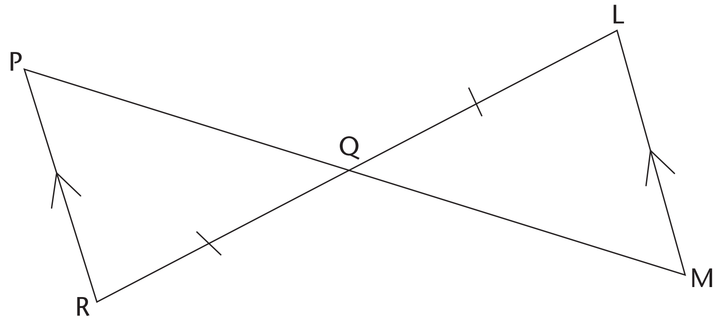
8.7 Opsomming

In hierdie hoofstuk het jy die volgende hersien en verder uitgebrei:

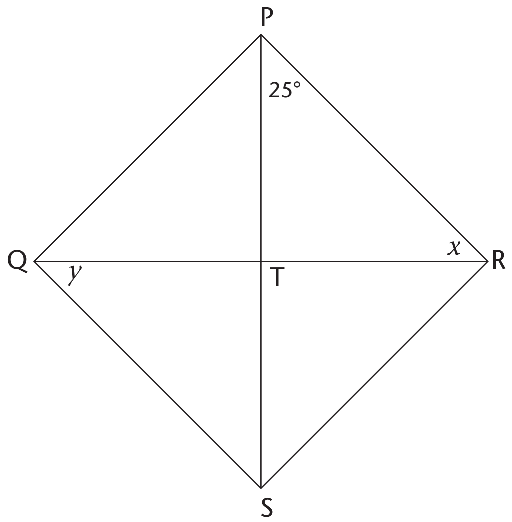
- die konsep van hoeke, en jy het jou begrip van 'n hoek as 'n breuk van 'n volle omwenteling van 360° verdiep
- jou begrip van parallelle lyne
- hoekverwantskappe wat snylyne betrek, 'n snylyn deur twee parallelle lyne
- die eienskappe van driehoeke en hoe die verskillende soorte driehoeke met mekaar verband hou
- jou begrip van gelykvormigheid en die kongruensie van driehoeke
- jou begrip van die soorte vierhoeke, dat hulle op baie verskillende maniere gedefinieer kan word en dat hulle op 'n hiërargiese manier verwant is
- die stelling van Pythagoras
- gebruik en toepassing van al hierdie begrippe op probleme.

8.8 Konsolidasie-oefeninge

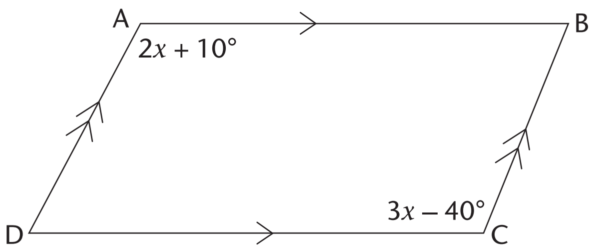
1 Bewys dat $\triangle PQR \equiv \triangle LQM$.



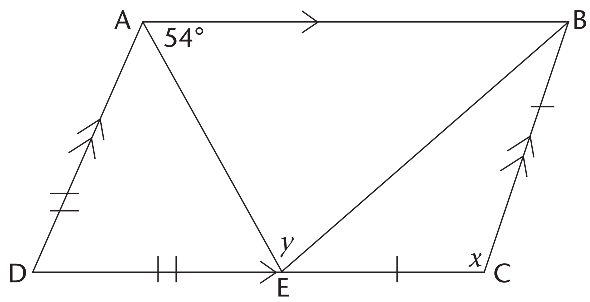
2 As PQRS 'n ruit is en hoek RPS is 25, bereken die groottes van x en y.



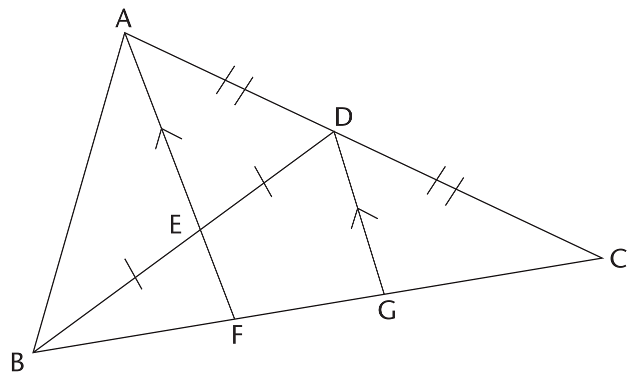
3 Verwys na die diagram hieronder. Bereken, $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$, en $\hat{D}$.



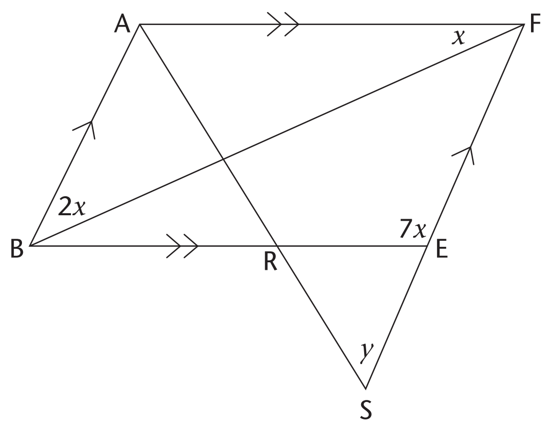
4 Verwys na die diagram hieronder. ABCD is ’n parallellogram. AD = DE en CB = CE. Bereken x en y.



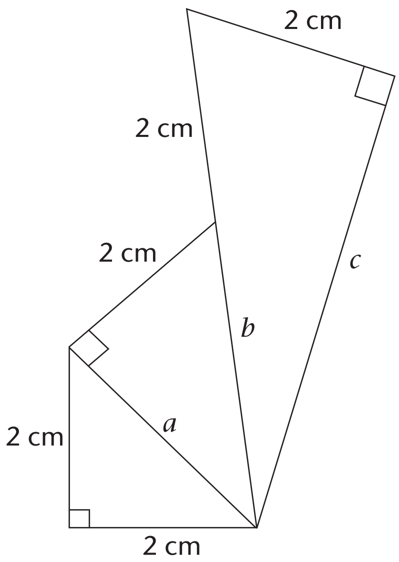
5 In die diagram is D en E die middelpunte van AC en BD onderskeidelik. Bewys dat BF = FG = GC.



6 ABEF is ’n parallellogram. Bereken x en y as SA = SF.



7 Bepaal die lengtes van sye a, b, en c.

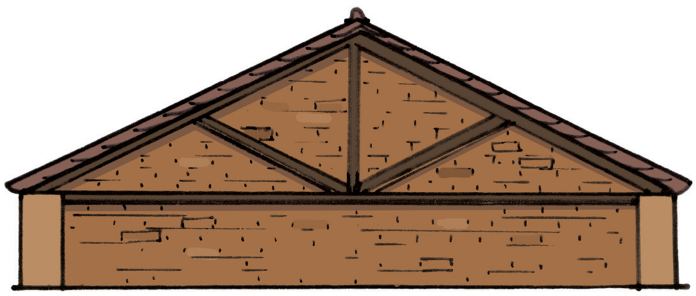


8 Driehoeke wat gelykvormig aan ’n reghoekige driehoek met sye 3, 4 en 5 is, word dikwels in konstruksie gebruik. Die dak wat hier getoon word, is 36 m breed. Die twee helftes van die dak is kongruent. Elke helfte is ’n reghoekige driehoek met sye in die verhouding 3, 4 en 5. Die korter been is die vertikale been.

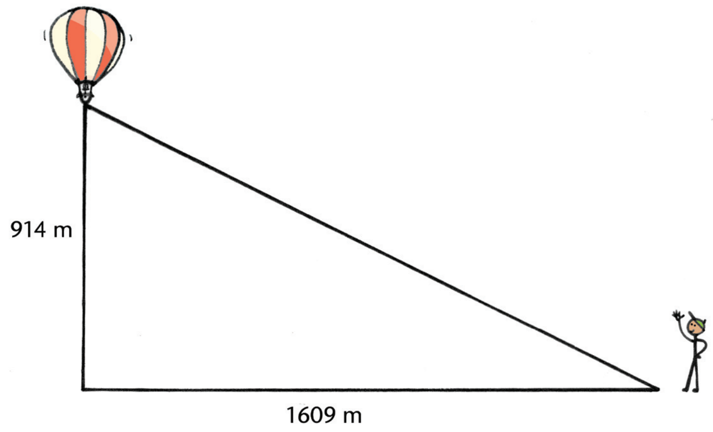
(a) Hoe hoog bo die solder se vloer moet die bopunt van die dak wees?

(b) Hoe ver is die bopunt van die dak van die rand van die dak af?

(c) Hoe groot is die oppervlakte van die dak as die gebou 48 m lank is?



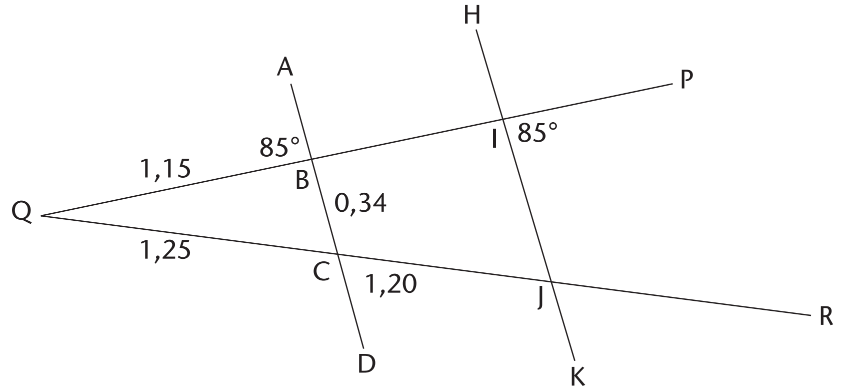
9 Die lanseerblad van 'n warmlugballon is 1 609 m van waar jy staan. As die ballon 914 m vertikaal in die lug opstyg, hoe ver, in sentimeter, is dit van jou af?



10 'n Leer, 8 m lank, word teen 'n muur gesit. Die onderpunt van die leer is 3 m weg van die muur. Bereken die hoogte wat die leer kan bereik.

11 Die hoeklyn van 'n reghoekige hek is 4,5 m lank. As die hek 4 m breed is, hoe hoog is dit?

12 In die figuur is AD en HK snylyne deur PQ en RQ, met lengtes en hoeke soos aangedui.

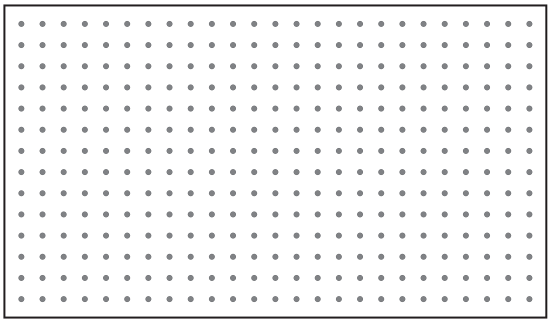


(a) Toon dat AD || HK.

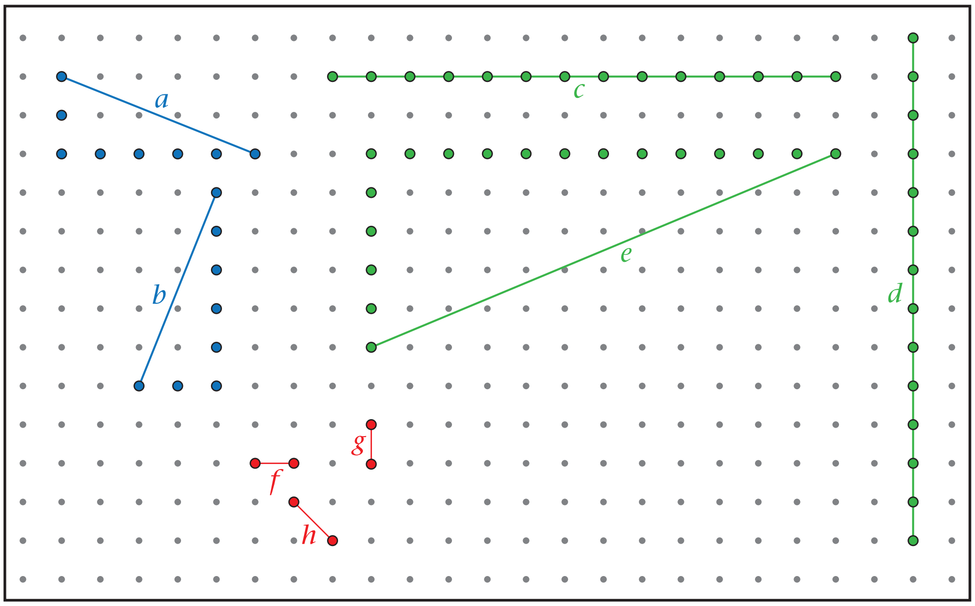
(b) Bereken die lengte van IJ en BI.

ADDENDUM Gestippelde papier

Gestippelde papier is ’n nuttige hulpmiddel om die meetkundige eienskappe van vorms te ondersoek. Die stippels is in ’n vierkantige roosterpatroon gerangskik.



Hier is ’n paar voorbeelde om te toon hoe die rooster werk:



Lynsegmente *a* en *b* is ewe lank. Dit kan gesien word aan hulle sye wat met die roosterlyne langs lengtes van 2 eenhede en 5 eenhede het. Ook, *a* en *b* sal loodreg op mekaar wees omdat hulle resiproke styg : strek-verhoudings het.

Lynsegmente *c*, *d* en *e* is almal 13 eenhede lank. Dit kan gesien word aan die styglengte en streklengte vir *e* wat onderskeidelik 5 eenhede en 12 eenhede is, wat volgens die stelling van Pythagoras die lengte van *e* 13 eenhede maak. Die drietalle [3; 4; 5] en [5; 12; 13] word Pythagoreaanse drietalle genoem en is baie nuttig omdat die sye en skuinssye heelgetalle is.

’n Algemene fout wat gemaak word, is om lengtes met die roosterlyne langs met die diagonale lengtes tussen twee punte te verwar. Lynsegmente *f* en *g* is albei 1 eenheid lank. Lynsegment *h* is 1,414 … eenhede, NIE 1 EENHEID lank nie!

9 Analitiese meetkunde

'Each problem that I solved became a rule, which served afterwards to solve other problems' (Rene Descartes, 1637).

In hierdie hoofstuk gaan jy leer:

- hoe om meetkundige figure op 'n Cartesiese koördinatestelsel voor te stel en hoe om formules te gebruik om die volgende te bepaal:
  - afstande tussen twee punte
  - middelpunt van lynsegmente
  - gradiënte van lynsegmente wat twee punte verbind
  - vergelyking van 'n reguitlyn wat deur bepaalde punte loop

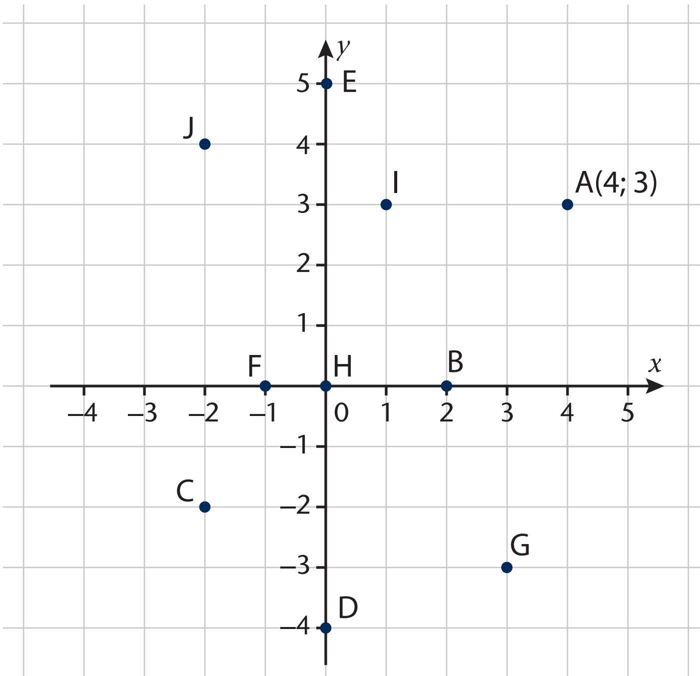
9.1 Gebruik die Cartesiese vlak om posisies van punte te bepaal

Die posisie van enige punt op die Cartesiese vlak kan aangedui word deur gebruik te maak van geordende getallepare (x; y) waar:

- die x-koördinaat van 'n punt die waarde is wat aandui hoe vêr links of regs die punt langs die horisontale as, ook bekend as die x-as, is;
- die y-koördinate van 'n punt die waarde is wat aandui hoe vêr die punt boontoe of ondertoe langs die vertikale as, ook bekend as die y-as, is.

Oefeninge

Beskou die punt A met koördinate (4; 3), soos gewys op die Cartesiese vlak hieronder.



1 Beantwoord die volgende vrae:

   (a) Wat is die y-koördinate van die punt A?

   (b) Wat is die x-koördinate van die punt A?

2 Verduidelik wat elke koördinaat vir ons sê omtrent punt A.

3 Skryf die koördinate van die punte B tot J neer.

4 Teken 'n Cartesiese vlak en stip die punte van die onderstaande koördinate, neer:

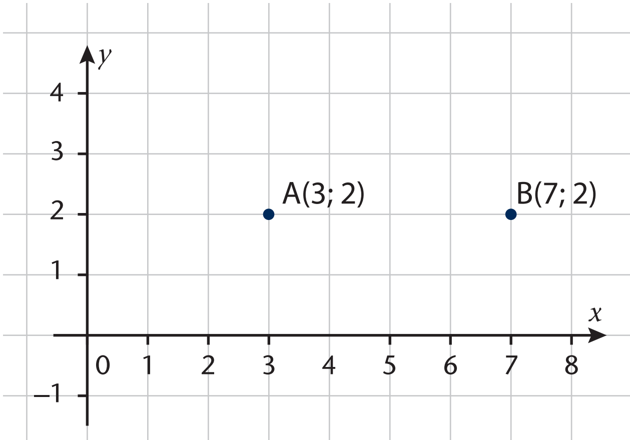
(a) P(–4; 1)	(b) Q(7; –5)	(c) R(6; 5)	(d) S(–2; –3)
(e) T(0; 2)	(f) U(2; 0)	(g) V(–1; 0)	(h) W(0; –1)

2154 TechMaths Afr G10 LB.indb 316 2015/11/25 4:14 PM

9.2 Afstand tussen twee punte

Afstand tussen twee punte met dieselfde *x*-koördinate of *y*-koördinate

Veronderstel ons het punte A(3; 2) en B(7; 2), met dieselfde *y*-koördinate, soos op die Cartesiese vlak hieronder geteken, en ons wil die afstand tussen hulle bepaal.



Wanneer ons die punte op die Cartesiese vlak teken, kom ons agter dat hulle 4 eenhede uitmekaar is. Ons kan egter die afstand tussen die twee punte bereken sonder om dit eers op die Cartesiese vlak te teken.

Om die afstand tussen die twee punte wat dieselfde *y*-koördinate het te bereken, is gelykstaande daaraan om verskil tussen hulle *x*-koördinate te vind. Die afstand tussen die twee punte A en B word dus soos volg bereken: AB = 7 – 3 = 4 eenhede

Oefening

5 Bereken die afstande tussen die punte hieronder aangegee.

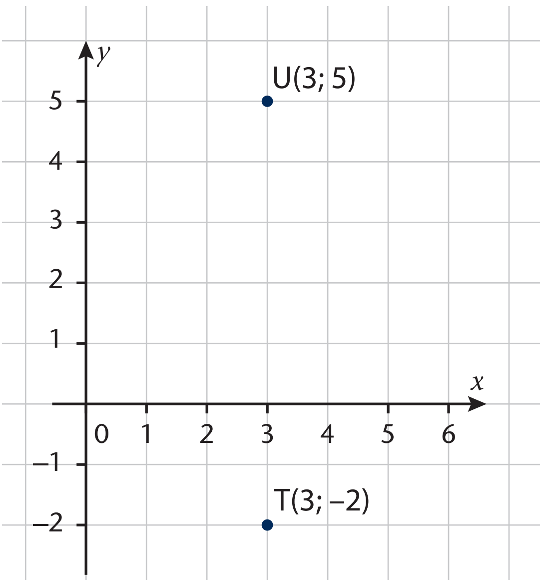
(a) C(–2; 3) en D(4; 3)

(b) E(0; 4) en F(4; 4)

(c) G(–2; –3) en H(–5; –3)

(d) I(–10; 0) en J(10; 0)

Laat ons 'n ander moontlikheid gebruik as die een waarmee ons vroeër gewerk het, waar die twee punte nou dieselfde *x*-koördinate het. Veronderstel ons het punte U(3; 5) en T(3; –2)
en ons wil die afstand tussen die twee punte vind.



2154 TechMaths Afr G10 LB.indb 317 2015/11/25 4:14 PM

Wanneer ons punte U en T op die Cartesiese vlak bestudeer, sien ons dat die afstand tussen die twee punte 7 eenhede is.

Om die afstand tussen die twee punte met dieselfde x-koördinate te bereken, is soortgelyk as om die afstand tussen hulle y-koördinate te vind. Die afstand tussen die punte U en T word dus soos volg bereken:

UT = 5 – (–2) = 7 eenhede

of

UT = –2 – 5 = –7, maar omdat ons afstand bereken, weet ons uit gewoonte dat ons die finale antwoord as UT = 7 eenhede sal skryf.

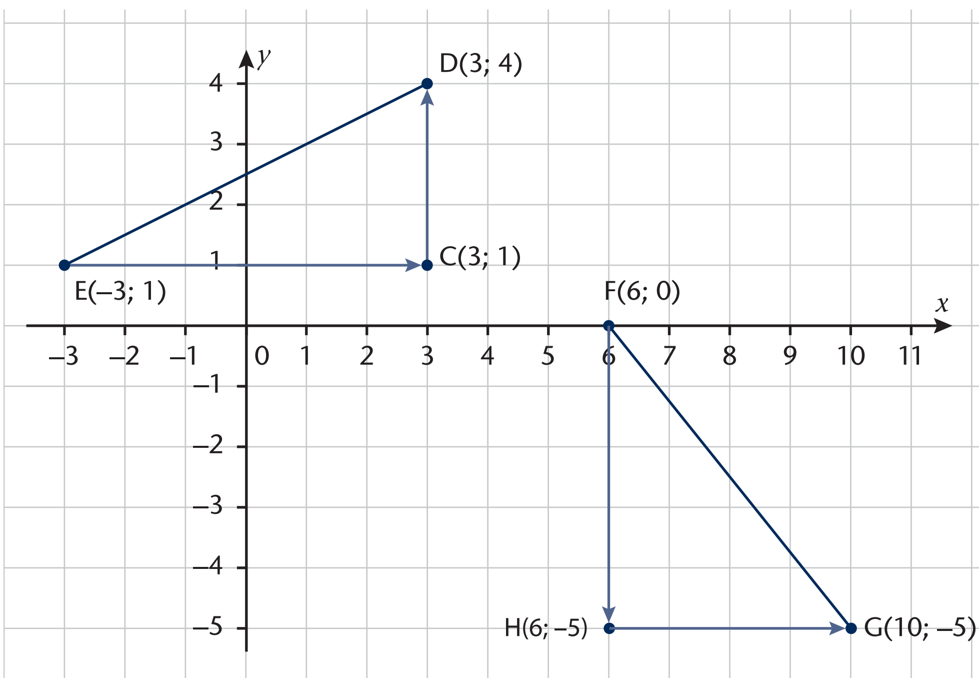
Oefening

6 Bereken nou die afstand tussen die koördinaatpunte wat hieronder gegee word.

(a) M(–2; 2) en N(–2; –2)
(b) L(1; 0) en P(1; –3)
(c) P(–4; –2) en Q(–4; –15)
(d) R(0; –20) en V(0; 30)

Die afstand tussen enige twee punte

Veronderstel dat ons die punte E(–3; 1) en D(3; 4) gegee word, en daar van ons verwag word om die afstand tussen die twee punte te bereken. Deur die lynsegmente EC en CD op die ruitenet te teken, kan ons 'n reghoekige driehoek DCE vorm, waar ED die skuinssy is.



2154 TechMaths Afr G10 LB.indb 318 2015/11/25 4:14 PM

Uitgewerkte voorbeelde

A. Probleem: Kyk na die lynsegment ED in die diagram hierbo. Die koördinate van punt E is (–3; 1) en die koördinate van punt D is (3; 4). Wat is die afstand vanaf punt E tot D?

Oplossing:

$$ED^2 = (3 - (-3))^2 + (4 - 1)^2$$
$$ED^2 = (6)^2 + (3)^2$$
$$ED^2 = 36 + 9$$
$$ED^2 = 45$$
$$\sqrt{ED^2} = \sqrt{45}$$
$$ED = \sqrt{45} \text{ eenhede}$$

B. Probleem: Beskou die lynsegment FG in die vorige diagram. Die koördinate van punt F is (6; 0) en die koördinate van punt G is (10; –5). Wat is die afstand tussen punt F en G?

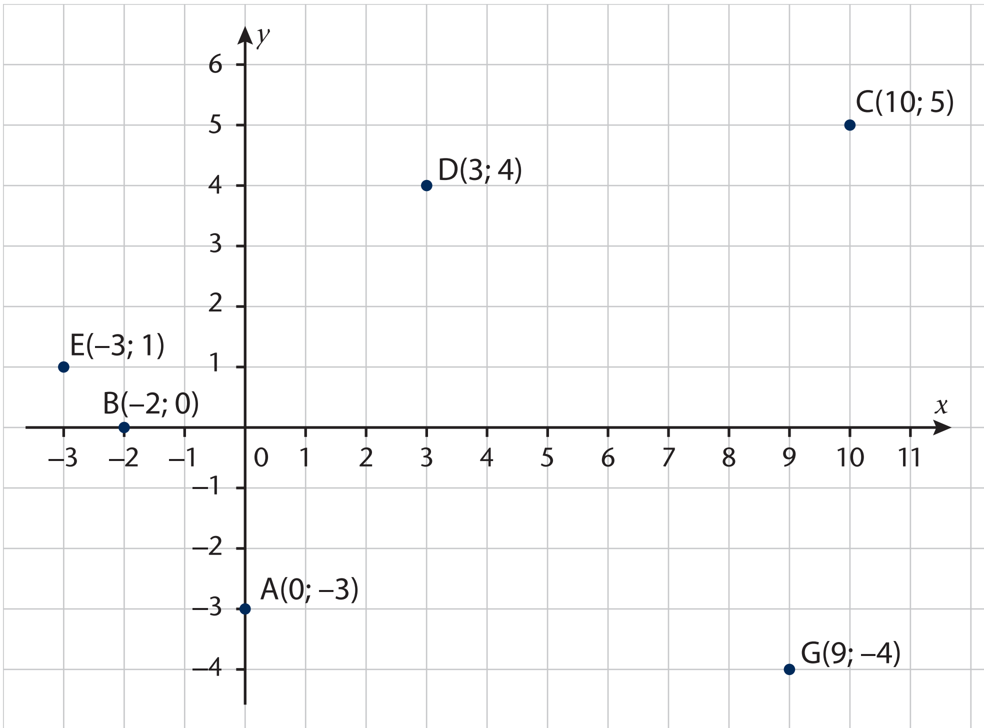
Oplossing:

$$FG^2 = (10 - 6)^2 + (-5 - 0)^2$$
$$FG^2 = (4)^2 + (-5)^2$$
$$FG^2 = 16 + 25$$
$$FG^2 = 41$$
$$\sqrt{FG^2} = \sqrt{41}$$
$$FG = \sqrt{41} \text{ eenhede}$$

Oefening

7 Bestudeer die koördinate wat in die Cartesiese vlak hieronder gegee word:

A(0; –3), B(–2; 0), C(10; 5), D(3; 4), E(–3; 1) en G(9; –4)



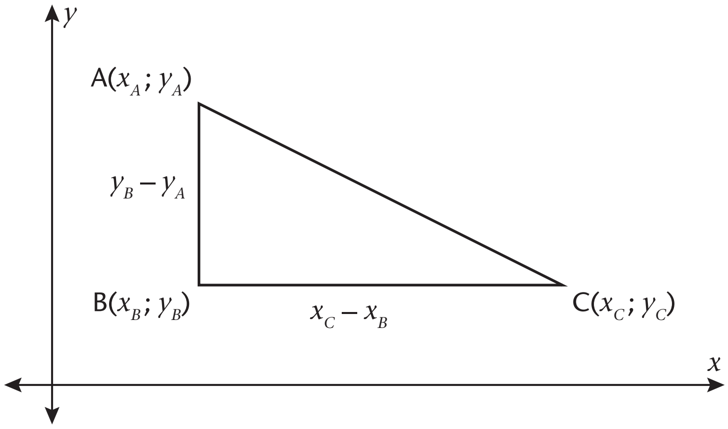
Bereken die lengtes van die volgende lynsegmente:

(a) AE (b) BC (c) DG (d) AC

Afstandsformule: die algemene geval

Wanneer ons die afstand tussen twee punte bereken, of die lengte van ’n lynsegment bereken, kan ’n formule ons help om dit baie vinniger te doen, sonder dat ons die koördinate op die Cartesiese vlak hoef te stip.

Kom ons aanvaar dat ons punte verskillende x- en y-koördinate het. Ons werk volgens die reghoekige driehoek, ABC, hieronder aangegee, met die lengte van AB = $y_B - y_A$ en die lengte van BC = $x_C - x_B$:



Volgens Pythagoras se Teorie kan ons die lengte van AC, soos volg bereken:

$AC^2 = AB^2 + BC^2$

$AC^2 = (y_B - y_A)^2 + (x_C - x_B)^2$

$AC = \sqrt{(y_B - y_A)^2 + (x_C - x_B)^2}$

Deur hierdie formule te gebruik, kan ons nou die afstand tussen twee punte bepaal sonder om die figuur te teken.

Uitgewerkte voorbeeld

Probleem: Vind die afstand tussen die punte A(4; 4) en B(–4; –4).

Oplossing: Vir die doeleindes om die afstandsformule te gebruik wanneer ons die afstand tussen A en B wil bereken, laat A(4; 4) die koördinate (x_A; y_A) wees, en B(–4; –4) die koördinate (x_B; y_B) wees:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

$$AB = \sqrt{((-4) - (+4))^2 + (-4 - (+4))^2}$$

$$AB = \sqrt{(-8)^2 + (-8)^2}$$

$$AB = \sqrt{64 + 64}$$

$$AB = \sqrt{128}$$

Oefeninge

8 Vind die afstand tussen:

(a) (–4; 3) tot (3; 4) (b) (1; 4) tot (2; 6)

(c) (–3; –5) tot (0; 10) (d) (9; –7) tot (–2; 1)

9 Bereken die afstand tussen elke paar van die volgende koördinate:

(a) (4; –1) en (1; 3) (b) (3; 0) en (5; –4)

(c) (0; 0) en (10; 10) (d) (1; –1) en (–1; 1)

Bewys van eienskappe van veelhoeke

Ons kan eenvoudige meetkundige stellings oor veelhoeke algebraïes bewys.

Uitgewerkte voorbeeld

Probleem: Bewys dat △ABC met A(0; 0), B(2; 3), en C(4; 0) ’n gelykbenige driehoek is.

Oplossing: ’n Gelykbenige driehoek het twee sye van gelyke lengte. Om die lengte van ’n reguit lyn te bereken, gebruik ons die afstandsformule. Ons moet wys dat die basis sye van △ABC dieselfde lengte of afstand het.

$$AB = \sqrt{(3-0)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

$$BC = \sqrt{(0-3)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (2)^2} = \sqrt{13}$$

$$AC = \sqrt{(0-0)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{0^2 + 4^2} = \sqrt{16} = 4$$

$AB = BC = \sqrt{13}$

Ons het dus sopas bewys dat △ABC ’n gelykbenige driehoek is.

Oefeninge

10 Indien die hoekpunte van △ABC A(1; –6), B(5; –8), en C(7; –4):

(a) Bereken die lengtes van AB, BC, en AC.

(b) Is △ABC ’n reghoekige driehoek? Verduidelik.

11 Gebruik die afstandsformule om die △ABC te klassifiseer as een van die volgende: ongelyksydige-, gelykbenige-, gelyksydige-, of reghoekige driehoek.

(a) A(0; 4), B(–4; 0), C(4; 0)

(b) A(–3; –1), B(–5; –4), C(–2; –3)

(c) A(1; 1), B(4; 4), C(6; 2)

12 Bewys dat D(3; –1), E(4; 6) en F(0; 3) die hoekpunte van 'n gelykbenige reghoekige driehoek is.

13 (a) Bewys dat P(–2; 2), Q(–1; 6), R(3; 7) en S(2; 3) die hoekpunte van 'n ruit is.

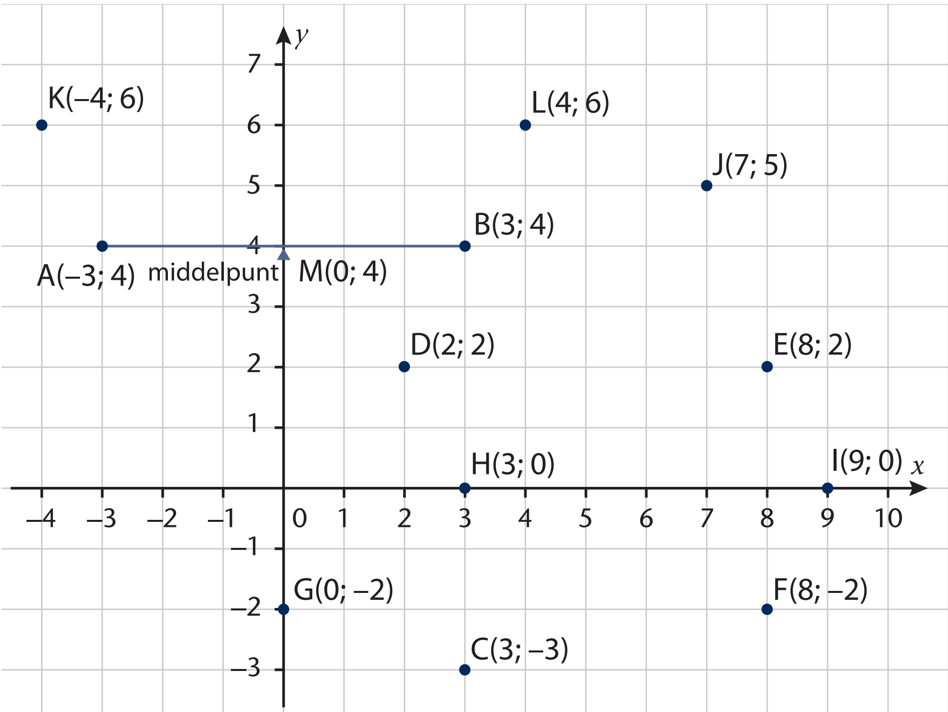
(b) Kan PQRS ook 'n parallelogram wees? Verduidelik.

9.3 Middelpunt koördinate van 'n lynsegment wat twee punte verbind

Die middelpunt

Die punt M, halfpad tussen die punte A en B, word die middelpunt van die lynsegment AB genoem.

Die diagram hieronder wys 'n aantal punte met verskillende koördinate. Deur die diagram te gebruik, kan ons sien dat die koördinate van die middelpunt van lynsegment AB, M(0; 4) is.



Oefening

14 Gebruik die bostaande diagram om die koördinate van die middelpunte van die volgende horisontale en vertikale lynsegmente te vind:

(a) KL
(b) CH
(c) FE
(d) DE
(e) HI
(f) GF

In die vorige oefening het ons die Cartesiese vlak gebruik om die koördinate van die middelpunt van lynsegmente te vind. Ons kon ook die middelpunt van enige lynsegment vind, sonder om noodwendig 'n diagram te teken.

Ons definieer die x-koördinaat en y-koördinaat van die middelpunt van 'n lynsegment tussen twee koördinaat punte $(x_1; y_1)$ en $(y_2; y_2)$ as volg:

x-koördinaat van M = $\dfrac{x\text{-koördinaat van A} + x\text{-koördinaat van B}}{2}$ en

y-koördinaat van M = $\dfrac{y\text{-koördinaat van A} + y\text{-koördinaat van B}}{2}$.

Die koördinate van die middelpunt van 'n lyn segment kan bereken word as $\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}; \dfrac{y_1 + y_2}{2}\right)$.

Uitgewerkte voorbeeld

Probleem: Bereken die middelpunt M van die vertikale lynsegment AB waar A(–3; 4) en B(3; 4) is.

Oplossing: x-koördinate van M $= \dfrac{-3 + 3}{2} = \dfrac{0}{2} = 0$

y-koördinate van M $= \dfrac{4 + 4}{2} = \dfrac{8}{2} = 4$

So, M $\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}; \dfrac{y_1 + y_2}{2}\right)$ = M(0; 4)

Oefeninge

15 Gebruik die middelpunt formule om die middelpunte van die lynsegmente in vraag 14 te bereken.

(a) KL (b) CH (c) FE
(d) DE (e) HI (f) GF

16 Gebruik nou die middelpunt formule om die koördinate van die middelpunte van die volgende lynsegmente in die vorige diagram te bereken:

(a) AK (b) CG (c) FJ
(d) DJ (e) HE (f) GE

17 Bereken die middelpunt van die volgende lynsegmente:

(a) CD waar C(5; –3) en D(–5; 13) (b) AB waar A(–3; –1) en B(0; 5)
(c) EF waar E(–10; 10) en F(10; –10) (d) GH waar G(7; 1) en H(3; 0)

18 Beantwoord die vrae hieronder:

(a) Die middelpunt van die lynsegment CD is (–4; 5). Een eindpunt van die lynsegment is D(–5; 13). Bereken die koördinate van C.

(b) Die middelpunt van lynsegment GH is $\left(5; \frac{1}{2}\right)$. Die koördinate van H is (3; 0). Bereken die koördinate van G.

(c) Die middelpunt van lynsegment EF (0; 0), waar E(−10; 10) is. Bereken die koördinate van F.

(d) Die middelpunt van lynsegment AB is $\left(\frac{-3}{2}; 2\right)$. Die koördinate van B is (0; 5). Bereken die koördinate van A.

19 Een van die eienskappe van ’n parallelogram is dat sy hoeklyne mekaar in twee verdeel. Gebruik hierdie eienskap om te bewys dat die koördinate S(0; 3), T(3; 5), U(4; 9) en V(1; 7) die hoekpunte van die parallelogram is.

9.4 Gradiënt van lynsegment

Een van bruikbaarste kwaliteite wat mense soos wetenskaplikes, ambagsmanne, ingenieurs, en tegnici dikwels gebruik, is die gradiënt, ook bekend as die helling. Persone wat dakke opsit en timmermanne, byvoorbeeld, gebruik ’n waterpas om die helling te bepaal. Die helling van ’n dak word die skuinste genoem. In Hoofstuk 6 het jy werk gedoen waar jy van die skuinste van die dak gepraat het.

Wanneer ons byvoorbeeld opritte ontwerp, word die konsep van skuinstes noodsaaklik. Regulasies maak voorsiening dat enige oprit ’n bepaalde gradiënt moet hê wat nie steiler is as 1:12 nie. (Hoe steil kan opritte dus wees?)

Ons bereken die gradiënt van ’n reguit lyn deur enige twee punte op die lyn te kies, byvoorbeeld A(x_1; y_1) en B(x_2; y_2). Ons doen dit omdat ons weet dat die gradiënt van ’n reguit lyn konstant is.

Ons definieer die **gradiënt** (m) van ’n lyn tussen twee punte, as die verhouding van die verandering in die waarde van y in verhouding tot die waarde van x, en ons skryf dit in breukvorm, soos hieronder aangedui:

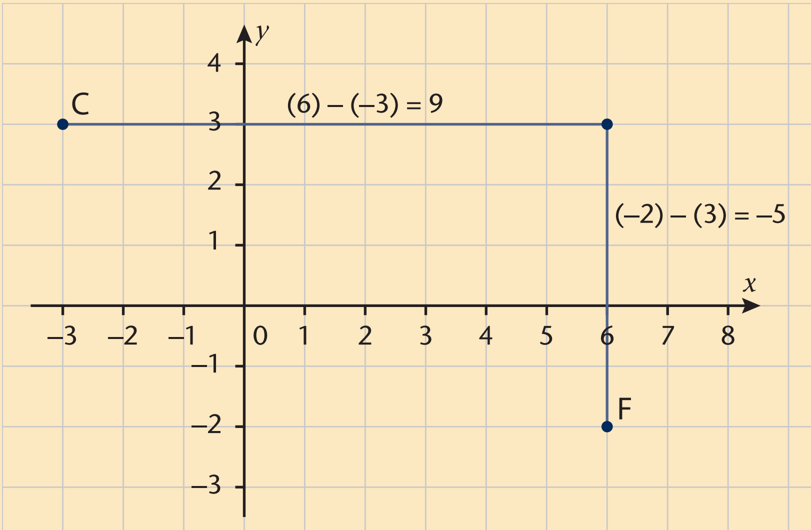
$$m_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\text{verandering in die waarde van } y}{\text{verandering in die waarde van } x}$$

Uitgewerkte voorbeeld

Probleem: Vind die gradiënt van die lyn deur die punte C(–3; 3) en F(6; –2).

Oplossing: Laat $(x_1; y_1)$, (–3; 3) wees, en laat $(x_2; y_2)$, (6; –2) wees,

$$m_{CF} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{(-2) - (3)}{(6) - (-3)} = \frac{-5}{9}$$



Oefeninge

20 Bereken die gradiënt van die lyne wat deur die volgende pare punte loop. Teken eers elke paar punte op die Cartesiese vlak. Gebruik dieselfde vlak om al die punte wat hieronder aangegee word, aan te toon.

(a) C en D, waar C(5; –3) en D(–5; 13)

(b) A en B, waar A(–3; –1) en B(0; 5)

(c) E en F, waar E(–10; 10) en F(10; –10)

(d) G en H, waar G(7; 1) en H(3; 0)

21 Bereken die gradiënt van die reguit lyne deur die volgende stel punte.

(a) A(2; 0) en B(–1; 1)

(b) C(12; 13) en D(6; 7)

(c) E(–3; –5) en F(3; 5)

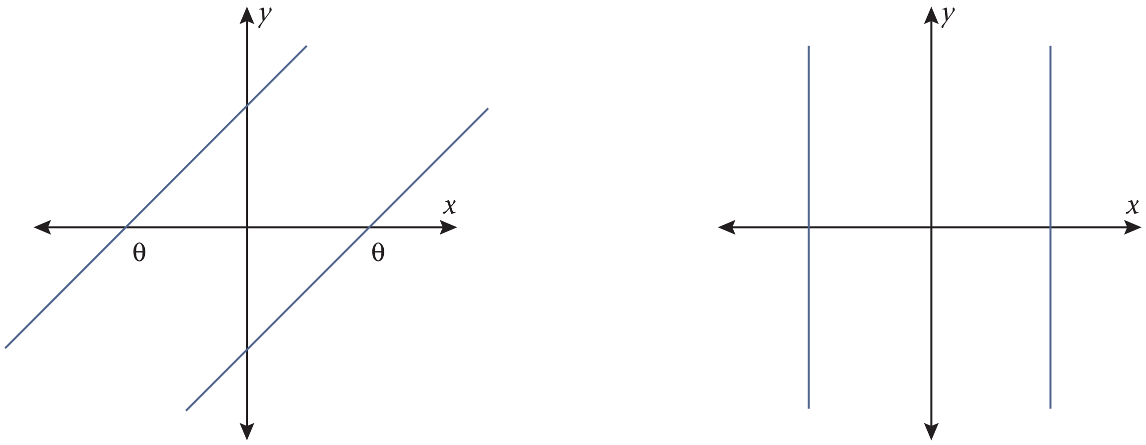
(d) G(–9; –3) en H(–3; –9)

2154 TechMaths Afr G10 LB.indb 325 2015/11/25 4:14 PM

Parallelle lyne

Ons kan ons kennis van die gradiënt van 'n reguit lyn gebruik om te bepaal wat die verwantskap is tussen verskillende lyne, m.a.w. of lyne parallel tot mekaar loop, of loodreg met mekaar is, of nie parallel of loodreg is nie. Twee lyne is parallel wanneer en slegs wanneer:

- hulle hellings (gradiënte) gelyk is en hulle ook nie bo-op mekaar lê nie
- albei lyne vertikaal is (hulle gradiënt is ongedefinieerd) en hulle lê nie bo-op mekaar nie



Uitgewerkte voorbeelde

A. Probleem: Wat is die gradiënt van die lyn parallel tot ’n lyn met ’n gradiënt van 5?

Oplossing: Parallelle lyne het gelyke gradiënte, dus sal die gradiënt van ’n lyn parallel tot die gegewe lyn ook 5 wees.

B. Probleem: ’n Reguit lyn loop deur die punte A(0; 2) en B(3; 5). Nog ’n reguit lyn loop deur punte C(13; 13) en D(0; 0). Is die twee lyne parallel met mekaar?

Oplossing: $m_{AB} = \frac{5-2}{3-0} = \frac{3}{3} = 1$

$$m_{CD} = \frac{0-13}{0-13} = \frac{-13}{-13} = 1$$

Die gradiënte van die twee lyne is gelyk, dus is die lyne parallel.

Oefeninge

22 Watter van die reguit lyne wat deur elke paar punte wat hieronder gegee word, loop, sal parallel wees?

(a) A(2; 0) en B(–1; 1); C(12; 13) en D(6; 7)

(b) E(–3; –5) en F(3; 5); G(–9; –3) en H(–3; –9)

(c) K (0; 0) en L (5; 10); P(0; 1) en Q(5; 9)

(d) R(1; –1) en S(3; –3); T(10; –9) en U(30; –29)

(e) I(–5; 0) en J(0; 5); L(0; 5) en N(5; 0)

(f) V(2; 0) en W(2; 22); P(0; 10) en T(0; –3)

23 Wat is die gradiënt van ’n lyn parallel met die lyn met ’n gradiënt van:

(a) –3

(b) $\frac{2}{5}$

(c) $\frac{5}{2}$

(d) 1,8

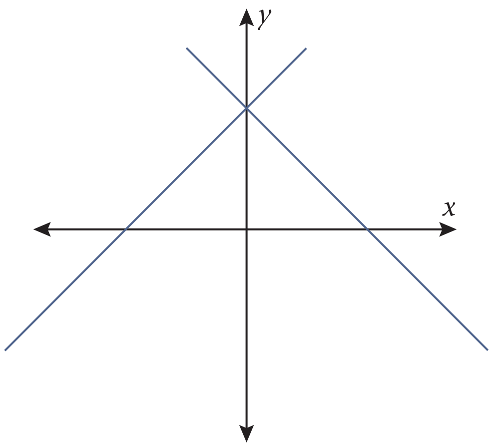
(e) −0,6

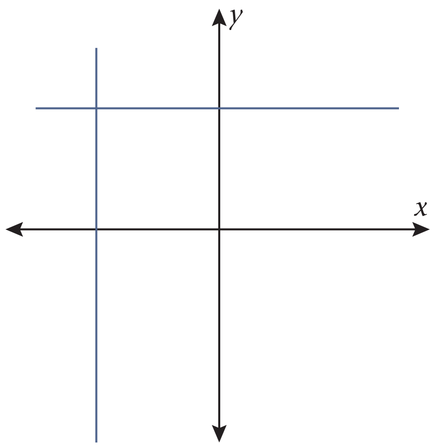
24 Een van die eienskappe van ’n parallelogram is dat dit twee pare parallelle sye het. Gebruik hierdie eienskap om te wys dat die koördinate S(0; 3), T(3; 5), U(4; 9) en V(1; 7) die hoekpunte van ’n parallelogram is.

Loodregte lyne

Twee lyne is loodreg tot mekaar wanneer en slegs wanneer:

- die produk van hulle gradiënte –1 is
- een lyn horisontaal is (gradiënt = 0) en die ander lyn vertikaal (gradiënt ongedefinieerd)





Jy kan die gradiënt van 'n loodregte lyn bepaal deur dit self uit te werk.

Gradiënt van een lyn	Gradiënt van die loodregte lyn	Produk van gradiënte
$m = 3$	$m = -\frac{1}{3}$	-1
$m = -3$	$m = \frac{1}{3}$	-1
$m = \frac{3}{5}$	$m = -\frac{5}{3}$	-1
$m = -\frac{1}{2}$	$m = 2$	-1

Uitgewerkte voorbeeld

Probleem: Wat is die gradiënt van die lyn loodreg tot 'n lyn met 'n gradiënt van 5?

Oplossing: Die produk van gradiënte van loodregte lyne is -1. Die gradiënt van die ander lyn moet dus $-\frac{1}{5}$ wees, omdat $5 \times -\frac{1}{5} = -1$.

Oefening

25 Bepaal die gradiënt van die lyne wat loodreg is tot lyne met die volgende gradiënte:

(a) 10

(b) -10

(c) $\frac{3}{4}$

(d) $\frac{-3}{2}$

(e) -1

(f) 0

(g) ongedefinieer

Uitgewerkte voorbeeld

Probleem: 'n Reguit lyn loop deur die punte A(1; 2) en B(3; 8). 'n Ander reguit lyn loop deur punte C (5; 5) en D(−4; 8). Is die twee lyne loodreg tot mekaar?

Oplossing: $m_{AB} = \frac{(8) - (2)}{(3) - (1)} = \frac{6}{2} = 3$

$$m_{CD} = \frac{(8) - (5)}{(-4) - (5)} = -\frac{3}{9} = -\frac{1}{3}$$

Omdat $M_{AB} \times M_{CD} = 3 \times -\frac{1}{3} = -1$ is, is die produk van die gradiënt van die twee lyne -1.
Die lyne is dus loodreg tot mekaar.

Oefeninge

26 ’n Vierhoek het hoekpunte by die punte A(–3; 1), B(–1; 4), C(3; 7) en D(5; –2).

(a) Bereken die gradiënt van die hoeklyne AC en BD.

(b) Wat kan jy sê omtrent die hoeklyne van die vierkant ABCD?

(c) Watter tipe vierhoek is ABCD? Verduidelik.

27 Bestudeer nou ’n vierhoek met hoekpunte O(0; 0), P(2; 4), Q(4; 4) en R(4; 2). Een van die eienskappe van ’n vlieër is dat een hoeklyn die ander hoeklyn loodreg halveer. Wys dat hierdie eienskap van toepassing is op hierdie vierhoek.

28 Nog ’n ander vierhoek het hoekpunte by die punte M(0; 2), N(1; 0), P(7; 3) en V(4; 4). Watter tipe vierhoek is hierdie?

9.5 Vergelyking van ’n reguit lyn wat deur twee punte loop

In hierdie afdeling gaan ons leer oor die vergelykings van reguit lyne wat deur twee punte loop. Die vergelyking van ’n lyn kan verskeie vorms aanneem, afhangende van die inligting wat omtrent die lyn gegee word.

Ons weet dat die gradiënt van ’n reguit lyn aangedui word deur:

$$m = \frac{\text{verandering in die waarde van } y}{\text{verandering in die waarde van } x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Die gradiënt tussen saamlynige punte op enige reguit lyn, sal konstant wees. Die vergelyking van die gradiënt sal dus aangedui word deur:

$$y - y_1 = m(x - x_1)\textbf{, of } y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)\textbf{, of } y = mx + c$$

Uitgewerkte voorbeeld

Probleem: ’n Reguit lyn loop deur die punte A(0; 2) en B(3; 5). Wat is die vergelyking van die reguit lyn wat deur die punte loop?

Oplossing:

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m(x - x_1) \\ m_{AB} &= \frac{2-5}{0-3} = \frac{-3}{-3} = 1 \\ y - 5 &= 1(x - 3) \\ y - 5 &= x - 3 \\ y &= x + 2 \end{aligned}$$

of

$$\begin{aligned} y - y_1 &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \\ y - 5 &= \frac{2-5}{0-3}(x - 3) \\ y - 5 &= 1(x - 3) \\ y - 5 &= x - 3 \\ y &= x + 2 \end{aligned}$$

of

$$\begin{aligned} y &= mx + c \\ m_{AB} &= \frac{2-5}{0-3} = \frac{-3}{-3} = 1 \\ y &= 1x + c \\ 3 &= 1(5) + c \\ 3 &= 5 + c \\ c &= 2 \\ y &= x + 2 \end{aligned}$$

Oefening

29 Bepaal die vergelyking van die reguit lyn deur:

(a) A(–7; –7) en B(7; 7)

(b) C(4; 0) en D(–4; 0)

(c) E(0;4) en F(0; –4)

(d) G(3; 6) en H(–1; –2)

(e) I(6; 3) en J(–2; –1)

(f) K$\left(\frac{1}{2}; 1\right)$ en L(–3; 6)

9.6 Opsomming

- In hierdie hoofstuk het jy geleer hoe om meetkundige figure op 'n Cartesiese koördinate stelsel aan te dui, en hoe om die formules toe te pas om die afstande tussen punte, middelpunt van lynsegmente, die gradiënt van lynsegmente wat twee punte verbind te bereken, en die vergelyking van 'n reguit lyn wat deur 'n bepaalde punt loop, te bepaal.
- Die x-koördinate is die waarde wat ons help om te bepaal waar die punt in verhouding tot die x-as lê, en die y-koördinate is die waarde wat ons help om te bepaal waar 'n punt in verhouding tot die y-as lê.
- Om die afstand tussen twee punte $(x_1; y_1)$ en $(x_2; y_2)$ te bereken, gebruik ons die **afstandsformule** soos volg: $\sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2}$.
- Om die middelpunt van enige lynsegment tussen twee koördinaatpunte $(x_1; y_1)$ en $(x_2; y_2)$ te vind, sonder om 'n diagram te teken, gebruik ons die **middelpunt formule** soos volg: $m\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$.
- Die **gradiënt (*m*)** van 'n reguit lyn tussen twee koördinaat punte dui die helling van die lyn aan. Dit dui ook aan of dit 'n positiewe of 'n negatiewe helling is. Ons gebruik die volgende formule om die gradiënt van 'n reguit lyn tussen die punte $(x_1; y_1)$ en $(x_2; y_2)$ soos volg te bereken: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.
- Die formule vir 'n **reguit lyn** deur twee punte $(x_1; y_1)$ en $(x_2; y_2)$ word gegee deur**:**

  $y - y_1 = m(x - x_1)$ **of** $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$ **of** $y = mx + c$.
- Alle **horisontale lyne** het die vergelyking in die vorm $y = c$, waar c 'n konstante is. Die gradiënt van 'n horisontale lyn is 0.
- Alle **vertikale lyne** het vergelykings in die vorm $x = a$ 'n getal. Die gradiënt van 'n vertikale lyn is ongedefinieerd.

9.7 Konsolidasie oefeninge

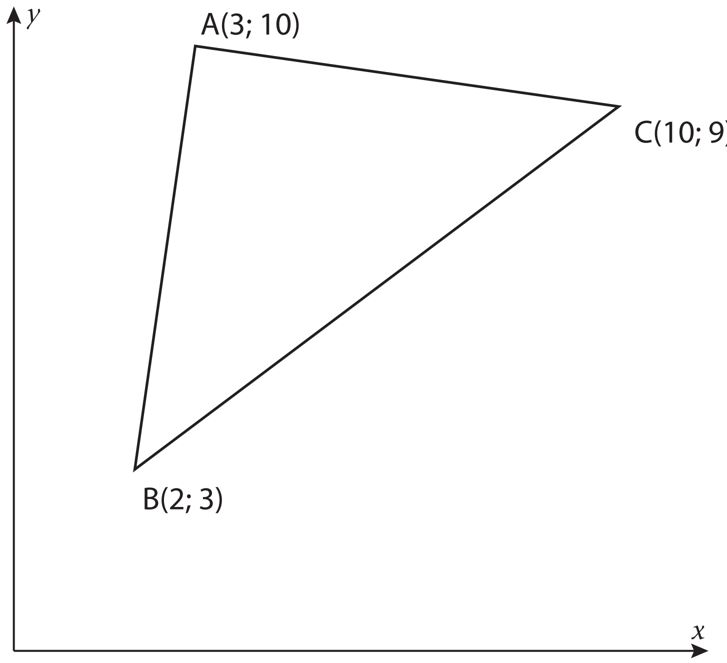
1 Gegewe die punte A(4; –4) en B(–3; 4). Bereken:

(a) die lengte van die lynsegment AB

(b) die middelpunt van lynsegment AB

(c) die gradiënt van lynsegment AB

2 Die $\triangle$ABC het koördinate A(3; 10), B(2; 3) en C(10; 9) soos hieronder aangedui:



(a) Bereken die lengtes of AB, AC, en BC.

(b) Watter soort driehoek is ABC?

(c) Vind die middelpunt, M, van BC.

(d) Bereken die gradiënt van AM.

3 Die vierhoek STQR het hoekpunte S(5; –1), T(–2; –3), Q(0; 5), en R(7; 7).

(a) Bereken die lengtes van die sye ST, TQ, QR, en RS.

(b) Bereken die gradiënte van SR, TQ, ST, en QR.

(c) Bereken die middelpunte van SR, TQ, ST, en QR.

(d) Watter tipe vierhoek is STQR?

4 Trek reguitlyngrafieke op dieselfde assestelsel en bespreek die gradiënt in terme van die vorm van die grafieke:

(a) $y = 6x + 3$
(b) $y = -3x + 6$
(c) $y = 6$
(d) $x = 3$
(e) $y = 3x$
(f) $y = -5x - 3$

5 Bereken die waarde van k gegewe dat die lyn wat:

(a) R(0; 4) tot Q(3; k) verbind, 'n gradiënt van 2 het.
(b) A(–3; k) tot B(–1; –3) verbind, 'n gradiënt van –4 het.

6 Die eindpunte van lynsegment ST is S(8; 1) en T(6; c). Die middelpunt van SR is M(d; –3). Bereken die waardes van c en d.

7 M is die middelpunt van AB. Bereken die koördinate van B, as A (3;1) is en M (10; –3) is.

10 SIRKELS, HOEKE, EN HOEKBEWEGING

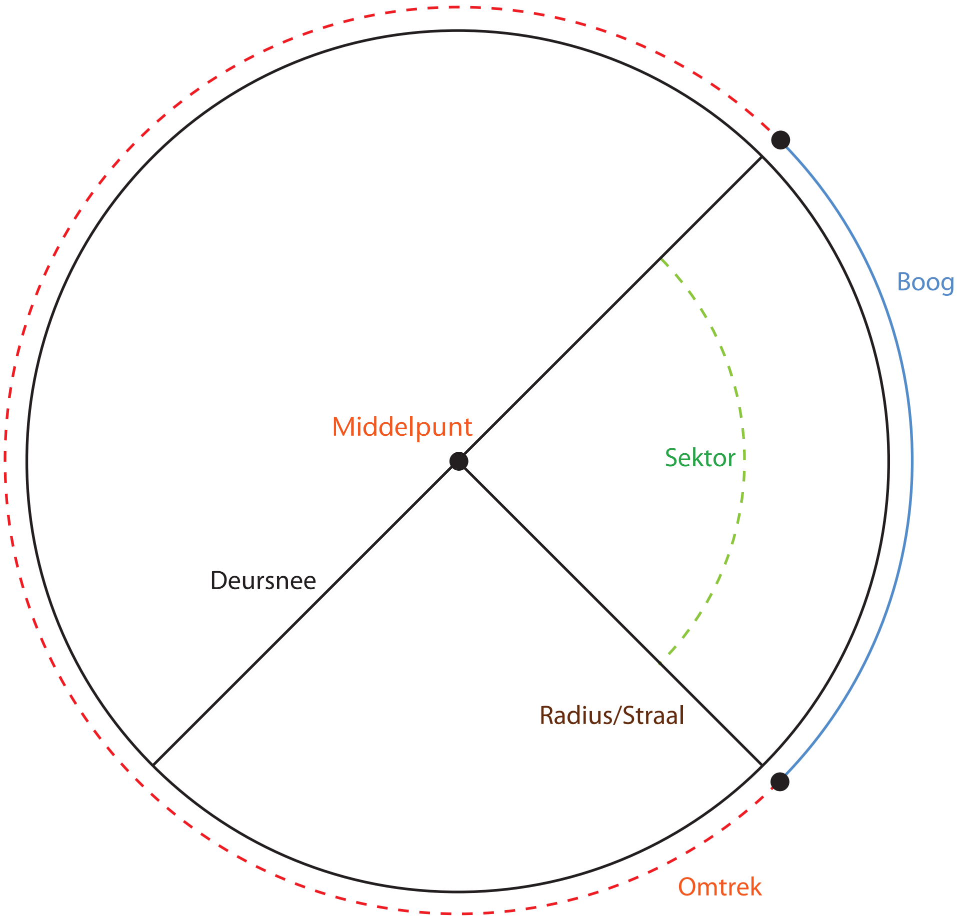
Tot dusver het jy grade gebruik om hoeke te meet.

In hierdie hoofstuk gaan jy leer:

- hoe om hoeke te meet deur radiale te gebruik
- hoe om die booglengte van 'n sirkel te vind
- hoe om omskakeling tussen grade en radiale te doen
- hoe om omskakeling tussen desimale en grade-minute-sekonde van hoeke te doen

10.1 Maak gereed om te leer

Dele van 'n sirkel:



Omtrek	Die lengte rondom die hele rand van 'n sirkel word die omtrek genoem. Die lengte van die omtrek van 'n sirkel is gelyk aan die radius van die sirkel twee keer vermenigvuldig met die waarde van *pi* ($O = 2\pi r$ of $D\pi$).
Deursnee	'n Reguitlyn van een punt op die omtrek deur die middelpunt van die sirkel na die oorkantste punt op die omtrek, word die deursnee (diameter) genoem.
Radius/Straal	'n Lynsegment wat die middelpunt van die sirkel met 'n punt op die omtrek van die sirkel verbind, word die radius genoem. Die deursnee (diameter) is twee keer die lengte van die radius van 'n sirkel.
Boog	Deel van die omtrek van 'n sirkel word 'n boog genoem.
Sektor	Deel van die sirkel wat tussen twee radiusse van 'n sirkel en hulle onderspande boog lê; 'n sektor van die sirkel.
Sentrale hoek	'n Sentrale hoek is 'n positiewe hoek waarvan die hoekpunt by die middelpunt van die sirkel is.
Standaard posisie van 'n hoek	Ons meet hoeke op 'n sirkel deur by die positiewe horisontale as te begin en antikloksgewys te beweeg, tensy anders aangedui.

10.2 Hersiening van *pi* (π)

Pi word in baie wiskundige berekeninge gebruik. In die vorige grade het jy van *pi* gepraat en dit gebruik wanneer jy berekeninge moes maak wat sirkels insluit. Jy is heel moontlik gesê dat die waarde van π 3,14 is, of $\frac{22}{7}$ wanneer dit as 'n breuk uitgedruk word. Die oefening hieronder is bedoel om vir jou 'n beter begrip te gee van hierdie getal wat ons π noem.

Oefeninge

1 (a) Gebruik verskillende voorwerpe met ronde dwarsdeursneë (bv. 'n blikkie, 'n CD, ens.). Neem 'n lengte tou en meet die deursnee en omtrek van elkeen van die sirkulêre dwars deursneë van hierdie voorwerpe noukeurig. Plaas die toutjie langs die liniaallengte af en bepaal die lengte wat jy met die toutjie gemeet het. Skryf jou resultate in die toepaslike kolomme hieronder. Gebruik jou sakrekenaar om die verhouding omtrek:deursnee $\left(\frac{\text{omtrek}}{\text{deursnee}}\right)$ te bereken, en teken die resultate aan in die laaste kolom. Probeer om so akkuraat as moontlik te wees; jy hoef egter nie presiese resultate neer te skryf nie, omdat jy nie die presiese meetinstrumente gebruik nie.

(b) Teken die tabel in jou oefeningboek oor en volg dan die instruksies wat hieronder gegee word:

Sirkel	Radius (cm)	Deursnee	Omtrek	$\frac{\text{Omtrek}}{\text{Deursnee}}$
A	3			
B	4			
C	5			
D	6			
E	7			
F	8			
G	9			

Instruksie vir die meting van die omtrek en die deursnee:

- Neem 'n stukkie tou en plaas die punt daarvan bo-op die sirkel. Vou die toutjie reg rondom die rand van die hele sirkel (sy omtrek).
- Merk die punt waar dit die begin van die toutjie by die bopunt van die sirkel ontmoet.

2154 TechMaths Afr G10 LB.indb 335 2015/11/25 4:14 PM

- Tel die toutjie op nadat jy dit gemerk het, maak dit reguit, en sny dit op die merk af. Dit gee vir jou die omtrek van die sirkel.
- Meet die stukkie tou in sentimeter met jou liniaal.

Die verhouding van die omtrek van 'n sirkel tot sy deursnee word ***pi*** (π) genoem.
$\pi = \frac{\text{omtrek}}{\text{deursnee}}$ is 'n **konstante verhouding.**

(c) Wat kan jy sê omtrent die berenkende waardes van $\frac{\text{omtrek}}{\text{deursnee}}$ vir die drie sirkels?

(d) Bereken die gemiddelde waarde vir die waardes in die $\frac{\text{omtrek}}{\text{deursnee}}$ kolom.

(e) Is die waarde van *pi* afhanklik van die grootte van die sirkel? Verduidelik.

Eienskappe wat dieselfde bly wanneer ander kenmerke verander, word **konstant** genoem.

2 Ons kan die formules $C = \pi d$ of $C = 2\pi r$ gebruik om die omtrek van 'n sirkel te bereken.

(a) Maak π die onderwerp van die formule in elke formule.

(b) Gebruik jou formules om die waarde van π vir elk van die volgende te bereken:

(i) $C = 15{,}71$; $r = 2{,}5$

(ii) $C = 83{,}6$; $r = 13{,}3$

(iii) $C = 53{,}7$; $d = 17{,}1$

(iv) $C = 62{,}8$; $d = 20$

Die volgende formules hou verband met die omtrek, die deursnee en die radius van 'n sirkel:

deursnee = 2 × radius

omtrek = $2\pi r$ of $D\pi$

(c) Hoe naby is die waardes van π wat jy in oefening 2 (b) hierbo bereken het, aan die waardes wat jy in oefening 1 bereken het?

3 Gebruik $\pi = 3{,}14$ in jou berekeninge.

(a) Wat is die omtrek van 'n wiel met 'n deursnee van 60 cm?

(b) Die radius van 'n sirkel is 3 cm. Bereken sy omtrek.

(c) Indien jy reg rondom 'n sirkelvormige sportgrond met 'n radius van 50 meter stap, hoe vêr het jy gestap?

(d) Jy moet 'n rubber pyp sny om 'n staaf te bedek wat in 'n sirkel vorm met 'n deursnee van 1 500 mm gebuig gaan word. Hoeveel rubber moet jy sny?

2154 TechMaths Afr G10 LB.indb 336 2015/11/25 4:14 PM

10.3 Meting van hoeke: Grade (°)

Jy het in vorige grade hoeke gemeet deur draaie, omwentelings, en grade te gebruik. Jy het heel moontlik ook geleer dat 'n omwenteling 'n meting van 360° het.

Oefeninge

4 Deel 'n sirkel op in 'n gelyke aantal segmente, soos in die tabel hieronder aangedui. Teken die tabel oor en voltooi.

	Aantal gelyke segmente	Die hoek van elke segment
(a)	2	
(b)	4	
(c)	5	
(d)	6	
(e)	9	
(f)	12	

	Aantal gelyke segmente	Die hoek van elke segment
(g)	20	
(h)	30	
(i)	40	
(j)	90	
(k)	120	
(l)	360	

5 (a) Teken die tabel oor en voltooi:

Woorde	Aantal omwentelinge	Aantal grade
Geen draai	0	
Kwart draai		
Halwe draai		
Driekwart draai		
Volle draai		
Twaalfde van 'n draai		
Agste van 'n draai		
Sesde van 'n draai		
Vyfde van 'n draai		

(b) Hoe skakel ons omwentelinge om na grade?

Uit oefening 4 kan ons aflei dat 'n hoek van 1° gelyk is aan $\frac{1}{360}$ (een driehonderd-en-sestigste) van 'n omwenteling.

2154 TechMaths Afr G10 LB.indb 337 2015/11/25 4:14 PM

In hierdie afdeling gaan ons leer hoe om grade te onderverdeel deur middel van

- desimale notasie
- minute en sekondes

’n Hoek van 1° is ekwivalent aan 60 minute. Ons stel 60 minute voor as 60'. $1° = 60'$
Dus, is 1 minuut, geskryf as 1', is ekwivalent aan $\frac{1}{60}$ (een sestigste) van ’n hoek van 1°.
Daar is 60 sekondes in ’n minuut. Ons stel 60 sekondes voor as 60".
Een sekonde (1") is $\frac{1}{60}$ (een sestigste) van ’n minuut en $\frac{1}{3\,600}$ (een drieduisend-seshonderdste) van ’n hoek van 1°.

Uitgewerkte voorbeeld **Omskakeling van desimale grade notasie tot grade-minute-sekonde notasie**

Probleem: Skakel 130,831°om tot grade-minute-sekonde.

Oplossing:

Vermenigvuldig 0,831 met 60 om 49,89' te kry

$$130{,}831° = 130° + (0{,}831 \times 60)$$

$$= 130° + 49{,}86'$$

Vermenigvuldig 0,86' met 60 om 52" te kry

$$= 130° + 49' + (0{,}86' \times 60)$$

$$= 130°49'52"$$

Oefening

6 Skakel elke hoek om na grade-minute-sekonde vorm.

(a) 120,534° (b) 97,568° (c) 33,234° (d) 40,987°

(e) 238,123° (f) 3031303° (g) 107,5° (h) 342,05°

Uitgewerkte voorbeeld **Omskakeling van grade-minute-sekonde notasie tot desimale grade notasie**

Probleem: Skryf 28°45'33" slegs in terme van grade.

28°45'33" is ’n kort manier om 28 grade, 45 minute, en 33 sekondes te skryf.

Oplossing: $28°45'33" = \left(28 + \frac{45}{60} + \frac{33}{3\,600}\right)° \approx 28{,}759°$

Oefening

7 Skakel elke hoek om na desimale grade. Gee jou antwoorde korrek tot drie desimale plekke.

(a) 100°11’30”
(b) 89°60’60”
(c) 203°89’
(d) 28°14’45”
(e) 302°23’44”

Gebruik die sakrekenaar

Ons kan ook ’n sakrekenaar gebruik om tussen desimale grade en die grade-minute-sekonde ekwivalent om te skakel.

Kyk of jy die knoppie kan vind wat jy kan gebruik om tussen desimale grade en grade-minute-sekonde om te skakel op jou sakrekenaar.

Oefening

8 Doen weer oefening 6, maar gebruik nou jou sakrekenaar.

9 Doen weer oefening 7, maar gebruik nou jou sakrekenaar.

Radiaal meting (rad)

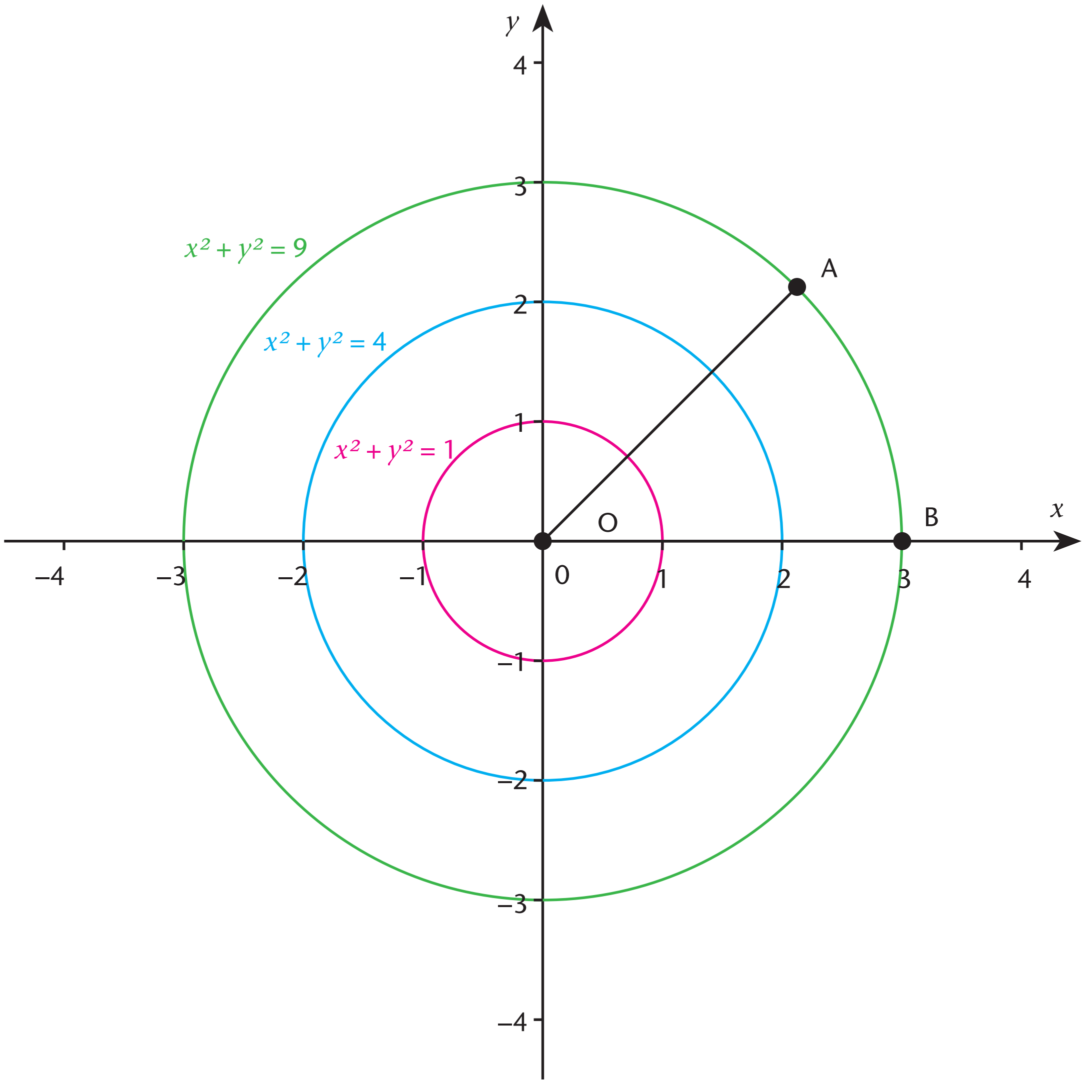
In hierdie afdeling gaan jy van nog ’n eenheid wat hoeke meet, leer. Ons noem dit die radiaal. Die idee is om die lengte van ’n boog te meet wat onderspan is deur ’n hoek gesentreer by sy hoekpunt.

Die oefening hieronder is bedoel om jou te help om sin te maak van hierdie eenheid van meting.

Konsentriese sirkels is sirkels met dieselfde middelpunt, maar verskillende radiusse.

Oefening

10 Bestudeer die volgende konsentriese sirkels:



Kom ons ondersoek die radius, die boog, en sentrale hoek van die konsentriese sirkels hierbo.

(a) Neem 'n toutjie en meet die radius van al drie sirkels. Teken die waardes aan in die tabel hieronder.

(b) Met dieselfde toutjie, meet die lengte van elke boog onderspan deur die sentrale hoek $A\hat{O}B$ vir elke sirkel. Teken die tabel in jou oefening boek oor en voltooi.

sirkel	radius	omtrek	$\frac{\text{radius}}{\text{omtrek}}$	booglengte	$\frac{\text{booglengte}}{\text{radius}}$
Rooi					
Blou					
Groen					

(c) Bereken die waardes vir die laaste kolom.

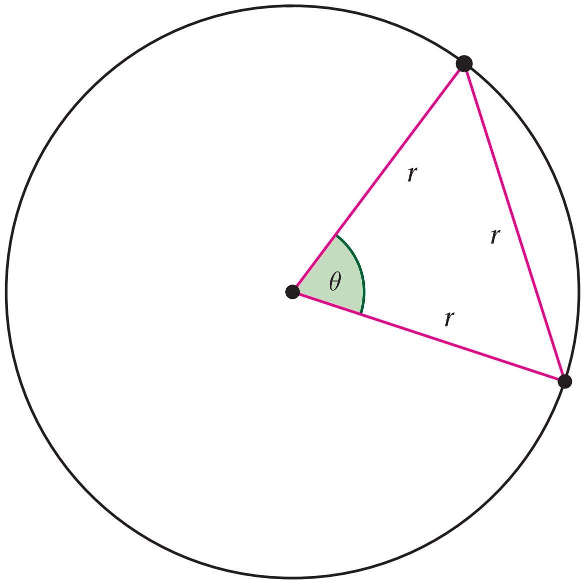
(d) Skryf neer wat jy opmerk in terme van:

(i) die verhouding tussen die radiusse en die booglengte;

(ii) die verhouding tussen die booglengte en die radius.

(e) Kan jy agterkom wat die grootte van die sentrale hoek is sonder om dit te meet?

(f) Meet die grootte van die sentrale hoek met jou gradeboog. Wat neem jy waar?



Definieer die radiaal

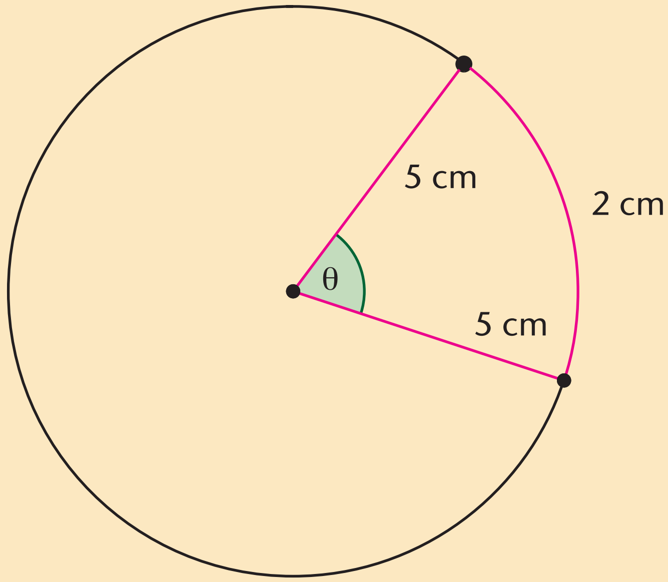
Ons dink aan 'n **radiaal** as die meting van 'n sentrale hoek wat 'n boog onderspan met 'n lengte gelyk aan die sirkel se radius.

Die verhouding van die booglengte tot die radius van die sirkel:

- Hoek $(\theta) = \dfrac{\text{booglengte } (s)}{\text{radius } (r)}$ (s en r moet in dieselfde metingseenheid uitgedruk word).
- Algebraïes skryf ons $\theta = \dfrac{s}{r}$, waar θ in radiale is.
- Die aantal radiusse wat in 'n bepaalde boog kan inpas.

Uitgewerkte voorbeeld

Probleem: Wat is die grootte (in radiale) van die sentrale hoek (θ), wat 'n boog met lengte 2 cm, onderspan met 'n radius van 5 cm?



Oplossing: hoek (θ) = $\frac{\text{booglengte } (s)}{\text{radius } (r)}$

$$\theta = \frac{s}{r}$$

$$\theta = \frac{2\text{ cm}}{5\text{ cm}} = 0{,}4\text{ rad}$$

Oefening

11 In die volgende, bepaal die meting van 'n sentrale hoek wat 'n boog onderspan.

(a) Wat is die radiaalmeting van 'n sentrale hoek θ wat 'n boog met lengte 10 cm op 'n sirkel met radius 5 cm onderspan?

(b) Wat is die radiaalmeting van 'n sentrale hoek θ wat 'n boog met lengte 30 cm op 'n sirkel met radius 5 cm onderspan?

(c) Wat is die radiaalmeting van 'n sentrale hoek θ wat 'n boog met lengte 10 cm op 'n sirkel met radius 4 cm onderspan?

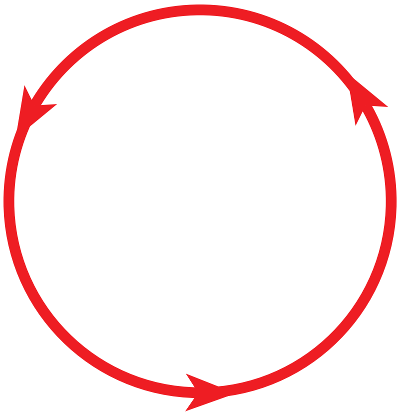
(d) Wat is die radiaalmeting van 'n sentrale hoek θ wat 'n boog met lengte 16 cm op 'n sirkel met radius 4 cm onderspan?

(e) Wat is die radiaalmeting van 'n sentrale hoek θ wat 'n boog met lengte 40 cm op 'n sirkel met radius 40 cm onderspan?

10.4 Omskakeling van grade na radiale

Wanneer ons wil omskakel van grade na radiale, of van radiale na grade, kan ons ’n eenheid omskakelingsfaktor gebruik.

Ons lees 2π rad as 2 *pi* radiale. Wat ons hiermee bedoel, is dat daar 2π radiale in ’n omwenteling is. Ons kan die stelling hierbo ook uitdruk as: 2π rad = 360°.



Ons weet dat die omtrek van ‘n sirkel bereken word deur gebruik te maak van die formule $C = 2\pi r$.

Ons weet ook dat die omtrek dieselfde is as die volle lengte van die hele boog van die sirkel, wat gelykstaande is aan een omwenteling.

Die ekwivalente grade van 1 radiaal, is:

$$1 \text{ rad} = \frac{360°}{2\pi} = \frac{180°}{\pi} = 57{,}296°$$

Die ekwivalente radiale vir 1° is:

$$1° = \frac{2\pi}{360°} = \frac{\pi}{180°} \text{ rad}$$

Om van radiale na grade om te skakel, vermenigvuldig ons radiale met	Om van grade na radiale om te skakel, vermenigvuldig ons grade met
$\frac{180°}{\pi}$	$\frac{\pi}{180°}$

Uitgewerkte voorbeelde

A. **Probleem:** Druk $\frac{2\pi}{3}$ uit in terme van grade.

Oplossing: $\frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \times \frac{180°}{\pi}$

$= 120°$

B. **Probleem:** Skakel 20°om na radiale

Oplossing: $20° = 20° \times \frac{\pi}{180°} = \frac{\pi}{9}$ rad

Oefeninge

12 Herskryf die volgende hoeke in grade (moenie ’n sakrekenaar gebruik nie).

(a) $\frac{7\pi}{4}$ (b) $\frac{9\pi}{12}$ (c) $\frac{\pi}{90}$ (d) 4π

(e) 2π (f) π (g) $\frac{3\pi}{4}$ (h) $\frac{11\pi}{18}$

(i) $\frac{\pi}{2}$ (j) $\frac{3\pi}{5}$ (k) $\frac{4\pi}{15}$ (l) $\frac{6\pi}{5}$

(m) $\frac{7\pi}{10}$ (n) $\frac{\pi}{9}$ (o) $\frac{13\pi}{12}$

13 Herskryf die volgende hoeke in radiale (moenie ’n sakrekenaar gebruik nie).

(a) 30° (b) 150° (c) 310° (d) 105°

(e) 45° (f) 180° (g) 330° (h) 12°

(i) 60° (j) 210° (k) 345° (l) 78°

(m) 75° (n) 225° (o) 157° (p) 94°

(q) 120° (r) 240° (s) 0° (t) 131°

14 Teken die tabel oor en vul die ekwivalente hoek mate in.

Grade meting	0°	1°	
Radiale meting			1 rad

15 Teken die tabel oor en voltooi deur die ekwivalente radiale waardes in te vul.

Veelvoude van 30° en $\frac{\pi}{6}$		**Veelvoude van 45° en $\frac{\pi}{4}$**		**Veelvoude van 60° en $\frac{\pi}{3}$**		**Veelvoude van 90° en $\frac{\pi}{2}$**	
grade	**radiale**	**grade**	**radiale**	**grade**	**radiale**	**grade**	**radiale**
30°		45°		60°		90°	
60°		90°		120°		180°	
90°		135°		180°		270°	
120°		180°		240°		360°	
150°		225°		300°			
180°		270°		360°			
210°		315°					
240°		360°					
270°							
300°							
330°							
360°							

16 Tel die volgende bymekaar op en gee die antwoorde in grade:

(a) $\frac{\pi}{4} + \pi + \frac{2\pi}{3}$ (b) $2\pi - \frac{5\pi}{4}$ (c) $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$

(d) $\frac{11\pi}{18} + \frac{\pi}{9}$ (e) $\frac{5\pi}{4} + 30°$ (f) $45° + \frac{\pi}{4}$

(g) $2\pi - \frac{\pi}{9} - 120°$ (h) $\pi - 140° + 80°$ (i) $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}$

17 Bereken of vereenvoudig die volgende sonder om jou sakrekenaar te gebruik:

(a) $\sin\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{4}$ (b) $\tan\frac{\pi}{4} - 1$

(c) $\cos\frac{\pi}{2} - \cos\frac{\pi}{3}$ (d) $\sin 45° = \tan\frac{3\pi}{4}$

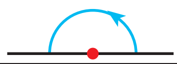
(e) $\cos 0° + \sin\frac{3\pi}{2} - \tan\frac{5\pi}{4}$

18 Bepaal die waarde van die volgende (antwoorde moet in radiale gegee word):

(a) $\sin^{-1}(0{,}5) + \cos^{-1}(0{,}866) + \tan^{-1}(0{,}577)$ (b) $\sin^{-1}(\frac{1}{\sqrt{2}}) + \tan^{-1}(-1) + \cos^{-1}(0)$

(c) $\cos^{-1}(-1) - \sin^{-1}(-1)$ (d) $\tan^{-1}(1) - \sin^{-1}(1)$

19 Voltooi die volgende omskakelings:

Omwenteling	Grade	Radiale	Rowwe skets
1			
	180°		
	32°		
$\frac{1}{4}$			
		$\frac{2\pi}{3}$	
$\frac{1}{12}$			
	40°		
$\frac{1}{6}$			

20 Voltooi die volgende praktiese ondersoeke:

(a) Twee ratte draai in die rondte. Die kleiner rat het 'n radius van 10 cm en die groter rat se radius is 18 cm. Wat is die hoek waardeur die groter rat gedraai het toe die kleiner rat reeds een omwenteling voltooi het?

(b) 'n Kleiner rat en 'n groter rat is ingekam. 'n 80° omwenteling van die kleiner rat veroorsaak dat die groter rat deur 50° roteer. Vind die radius van die groter rat indien die kleiner rat 'n radius van 11,7 cm het.

2154 TechMaths Afr G10 LB.indb 345 2015/11/25 4:14 PM

(c) Bereken die hoek in radiale waardeur ’n katrol met deursnee van 0,6 m beweeg indien die lengte van ’n band van 120 m oor die katrol beweeg.

(d) ’n Pad wiel met radius van 5 600 mm draai deur ’n hoek van 150°. Bereken die afstand wat ’n punt op die wiel se loopvlak sal beweeg.

(e) Vind die radius van die katrol indien ’n omwenteling van 51,16° ’n gewig met 15,4 cm lig.

(f) ’n Tou word om ’n drom met radius 0,3 m gedraai. Hoeveel tou sal rondom die drom gedraai wees indien die drom deur ’n hoek van 39,72° roteer?

(g) ’n Sirkel het ’n radius van 20 cm. Vind die lengte van die boog wat onderspan is deur ’n sentrale hoek waarvan elk die volgende mate het.

(i) $\frac{3\pi}{8}$ (ii) 144°

10.5 Opsomming

- **Omtrek**: Die lengte rondom die hele rand van ’n sirkel word sy omtrek genoem.
- Die lengte van die omtrek van ’n sirkel is gelyk aan die radius van die sirkel vermenigvuldig met twee keer die waarde van *pi* ($C = 2\pi r$).
- ’n **Deursnee**: ’n Reguit lyn wat van een kant van ’n sirkel deur die middelpunt, na die teenoorgestelde punt op die omtrek loop.
- ’n **Radius**: ’n Lynsegment wat die middelpunt van ’n sirkel verbind aan ’n punt op die omtrek van ’n sirkel. Die deursnee van ’n sirkel is twee keer die lengte van die radius.
- ’n **Boog**: Gedeelte van die omtrek van ’n sirkel.
- ’n **Segment**: Deel van ’n sirkel omsluit deur twee radiusse van ’n sirkel en hulle onderspande boog; ’n skyf van die sirkel.
- **Sentrale hoek**: ’n Sentrale hoek is ’n positiewe hoek waarvan die hoekpunt by die middelpunt van ’n sirkel is.
- **Standaard posisie van ’n hoek**: Ons meet hoeke op ’n sirkel beginnende by die positiewe horisontale as en beweeg antikloksgewys, tensy anders aangedui.
- Ons kan tot die gevolgtrekking kom dat die volgende formules verband hou met die omtrek, deursnee, en radius van ’n sirkel:
  - omtrek $= \pi \times$ deursnee
  - deursnee $= 2 \times$ radius
  - omtrek $= 2\pi r$
- Hoeke kan gemeet word deur verskillende eenhede soos omwentelinge en grade. ’n **Omwenteling** het ’n meting van 360°. ’n Hoek van 1° is (een drie-honderd-en-sestigste) van ’n omwenteling. Grade kan verder opgedeel word deur gebruik te maak van:
  - desimale notasie
  - minute en sekondes

- **Konsentriese sirkels** is sirkels met dieselfde middelpunt, maar verskillende radiusse.
- Ons kan dink aan 1 rad **(radiaal)** as die meting van 'n sentrale hoek wat onderspan word deur 'n booglengte gelyk aan die radius van die sirkel..
- Die verhouding van die booglengte tot die radius van die sirkelhoek: $(\theta) = \frac{\text{booglengte } (s)}{\text{radius } (r)}$ (s en r moet in dieselfde eenheid voorgestel word). Algebraïes skryf ons $\theta = \frac{s}{r}$, waar θ in radiale is.
- Om van radiale na grade om te skakel, vermenigvuldig ons radiale met $\frac{180°}{\pi}$.
- Om van grade na radiale om te skakel, vermenigvuldig ons grade met $\frac{\pi}{180°}$.

10.6 Konsolideringsoefeninge

1 Gebruik $\pi = 3{,}14$ in jou berekeninge.

(a) Wat is die omtrek van 'n wiel met 'n deursnee van 80 cm?

(b) 'n Atleet hardloop twee en 'n half keer om 'n veld met 'n radius van 80 m. Hoe vêr het die atleet gehardloop?

(c) 'n Argitek ontwerp 'n sirkelvormige (ronde) gebou met 'n omtrek van 12 km. Wat sal die deursnee van hierdie gebou wees? (Gee jou antwoord in meter.)

2 Skakel die volgende om na grade-minute-sekonde vorm:

(a) 89,658° (b) 126,25° (c) 256,02°

(d) 50,123° (e) 330,256° (f) 111,11°

3 Skakel die volgende om na desimale grade:

(a) 25°22'40" (b) 69°64'89" (c) 150°55'55"

(d) 323°14'69" (e) 5°30'30" (f) 254°59'23"

4 Vind die meting van 'n sentrale hoek wat 'n boog onderspan vir elk van die volgende:

(a) Wat is die radiaalmeting van 'n sentrale hoek θ wat 'n booglengte van 21 cm op 'n sirkel met 'n radius van 7 cm onderspan?

(b) Wat is die radiaalmeting van 'n sentrale hoek θ wat 'n booglengte van 42 cm op 'n sirkel met 'n radius van 7 cm onderspan?

(c) Wat is die radiaalmeting van 'n sentrale hoek θ wat 'n booglengte van 14 cm op 'n sirkel met 'n radius van 7 cm onderspan?

(d) Wat is die radiaalmeting van 'n sentrale hoek θ wat 'n booglengte van 12 cm op 'n sirkel met 'n radius van 4 cm onderspan?

2154 TechMaths Afr G10 LB.indb 347 2015/11/25 4:14 PM

(e) Wat is die radiaalmeting van ’n sentrale hoek θ wat ’n booglengte van 28 cm op ’n sirkel met ’n radius van 4 cm onderspan?

(f) Wat is die radiaalmeting van ’n sentrale hoek θ wat ’n booglengte van 8 cm op ’n sirkel met ’n radius van 7 cm onderspan?

5 Skakel die volgende hoeke om na grade (moenie ’n sakrekenaar gebruik nie).

(a) $\frac{5\pi}{2}$ (b) $\frac{12\pi}{9}$ (c) $\frac{\pi}{45}$

(d) $\frac{3\pi}{14}$ (e) 5π (f) $\frac{25\pi}{18}$

6 Skakel die volgende hoeke om na radiale (moenie ’n sakrekenaar gebruik nie).

(a) $52°$ (b) $12°$ (c) $158°$

(d) $325°$ (e) $21°$ (f) $264°$

7 Voeg die volgende bymekaar en gee die antwoord in grade:

(a) $\frac{3\pi}{2} + 2\pi - \frac{\pi}{3}$ (b) $\frac{5\pi}{2} + \frac{6\pi}{3} - \frac{\pi}{5}$ (c) $6\pi - 15° + \frac{4\pi}{3}$

(d) $\frac{12\pi}{15} + \frac{\pi}{8} - 60°$ (e) $3\pi - \frac{\pi}{25}$ (f) $\frac{2\pi}{3} - \frac{2\pi}{5}$

8 Voltooi die volgende praktiese ondersoeke:

(a) Twee ratte draai in die rondte. Die kleiner rat het ’n radius van 17 cm en die groter rat se radius is 25 cm. Wat is die hoek waardeur die groter rat gedraai het toe die kleiner rat een omwenteling voltooi het?

(b) ’n Kleiner rat en ’n groter rat is ingekam. ’n 95° omwenteling van die kleiner rat veroorsaak dat die groter rat om 65° roteer. Vind die radius van die groter rat indien die kleiner rat ’n radius van 18,5 cm het.

(c) Bereken die radiaalhoek waardeur ’n katrol met deursnee van 2,3 m beweeg indien die lengte van ’n band van 120 m oor die katrol beweeg.

(d) ’n Pad wiel met radius van 8 500 mm draai deur ’n hoek van 170°. Bereken die afstand wat by ’n punt op die wiel se loopvlak beweeg word.

(e) Vind die radius van die katrol indien ’n rotasie van 58,28° die gewig 23,4 cm lig.

(f) ’n Tou word om ’n drom met radius 0,7 m gedraai. Hoeveel tou sal rondom die drom gedraai wees indien die drom deur ’n hoek van 44,72° roteer?

(g) ’n Sirkel het ’n radius van 35 cm. Vind die lengte van die boog wat onderspan word deur ’n sentrale hoek waarvan elk die volgende mate het.

(i) $\frac{3\pi}{8}$ (ii) $144°$

11 FINANSIES EN GROEI

Hierdie hoofstuk fokus op die bestedings- en beleggingswaarde van geld.

In hierdie hoofstuk sal jy leer:

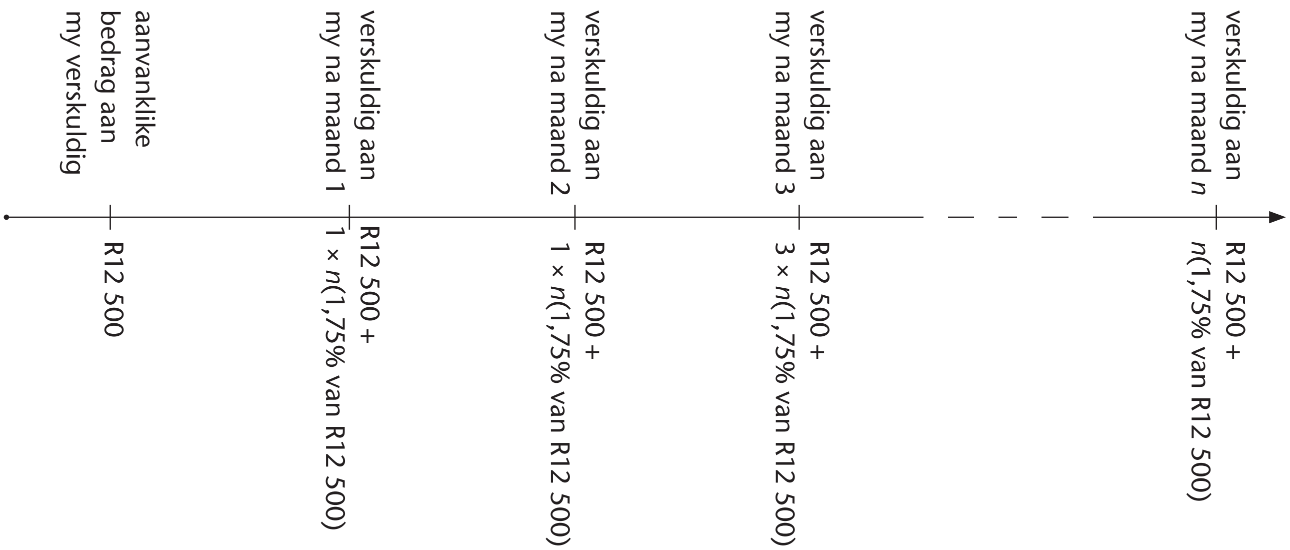
- hoe om enkelvoudige rente te bereken
- hoe om saamgestelde rente te bereken
- hoe om verskillende beleggings te vergelyk
- huurkoop
- inflasie en sy effek
- wisselkoerse en hulle effek

11.1 Belegging deur enkelvoudige rente

Situasie: Mimi se vriend, Modiba, 'n ervare bouer, wil sy eie konstruksiebesigheid begin. Hy het wel 'n bietjie spaargeld, maar benodig ekstra geld om toerusting mee aan te koop.

Hy vra Mimi om R12 500 in sy besigheid te belê. Hy beloof om haar terug te betaal sodra sy besigheid goed aan die gang is. Nadat hulle berekeninge gemaak het, stel hulle 'n kontrak op om te bepaal hoe hy haar sal terugbetaal. Hulle kom ooreen dat totdat die skuld vereffen is, hy haar ook nog 1,75% rente elke maand op die uitstaande bedrag sal betaal. Teen die tyd wanneer hy haar terugbetaal, sal hy R12 500 skuld, plus die rente tot op die einde van die lopende maand. Mimi vertrou Modiba heeltemal en weet dat hy haar sal terugbetaal wanneer hy die geld tot sy beskikking het.

Vanuit Mimi se oogpunt, belê sy R12 500 om Modiba se besigheid aan die gang te sit. Sy stel vir haarself 'n **tydlyn** ('n getallelyn vir tyd) op om die situasie voor te stel:



Finale waarde van Mimi se belegging = R 12 500 + *totale rente*

$$= \text{R}12\,500 + \text{R}12\,500 \times \frac{1{,}75}{100} \times \textit{aantal maande}$$

$$= \text{R}12\,500 \times \left(1 + \frac{1{,}75}{100} \times \textit{aantal maande}\right)$$

Kom ons gebruik 'n aantal simbole vir die verskillende kwantiteite in ons voorbeeld:

- A finale totale waarde van die belegging (genoem **opgehoopde waarde**)
- P oorspronklike bedrag belê (genoem die **hoofwaarde**)
- i **rentekoers** per tydeenheid, hier per maand, uitgedruk as 'n desimale breuk
- n **Aantal eenhede van tyd**, hier aantal maande, waarvoor rente bereken word

2154 TechMaths Afr G10 LB.indb 350 2015/11/25 4:14 PM

Dit lei ons na die formule en behoorlike definisie van enkelvoudige rente:

Enkelvoudige rente word slegs op die hoofwaarde bereken:
$A = P(1 + in)$
Die totale rente word aangegee deur $A - P = Pin$

Waar word enkelvoudige rente gebruik? Gewoonlik in situasies waar dit belangrik is om sake maklik verstaanbaar te hou:

- Informeel, vir privaat lenings tussen individue; finansiële instellings soos banke gebruik gewoonlik saamgestelde rente – sien volgende afdeling.
- Voetsoolvlak gemeenskapsbanke waar lenings eenvoudig opgestel word om begrip te fasiliteer.
- Staatseffekte, wat in wese eintlik net lenings deur individue aan die regering is; die regering waarborg dat dit 'n bepaalde rentekoers op vasgestelde datums sal betaal.
- Huurkoop.
- In situasies waar rente gedurende die leentydperk uitbetaal word en nie aan die einde nie, byvoorbeeld as Modiba elke maand die rente aan Mimi betaal, in plaas daarvan dat hy dit aan die einde van die transaksie betaal.

Oefeninge

1 Mimi betaal die R12 500 in Modiba se besigheidsrekening in op 1 Maart.

Mimi trek die volgende tabel vir Modiba op, wat wys hoeveel hy elke maand vir die eerste jaar skuld:

Indien jy terug betaal op	n, aantal maande wat dit jou neem om my terug te betaal	$A - P$, die totale bedrag rente wat jy my skuld (tot die naaste sent)	A, die totale bedrag wat jy my skuld (tot die naaste sent)
1 Maart 2015	0	R0	R12 500
1 April 2015	1		
1 Mei 2015	2		
1 Junie 2015	3		
1 Julie 2015	4	R875	R13 375
1 Augustus 2015	5		
1 September 2015	6		
1 Oktober 2015	7		
1 November 2015	8		
1 Desember 2015	9		
1 Januarie 2016	10	R2 187,50	R14 687,50
1 Februarie 2016	11		
1 Maart 2016	12		

Teken die tabel oor in jou oefeningboek en bereken die bedrae wat nie ingevul is nie. Sommige van die bedrae is ingevul sodat jy kan seker maak dat jy die berekeninge verstaan.

(a) Beskryf in jou eie woorde hoe die bedrag wat Modiba aan Mimi skuld, van maand tot maand verskil. Gebruik die simbole P en i om die uitdrukking neer te skryf wat die verskil verduidelik

(b) Wat is die totaal, d.i. die effektiewe rentekoers wat Modiba na drie maande betaal? En na ses maande? Na een jaar? Gee jou antwoord as persentasies.

Wenk: Bereken die persentasie vermeerdering van die opgehoopde waarde in vergelyking met die hoofwaarde vir elk van hierdie drie tye.

(c) Gebruik grafiekpapier om die volgende vraag te beantwoord: gebruik jou voltooide tabel om die totale bedrag wat Modiba elke maand skuld as ’n grafiek te teken. Die horisontale as is ’n tydlyn afgemerk in maande. Die vertikale as is in Rand. Watter soort grafiek het jy gekry? Behoort jy die punte met mekaar te verbind of net so laat?

(d) Kyk sorgvuldig na die formule vir enkelvoudige rente. Herskryf die formule in die standaardvorm vir ’n reguit lyn. Wys duidelik waar die gradiënt en waar die *A-afsnit* is.

(e) Die eerste ry vir Maart mag moontlik bietjie vreemd voorkom, omdat Mimi die totale rentebedrag elke maand verwag. Maak dit egter vir jou wiskundig sin? Hoe?

2 (a) Teken die volgende tabel oor en voltooi die getalpatroon. Die patroon wys die vermenigvuldigingsfaktor vir elke maand wat Modiba aan Mimi skuld:

Aantal maande totdat Modiba vir Mimi betaal	1	2	3	4	5	…	n
Vermenig-vuldiging faktor in algebraïese vorm	$1 + \frac{1,75}{100}$			$1 + 4 \times \frac{1,75}{100}$		…	
Vermenig-vuldiging faktor in desimale vorm	1,017 5		1,052 5			…	

(b) Gaan terug na vraag 1(c). Verstaan jy nou enige iets beter as tevore? Indien ja, beskryf wat jy opmerk.

Indien jy verstaan hoe die vermenigvuldigingsfaktor werk, het die formule vir enkelvoudige rente geen verdere geheime om vir jou weg te steek nie!

Uitgewerkte voorbeeld

Probleem: 'n Bedrag geld word teen 12% per jaar enkelvoudige rente belê. Na sewe jaar is die waarde van die belegging R23 920. Watter bedrag is aanvanklik belê?

Oplossing:

$$\begin{aligned} A &= P(1+in) \\ 23\,920 &= P(1+0{,}12\times 7) \\ \therefore P &= \frac{23\,920}{(1+0{,}12\times 7)} \\ &= \text{R}13\,000 \end{aligned}$$

$A = 23\,920$

$i = \frac{12}{100} = 0{,}12$

$P = ?$

$n = 7$

Uitgewerkte voorbeeld

Probleem: R6 000 is vir 30 maande belê teen enkelvoudige rente elke maand bereken. Die totale rente is R1 125. Wat is die maandelikse rente uitgedruk as 'n persentasie?

Oplossing 1: Deur die formule direk toe te pas

$$\begin{aligned} A &= P(1+in) \\ 7\,125 &= 6\,000(1+i\times 30) \\ \therefore 1+30i &= \frac{7\,125}{6\,000} \\ 30i &= \frac{7\,125}{6\,000} - 1 \\ i &= \frac{\frac{7\,125}{6\,000} - 1}{30} \\ &= 6{,}25\times 10^{-3} \end{aligned}$$

$A = 6\,000 + 1\,125 = 7\,125$

$P = 6\,000$

$i = ?$

$n = 30$

Derhalwe is die % rente = $100 \times i = 0{,}625\%$ per maand

Oplossing 2: Werk slim en gebruik die rente-deel van die formule.

$$\begin{aligned} 1\,125 &= 6\,000 \times i \times 30 \\ \therefore i &= \frac{1\,125}{6\,000\times 30} \end{aligned}$$

$A - P = 1\,125$

$P = 6\,000$

$i = ?$

$n = 30$

% rente is derhalwe = 0,625% per maand

Oefeninge

3 Fahrieda koop haar eerste motor. Die prys daarvan is R75 000. Sy het sopas begin werk nadat sy haar studies voltooi het en kan dit nie bekostig nie. Haar ouers bied aan om die motor vir haar te koop. Fahrieda glo dat sy, nadat sy vyf jaar gewerk het, spaargeld behoort te hê om haar ouers terug te betaal. Sy besluit dat sy enkelvoudige rente teen 6% p.j. sal byvoeg om op te maak vir inflasie (sien afdeling 11.5). Hoeveel sal sy haar ouers skuld?

4 Olebogeng het R5 000 belê teen enkelvoudige rente bereken per maand. Na 42 maande onttrek hy die totale waarde van sy belegging, R7 625. Wat was die maandelikse rente oor die termyn van die belegging?

5 Unathi vertel aan haar vriende dat sy ’n bietjie geld in ’n vriend se besigheid vir vier jaar belê het. Sy sê dat die jaarlikse enkelvoudige rente wat sy ontvang het R5 100 was, en dat die rentekoers 17% p.j. was.

(a) Wat was die bedrag wat sy oorspronklik belê het?

(b) Wat was die totale waarde van haar belegging na drie jaar?

6 Na ’n sekere aantal jare, het Gideon se belegging van R2 500 gegroei tot R2 972 (afgerond tot die naaste Rand) deur enkelvoudige rente, maandeliks bereken. Die jaarlikse rentekoers is 7,81%. Vir hoe lank het hy sy geld belê? Gee jou antwoord in jare en maande.

7 Cornelia koop ’n staatseffek ter waarde van R5 000. Enkelvoudige rente teen 3,25% word elke ses maande bereken. Die staatseffek kan na 30 maande opgeëis word.

(a) Hoeveel rente sal Cornelia elke ses maande ontvang?

(b) Watter totale bedrag sal sy vir rente ontvang?

8 Vergelyk die effek van verskillende enkelvoudige rentekoerse: Hiervoor het jy grafiekpapier nodig. Trek ’n tabel van n en A waardes vir $P = \text{R}1\ 000$ vir die situasies (a) tot (c) deur $n = 1$ tot 5 te gebruik:

(a) $i = 0{,}10$ (b) $i = 0{,}20$ (c) $i = 0{,}30$

Teken die stel punte op die grafiekpapier aan vir die drie situasies. Wat merk jy op? Verduidelik dit deur jou begrip van reguit lyngrafieke en liniêre funksies te gebruik.

9 Vergelyk die effek van verskillende beginsels: Jy sal grafiekpapier hiervoor nodig hê. Teken ’n tabel van n en A waardes vir $i = 0{,}20$ vir elk van die situasies (a) tot (c) deur $n = 1, 2, 3, \dots 5$ te gebruik:

(a) $P = \text{R}500$ (b) $P = \text{R}1\ 000$ (c) $P = \text{R}1\ 500$

Teken die stel punte vir die drie situasies op die grafiekpapier aan. Wat het jy opgemerk? Verduidelik dit deur jou begrip van reguit lyngrafieke en liniêre funksies te gebruik.

11.2 Belegging deur saamgestelde rente

Situasie weer bekyk: Modiba en Mimi kon tot 'n ander ooreenkoms gekom het met betrekking tot rente. In plaas van teen die einde van elke maand, kon die nuutste rente bereken word op die hele bedrag wat Modiba skuld tot en met die vorige maand en nie slegs op die R12 500 wat hy geleen het nie.

Wat beteken dit? Om vas te stel wat die totale bedrag is wat Modiba aan die einde van elke maand skuld, moes Mimi die volgende maand se rente bereken deur beide die hoofwaarde en die totale rente tot die einde van die vorige maand in berekening te bring:

totale bedrag einde van 'n maand = totale bedrag verskuldig einde van die vorige maand × (1 + *i*)

Waarom doen ons dit? Wel, omdat Modiba slegs die lening en die rente aan die einde van elke maand terugbetaal, kan Mimi redeneer dat hy eintlik ook die rente op die rente wat hy skuld kan betaal. Vanuit Mimi se oogpunt is elke bietjie rente wat Modiba nie dadelik aan haar betaal nie, 'n addisionele belegging van Mimi in Modiba se nuwe besigheid.

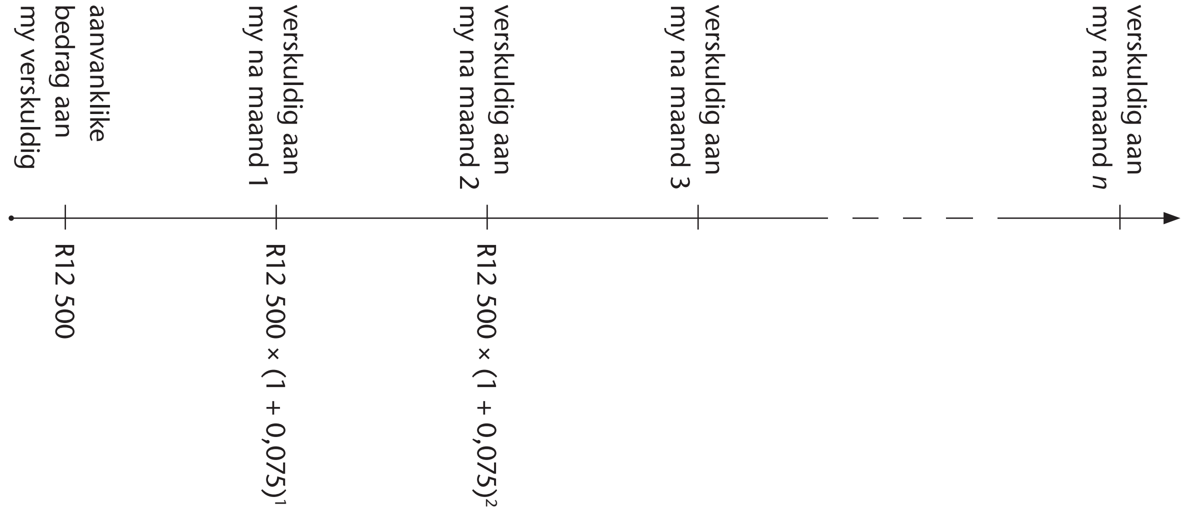
Oefening

10 (a) Wat is die desimale waarde vermenigvuldigingsfaktor, $(1 + i)$, wat Mimi elke maand moet gebruik?

(b) Trek die tabel hieronder in jou oefeningboek oor en voltooi dit. Dit is soortgelyk aan die tabel vir enkelvoudige rente in vraag 1 (a), behalwe dat jy die waardes volgens die benadering hierbo moet bereken. Let daarop dat kolomme 2 en 3 omgeruil is. Hoekom?

As jy my terugbetaal op	n -getal maande wat jy neem om my terug te betaal	A -die totale bedrag wat jy my skuld (tot die naaste sent)	$A - P$ -die totale rente wat jy my skuld (tot die naaste sent)
1 Maart 2015	0	R12 500	R0
1 April 2015	1		
1 Mei 2015	2		
1 Junie 2015	3		
1 Julie 2015	4	R13 398,24	R898,23
1 Augustus 2015	5		
1 September 2015	6		
1 Oktober 2015	7		
1 November 2015	8		
1 Desember 2015	9		
1 Januarie 2016	10	R14 868,06	R2 368,06
1 Februarie 2016	11		
1 Maart 2016	12		

(c) Teken die volgende tydlyn oor en voltooi:



(d) Beskryf in jou eie woorde hoe die bedrag wat Modiba aan Mimi skuld van maand tot maand verander. Gebruik simbole P en i, en skryf die uitdrukking neer wat die verandering aandui.

(e) Watter effektiewe persentasie rente betaal Modiba na drie maande? En na ses maande? Na een jaar?

Wenk: Bereken die persentasie toename van die opgehoopde waarde in vergelyking met die hoofwaarde vir elk van die drie tydperke.

(f) Om hierdie vraag te doen, sal jy grafiekpapier nodig hê. Gebruik jou voltooide tabel om die totale bedrag wat Modiba elke maand skuld as 'n grafiek voor te stel. Die horisontale as is 'n tydlyn gemerk in maande. Die vertikale as, is in Rand. Dink jy dat jy die punte met mekaar moet verbind of hulle net so los?

(g) Beskou die formule vir enkelvoudige rente noukeurig. Saamgestelde rente word as 'n vorm van eksponensiële verandering beskryf. Stem jy hiermee saam?

(h) Die eerste ry vir Maart mag moontlik 'n bietjie vreemd voorkom, omdat Mimi die totale rente vir elke maand verwag. Maak dit egter wiskundig sin? Hoe?

Die woord 'saamgestelde' beteken 'saam gevoeg'. Dit word **saamgestelde rente** genoem omdat die rente saamgevoeg is met die hoofwaarde op enige gegewe tydstip om die volgende opgehoopde waarde te bereken.

Saamgestelde rente

Rente word nie alleenlik op die hoofwaarde gehef nie, maar ook op die totale opgeloopte rente tot die einde van die vorige tydeenheid. Deur dieselfde simbole as tevore te gebruik, kry ons die formule vir saamgestelde rente:

$$A = P(1 + i)^n$$

Die rente deel van die totale bedrag wat verskuldig is, sal wees:

$$\begin{aligned} A - P &= P(1 + i)^n - P \\ &= P[(1 + i)^n - 1] \end{aligned}$$

Ons 'probleme is saamgestel' wanneer elke probleem nog meer probleme veroorsaak, soos byvoorbeeld, wanneer jy agter raak met jou skoolwerk. Ons almal het dit al oorgekom!

Waar gebruik ons saamgestelde rente? Wanneer ook al 'n finansiële instelling met lenings of beleggings werk, soos:

- Huis- en voertuig lenings: die finansiële instellings 'belê' in jou aankope deur daarvoor te betaal. Jy betaal dit dan terug met rente.
- Indien jy jou geld indirek belê deur beleggingsfondse, of direk deur in 'n besigheid in te koop.

Uitgewerkte voorbeeld

Probleem: 'n Bedrag geld word belê teen 12% per jaar saamgestelde rente. Na sewe jaar is die waarde van die belegging R28 738,86. Watter bedrag is belê?

Oplossing:

$$\begin{aligned} A &= P(1 + i)^n \\ 28\,738{,}86 &= P(1 + 0{,}12)^7 \\ \therefore P &= \frac{28\,738{,}86}{1{,}12^7} \\ &= R13\,000 \end{aligned}$$

$A = 28\,738{,}86$

$i = \frac{12}{100} = 0{,}12$

$n = 7$

Uitgewerkte voorbeeld

Probleem: R6 000 word belê deur gebruik te maak van saamgestelde rente elke maand bereken vir 30 maande. Die totale rente is R1 125. Wat is die maandelikse rentekoers as 'n persentasie?

Oplossing:

Nota: Jou sakrekenaar het 'n knoppie hiervoor, $\sqrt[30]{\frac{7\ 125}{6\ 000}}$; lees die handleiding van jou sakrekenaar of vra jou onderwysers om jou te help om die knoppie te vind.

$$A = P(1+i)^n \qquad A = 6\ 000 + 1\ 125$$

$$7\ 125 = 6\ 000(1+i)^{30} \qquad = 7\ 125$$

$$\therefore (1+i)^{30} = \frac{7\ 125}{6\ 000} \qquad P = 6\ 000$$

$$1 + i = \sqrt[30]{\frac{7\ 125}{6\ 000}}$$

$$i = \sqrt[30]{\frac{7\ 125}{6\ 000}} - 1 \qquad n = 30$$

$$= 5{,}74 \times 10^{-3} \qquad i = ?$$

$\therefore$% rente $= 100 \times i = 0{,}574\%$ per maand

Uitgewerkte voorbeeld

Probleem: 'n Lening ter waarde van R15 000 word gemaak; saamgestelde rente word jaarliks teen 'n koers van 20% gehef. Die lening en totale rente waarde word in een paaiement terugbetaal en hierdie bedrag kom op R31 104 te staan. Vir hoeveel jare was die lening geldig?

Oplossing:

$$A = P(1+i)^n \qquad A = 31\ 104$$

$$31\ 104 = 15\ 000(1+0{,}20)^n \qquad P = 15\ 000$$

$$\therefore 1{,}2^n = \frac{31\ 104}{15\ 000} \qquad i = \frac{20}{100} = 0{,}20$$

$$= 2{,}0736 \qquad n = ?$$

Ons het hier 'n probleem. In die hoofstuk oor Eksponente het ons gevind dat ons wiskundig nie 'n manier het om hierdie probleem direk op te los nie, maar is daar altyd 'n ander uitweg. Ons kan 'n numeriese ondersoek loods.

Ons weet dat n 'n heelgetal moet wees wanneer ons jare tel. Laat ons dus heelgetalle toets deur te begin met 2 ($n \neq 1$):

Toets $n = 2$ $(1{,}2)^2 = 1{,}44$ te laag
Toets $n = 3$ $(1{,}2)^3 = 1{,}728$ te laag
Toets $n = 4$ $(1{,}2)^4 = 2{,}0736$ daar is hy!

Oefeninge

11 Paul, wat sopas 42 jaar oud geword het, belê sy bonus van R16 000 in ’n effektetrust wat 18% rente jaarliks saamgestel, uitkeer. Hoeveel sal sy belegging werd wees wanneer hy die uittredingsvlak van 65 jaar bereik?

12 Nompumelelo wil in vier jaar se tyd ’n huis koop. Sy weet dat sy ’n deposito van 10% sal moet neersit om ’n huislening te kry wanneer sy dit koop. Sy verwag dat die waarde van die huis wat sy sal kan bekostig, R600 000 sal wees. Sy besluit om ’n deel van haar spaargeld te belê om die deposito by te bring. Die belegging wat sy wil gebruik het ’n opbrengs van 15% rente jaarliks saamgestel. Watter bedrag moet sy belê?

13 Rosalia belê R20 000 vir 2 jaar teen ’n koers van r % rente, jaarliks saamgestel. Aan die einde van die 2 jaar is die bedrag wat sy bymekaar het R25 538. Bereken die waarde van r.

14 Siphiwe se ouma, wat 80 jaar oud is, gee vir hom ’n geskenk van R10 000. Hy besluit om dit vir 40 jaar te belê tot hy 60 is. Hy koop in ’n fonds in wat hy glo ’n opbrengs van 17% gedurende hierdie tyd sal oplewer. Hoeveel geld sal hy hê? Dink jy hy was slim om vanaf so ’n jong ouderdom te begin spaar, terwyl hy werklik nodig het om dinge aan te koop?

15 Johanna wil van haar spaargeld in kunswerke belê. Sy bereken dat die waarde van ’n kunswerk wat sy graag wil koop, sal toeneem met 6,5% saamgestel jaarliks. Hoe lank sal Johanna moet wag sodat die waarde van die kunswerk tot dubbel sy waarde vermeerder? Rond jou antwoord af tot die naaste jaar. Dink jy sy maak ’n wyse belegging: wat is al die voor- en nadele?

16 Vergelyk die effek van verskillende hoofwaardes: jy sal grafiekpapier hiervoor nodig hê. Trek ’n tabel van n en A waardes vir $i = 0{,}20$ vir situasies (a) tot (c): gebruik $n = 1, 2, 3, ..., 5$:

(a) P = R500 (b) P = R1 000 (c) P = R1 500

Teken die stelle punte van die drie situasies op jou grafiekpapier aan. Wat neem jy waar? Verduidelik jou stelling deur jou kennis van grafieke en eksponensiële funksies te gebruik.

17 Vergelyk die effek van verskillende enkelvoudige rentekoerse: Gebruik grafiekpapier. Trek ’n tabel van n en A waardes vir P = R1 000 vir die situasies (a) tot (c): gebruik $n = 1$ tot 5:

(a) $i = 0{,}10$ (b) $i = 0{,}20$ (c) $i = 0{,}30$

Teken die stelle punte vir die drie situasies aan op jou grafiekpapier. Wat neem jy waar? Gebruik jou kennis en begrip van grafieke en eksponensiële funksies te om te verduidelik.

11.3 Huurkoop

Soms het jy nodig om iets te koop waarvoor jy nie genoeg geld het nie. Daar is drie maniere om dit te doen, naamlik:

- om ’n lening aan te gaan
- om met ’n kredietkaart te koop
- om op huurkoop te koop

Gewoonlik is ’n lening nie ’n goeie idee nie, behalwe as jy geen ander uitweg het nie en jy absoluut een moet uitneem; die rente op lenings, veral persoonlike lenings, is baie hoog. Finansiële instellings bied lenings wat moeilik is om af te betaal, omdat hulle ’n hoë rentekoers vra, soms so hoog as 20% of selfs meer.

Voorbeelde van situasies waar lenings onvermydelik is, is die aankoop van ’n huis of woonstel, of die aankoop van ’n motor of motorfiets. Dikwels neem studente lenings uit om hul studies te voltooi: ’n totaal onvermydelike situasie. Gelukkig het studentelenings spesiale voorwaardes en die rente word slegs gehef wanneer die kursus voltooi is. Hulle stel dit dikwels ook so in die leningsooreenkoms – die lening moet terugbetaal word hetsy die kursus binne die gegewe tyd voltooi word of nie.

Om gereeld met ’n kredietkaart te betaal is slegs ’n goeie idee indien jy die kaart met jou volgende salaris kan afbetaal. Die rente is andersins te hoog – om en by 18% per jaar. Somtyds sal banke eers begin rente hef op kredietkaarte na ’n maand of twee. Om veilig te wees: moet jy nooit meer skuld aangaan met jou kaart as wat jy binne die volgende twee maande uit jou salaris kan terugbetaal nie. Meer skuld as dit kan baie moeilik word om af te betaal. Skuld het ’n manier om **gekompliseerd** te raak indien jy beheer daaroor verloor!

Gewoonlik is die beste manier om goedere wat relatief goedkoop is aan te skaf, huurkoop; soos ’n TV, ’n klankstelsel, wasmasjien, ens. (alhoewel duurder items soos huise en motors ook soms op hierdie wyse gekoop kan word). **Huurkoop** is ’n wettige ooreenkoms tussen ’n koper en ’n verkoper waar iets gekoop word deur paaiemente in gereelde (gewoonlik maandelikse) dele te betaal. Die koper het volle gebruik van/toegang tot die item terwyl dit afbetaal word.

Die Amerikaanse term vir so ’n ooreenkoms is meer duidelik: ‘huur om te besit’. Jy huur die item totdat jy dit besit. Wetlik besit die verkoper die item totdat die volle bedrag betaal is. Die koper het egter volle gebruik van die item terwyl dit afbetaal word. As die koper ophou om die gereelde paaiemente te betaal (wanbetaling, of versuim om te betaal) kan die verkoper op die item beslag lê en die geld hou wat tot op daardie punt betaal is.

Soms moet ’n deposito vooraf betaal word. Rente word ook gewoonlik gehef. Wanneer rente gehef word, is dit gewoonlik enkelvoudige rente om sake vir die verbruiker te vergemaklik. Ons sal altyd aanvaar dat enkelvoudige rente gebruik word. Dikwels sal die verkoper ook ’n versekeringsfooi insluit om voorsiening te maak vir skade aan die item.

Uitgewerkte voorbeeld 'n Ware toekoms situasie

Probleem: 'n Yskas kos R4 990. Die verkoper vereis 'n deposito van 15%. Die balans word in 48 maandelikse paaiemente afbetaal. Enkelvoudige rente word gehef teen 21,65% per jaar. Versekering teen 2,5% word op elke paaiement gehef.

A. Wat is die maandelikse paaiement, versekering uitgesluit?

B. Wat is die totale maandelikse paaiement, versekering ingesluit?

C. Hoeveel meer sal die yskas kos as wanneer dit kontant betaal word?

Oplossing vir A:

$\textit{deposito} = 0{,}15 \times \text{R4 900} = \text{R748,50}$

$\textit{balans} = 0{,}85 \times \text{R4 990} = \text{R4 241,50}$

$$\begin{aligned}\textit{opgehoopde waarde} &= P(1 + ni)\\ &= 4\,241{,}50 \times (1 + 4 \times 0{,}216\,5) \quad \text{[48 maande = 4 jaar]}\\ &= \text{R7 914,64}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\textit{maandelikse paaiement} &= A \div 48\\ &= 7\,914{,}64 \div 48\\ &= \text{R164,89}\end{aligned}$$

Oplossing vir B:

$$\begin{aligned}\textit{paaiement met versekering} &= 164{,}89 \times 1{,}025 \quad \text{[verhoog die paaiement met 2,5%]}\\ &= 169{,}01\\ &\approx \text{R169}\end{aligned}$$

Gewoonlik sal die verkoper die paaiement afrond tot die naaste Rand.

Oplossing vir C:

$$\begin{aligned}\textit{totale H.K. koste} &= \textit{deposito} + \textit{som van alle paaiemente}\\ &= \text{R748,50} + 48 \times \text{R169}\\ &= \text{R8 860,50}\end{aligned}$$

Die yskas sal dus R8 860,50 – R4 990 = R3 870,50 meer kos op H.K. as sy kontantprys.

Skok hierdie berekening jou? As jy dit nie glo nie, kyk gerus na winkelbrosjures wat H.K./krediet bied. Die rentekoers is die van 'n welbekende kettingwinkelgroep. Kan jy sien dat H.K. slegs 'n goeie idee is indien jy werklik iets nodig het? Finansieel is dit glad nie wys om amper dubbel te betaal vir 'n item wat jy nie dringend benodig nie. Spaar eerder eers en betaal later kontant daarvoor. Om welvaart te bou, begin om slim met jou geld te werk.

2154 TechMaths Afr G10 LB.indb 361 2015/11/25 4:14 PM

Oefeninge

18 Sipho het dringend nodig om ’n motorfiets te koop om elke dag by sy werk te kom. Hy sien ’n goeie aanbieding by ’n motorfiets handelaar in die stad: ’n motorfiets geadverteer vir R55 000. Hy het egter nog net R21 000 gespaar. Hy en die vloerbestuurder kom tot ’n ooreenkoms: sy bied ’n huurkoop aan waar Sipho die R21 0000 as ’n kontant deposito sal betaal en daarna maandelikse paaiemente van R1 285 vir die volgende drie jaar.
   (a) Wat is die totale bedrag wat Sipho as rente sal betaal?
   (b) Wat is die jaarlikse persentasie rente wat hy betaal?
   (c) Dink jy dat die vloerbestuurder vir hom ’n goeie transaksie beding het?

19 Die elektroniese memoblad wat Ana wil aankoop het ’n vloerprys/kontantprys van R9 990. Die kleinhandelaar bied ’n huurkoopopsie van betaling oor 30 maande, met ’n rentekoers van 1,45% per maand, sonder deposito. Daar is ’n eenmalige administrasiefooi van R150 en ’n versekeringsfooi van R25 per maand.
   (a) Bereken die totale rente op die vloerprys onder die huurkoopooreenkoms.
   (b) Bereken die maandelikse paaiemente verskuldig.
   (c) Bereken die persentasie aanwas in die totale koste van die memoblad onder die ooreenkoms.

20 Frik moet sy nuwe woonstel meubileer. Hy besluit om ’n eetkamertafel en ses stoele te koop. Die normale kleinhandelsprys van die stel wat hy graag wil koop is R10 990. Hy beding ’n transaksie met die handelaar om 25% deposito te betaal en om die balans maandeliks oor twee jaar af te betaal. Die handelaar se rentekoers op H.K. is 18,75% p.j. Wat sal hy per maand betaal, afgerond tot die naaste R10?

21 Albert en Gretchen huur tans ’n tweeslaapkamerwoonstel vir R6 500 p.m. en wil graag ’n plek koop. Gretchen se Tannie Kittie het ’n woonstel wat R560 000 werd is. Tannie Kittie trek na ’n aftree-oord en maak vir Gretchen die volgende aanbod: hulle kan haar R7 500 per maand huur betaal en na tien jaar is die woonstel hulle eiendom. Hulle kan kies om uit te trek en ophou betaal enige tyd voor die tien jaar verstreke is. As hulle dit egter doen, bly die woonstel in Tannie Kittie se naam.
   (a) Na hoeveel maande sal Albert en Gretchen die waarde van die woonstel terug betaal hê?
   (b) Wat is die totale rente wat hulle na tien jaar betaal?
   (c) Wat is die jaarlikse rentekoers wat Tannie Kittie oor die tien jaar periode aanbied?
   (d) Dink jy dit is ’n goeie transaksie vir Tannie Kittie? Bespreek.
   (f) Dink jy dit is ’n goeie transaksie vir Albert en Gretchen? Bespreek.

22 Gladys het nodig om ’n yskas te koop. Sy het genoeg kontant vir ’n deposito van R800. Sy kan bekostig om R150 per maand op die yskas af te betaal. Die winkel waar sy beoog om haar yskas te koop, hou ’n reeks modelle teen verskillende pryse aan. Sy moet besluit watter yskas sy kan bekostig op ’n huurkoopkontrak. Die winkel verskaf die volgende voorwaardes vir huurkope: jaarlikse rente teen 20,5%; termyn, 48 maande. Bereken die vloerprys van die duurste yskas wat sy kan bekostig.

11.4 Inflasie

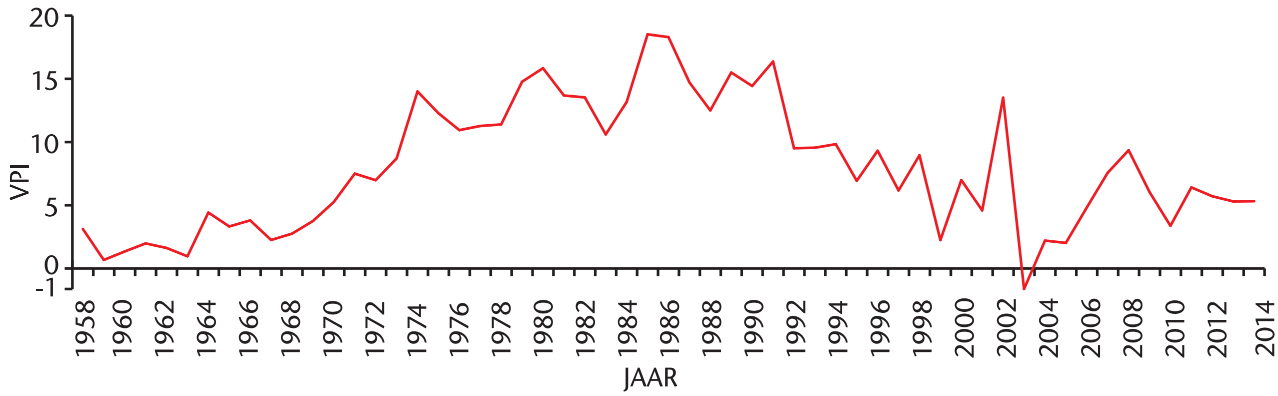
In ekonomie word die woord inflasie gebruik om die kostevermeerdering van goedere oor 'n tydperk te beskryf. **Inflasiekoers** is die persentasie toename in die prys van 'n item of diens. Die wiskunde van inflasie is die wiskunde van saamgestelde rente:

$$\textit{inflasie waarde} = \textit{basis waarde} \times \left(1 + \frac{\textit{inflasie koers}}{100}\right)^{\text{aantal jare}}$$

Jy weet waarskynlik dat 'n 2,5 kg sak mieliemeel of 'n brood nou meer kos as wat dit gekos het toe jy in Graad 1 was. Die hoeveelheid en kwaliteit van die mieliemeel het nie verander nie. Ons sê dat die **intrinsieke waarde** onverander is. Dit kos slegs meer. Dit is inflasie aan die werk. Die woord 'inflasie' beteken 'opblaas', 'uitbrei' of 'groter word'.

Dit lyk soms asof die prys van 'n item op dieselfde prys skaal bly oor 'n aantal jare. In sulke gevalle is dit moontlik dat óf die kwaliteit van die item óf die hoeveelheid daarvan verminder het. Jy betaal dalk dieselfde prys, maar wat jy kry, is nie dieselfde nie. Sommige ekonome het 'n nuwe woord geskep om hierdie fenomeen te beskryf: '*sluipinflasie*'. Die woord 'sluip' beteken iets onderduims, iets wat in die stilligheid gedoen word. Jy betaal dalk dieselfde bedrag vir 'n buisie tandepasta, maar jy sal vind dat die tandepasta buisie elke jaar kleiner en kleiner word. Verbruikers moet op hul hoede wees vir sulke veranderinge.

Amptelike inflasiekoerse word elke maand bereken. Gemiddelde inflasiekoerse word ook per jaar, per dekade, ens. bereken. Daar is 'n bepaalde formule wat Statistiek SA gebruik om die koers te bereken. Dit is gebaseer op iets wat ons die **Verbruikers Prys Indeks** (VPI) noem. Jy kan dit naslaan en meer daaromtrent uitvind vir jouself. Hieronder is 'n grafiek wat die Suid-Afrikaanse inflasiekoers van 1957 tot 2013 aantoon.



Die grafiek toon dat inflasie nooit konstant is nie. Dit verander van maand-tot-maand en jaar-tot-jaar. Ons kan ook die effektiewe/gemiddelde inflasiekoers oor enige tydperk bereken deur gebruik te maak van die saamgestelde rente vergelyking en deur *i* die onderwerp van die formule te maak:

$$i = \sqrt[n]{\frac{\textit{inflasie waarde na n jaar}}{\textit{basis prys aan die begin van n jaar}}} - 1$$

Die oorsake van inflasie is nogal kompleks. Die hoofoorsaak is dat die totale bedrag geld in die ekonomie geleidelik met verloop van tyd vermeerder het. Regerings beheer die totale bedrag geld in sirkulasie noukeurig om die ekonomie so gesond as moontlik te probeer hou. Te min geld in sirkulasie veroorsaak verlaagde besteding en ’n verlangsamende ekonomie. Te veel geld, lei tot verlaagde sakevertroue in die ekonomie en dit kan nie byhou nie. Die geheim is om inflasie so te beheer dat die ekonomie so vinnig as moontlik groei sonder om dit onmoontlik vir die ekonomie te maak om by te hou.

Wanneer inflasie tot onder 0% daal, noem ons dit **deflasie**. Dit is gewoonlik negatief, omdat dit ’n aanduiding is dat produktiwiteit aan die afneem is. Die inflasiekoers van die Verenigde Koninkryk het in April 2015 tot – 0,1% gedaal. Dit het die Britse ekonome baie bekommerd gehad.

Wanneer inflasie baie, baie hoog is soos onlangs in Zimbabwe gebeur het, en in Duitsland in die 1920s, noem ons dit **hiperinflasie** of weghol-inflasie. Die hoogste amptelike inflasiekoers in Zimbabwe was 231 150 888,87% gedurende Julie 2008. Volgens beraming het dit daarna selfs hoër gestyg. Hiperinflasie is baie negatief, omdat kontant nie sy waarde lank genoeg kan behou om bruikbaar te wees nie. ’n Brood kan 125 keer meer kos aan die einde van ’n week as wat dit aan die begin van die week gekos het. Gewoonlik gebeur hiperinflasie wanneer die ekonomie te veel verlangsaam. Die sentrale bank begin meer en meer geld druk om die ekonomie weer aan die gang te probeer kry. Indien die ekonomie nie reageer nie, sal die inflasiekoers buite beheer sneeubal.

Uitgewerkte voorbeeld

Om te wys dat inflasie eksponensieel is en nie liniêr nie

Probleem: ’n Brood kos R10. ’n Jaar later kos dit R10,60.

A. Wat is die inflasiekoers vir die brood?

B. Wat sal die brood na nog 'n jaar kos indien ons aanvaar dat die inflasiekoers dieselfde bly?

C. Wat sal die brood na *n*-jaar kos indien ons aanvaar dat die inflasiekoers dieselfde bly?

Oplossing A:

$$\begin{aligned} \textit{inflasiekoers} &= \frac{\textit{verandering in koste}}{\textit{aanvanklike koste}} \times 100 \\ &= \left(\frac{10{,}60 - 10{,}00}{10{,}00}\right) \times 100 \\ &= 6\% \end{aligned}$$

Oplossing B:

koste twee jaar later

$= \textit{koste een jaar later} \times (1 + 0{,}06)$

$= [\textit{oorspronklike koste} \times (1 + 0{,}06)] \times (1 + 0{,}06)$

$= 10{,}00 \times (1 + 0{,}06)^2$

$= \text{R}11{,}24$

Oplossing C:

Vir elke jaar vermenigvuldig ons met 1,06, na *n*-jaar vermenigvuldig ons met $1{,}06^n$.

Dus: $\textit{koste na n-jare} = \textit{oorspronklike koste} \times (1 + \mathrm{i})^n$ of $A = P(1 + \mathrm{i})^n$

Let Wel: Ons aanvaar dat geen ‘sluip inflasie’ teenwoordig is nie en dat die intrinsieke kwaliteit van brood deurgaans dieselfde is.

Uitgewerkte voorbeeld

Berekening van die basiswaarde

Probleem: Die gemiddelde inflasiekoers van huispryse in 'n bepaalde voorstad was 5% vir die afgelope vyf jaar. Indien die gemiddelde verkoopsprys van 'n drieslaapkamerhuis tans R960 000 is, wat was dit vyf jaar gelede, afgerond tot die naaste tien duisend Rand?

Oplossing:

$A = P(1 + i)^n$	$A = 960\,000$
$960\,000 = P(1 + 0{,}05)^5$	$P = ?$
$\therefore P = \dfrac{960\,000}{1{,}05^5}$	$i = \dfrac{5}{100} = 0{,}05$
$= 752\,185{,}12$	$n = 5$
$\approx R750\,000$	

Let daarop dat huispryse verander afhangende van die vraag na huise in die omgewing. Indien min mense verkies om in die buurt te bly, is huispryse gewoonlik laer as in die omgewings wat meer gewild is. Dit veroorsaak dat huisprys-inflasie 'n bietjie anders reageer as die inflasie van voedsel en huishoudelike items.

Oefeninge

23 'n 400 g potjie grondboontjiebotter kos tans R18,90. Ekonome projekteer 'n inflasiekoers van 5,5% vir die volgende drie jaar. Wat kan jy verwag om vir dieselfde potjie grondboontjiebotter dan te betaal, afgerond tot die naaste tien sent?

24 In 2006 het 'n kilogram van 'n gewilde handelsnaam kitskoffie R32,99 gekos. Wat het dieselfde koffie in 1994 gekos indien die effektiewe inflasiekoers vir hierdie handelsnaam koffie 4,85% gedurende hierdie tydperk was?

25 Verwys na vraag 3. Fahrieda se ouers wou nie hê dat sy rente betaal nie. Sy het besluit dat sy ten minste moet opmaak vir die effek van inflasie. Wanneer sy haar ouers terugbetaal, is die koste van dieselfde model motor R105 000.

(a) Wat is die jaarlikse inflasiekoers vir die model van die motor wat sy gekoop het?

(b) Het sy vergoed vir die effek van inflasie?

26 Verwys na Oefening 21. Na tien jaar verby is het Gretchen en Albert eienaarskap van die huis oorgeneem. Hulle het die volgende inflasie data, vir elk van die tien jaar, vir die waarde van woonstelle in hulle kompleks:

jaar	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
koers	2%	7%	0,5%	4%	4,3%	3,8%	8%	9,5%	11%	6,2%

(a) Bereken die waarde van die woonstel aan die einde van die tien-jaar periode, gebaseer op hierdie inflasiewaardes.

(b) As ons die effek van inflasie in ag neem, het hulle ’n goeie belegging gemaak deur die eiendom op hierdie wyse te koop?

27 In 2010, het ’n 2,5 kg pakkie suiker R12 gekos. Dieselfde pakkie kos R15 in 2015. Bereken die effektiewe inflasiekoers vir suiker, gebaseer op hierdie waardes.

28 Sluipinflasie in aksie: ’n firma wat lekkergoed vervaardig het 200 g plakke melksjokolade in 2008 geproduseer. Die plakke is verminder na 180 g in 2010, en toe na 150 g in 2014. Die kleinhandelspryse van die plakke in vier jaar word hieronder aangegee:

Maand en jaar	Massa van plak (g)	Kleinhandelsprys van plak
Januarie 2008	200	R 15,95
Januarie 2010	180	R 17,95
Januarie 2013	180	R 21,50
Januarie 2015	150	R 21,50

(a) Teken die volgende tabel oor in jou oefeningboek en voltooi:

Maand en jaar	Koste per 100 g
Januarie 2008	
Januarie 2010	
Januarie 2013	
Januarie 2015	

(b) Bereken die jaarlikse inflasiekoers vir die periode Januarie 2008 tot Januarie 2010.

(c) Bereken die jaarlikse inflasiekoers vir die periode Januarie 2010 tot Januarie 2013.

(d) Het die prys van ’n plak melksjokolade oor die periode Januarie 2013 tot Januarie 2015 inflasie beleef? Verduidelik.

(e) Is die inflasiekoers van jaar tot jaar dieselfde? Verduidelik wat die resultate van jou berekeninge in (b) en (c) beteken.

11.5 Wisselkoers

Wanneer jy iets aanlyn uit 'n vreemde land wil koop, betaal jy daarvoor in die geldeenheid van daardie land. As jy na 'n vreemde land reis, moet jy vir alles in daardie land se geldeenheid betaal.

Wanneer jy van 'n VSA-verkoper iets aankoop, dan moet jy hulle in Amerikaanse Dollars betaal. Om dit te kan doen, moet jy jou Rand in Dollars omskakel. Hoeveel Dollars vir elk van jou Rand?

Wisselkoerse is die verhouding van een geldeenheid tot 'n ander. Dit is deurentyd besig om te verander, nie slegs van een dag tot die volgende nie, maar selfs gedurende die dag.

Let Wel: Wanneer jy na 'n bank toe gaan om een geldeenheid vir 'n ander te wissel, verwag die bank 'n wisselfooi vir hulle diens. Dit beteken dat jy minder van die nuwe geldeenheid gaan kry as wat jy verwag van die wisselkoers.

Uitgewerkte voorbeeld Rand na Dollars

Probleem: Jy bestel 'n stel CD's aanlyn wat \$28 kos. Die Rand/Dollar wisselkoers is R12 teen die Dollar. Wat sal die koste in Rand wees?

Oplossing: Laat die prys in Rand x wees; gebruik verhoudings:

$$\frac{\textit{prys in Rand}}{\textit{prys in Dollars}} = \frac{x}{\$28} = \frac{\text{R}12}{\$1}$$

$$\therefore x = \frac{\text{R}12}{\$1} \times \$28$$

$$= \text{R}336$$

Normaalweg wanneer jy een geldeenheid vir 'n ander wissel, betaal jy 'n ekstra bedrag aan die finansiële instelling wat die wisseling hanteer. In bogenoemde geval sal jy dus BTW van 14% moet betaal op die CD's wanneer hulle in Suid-Afrika aankom. As jy nie betaal nie, stuur hulle dit terug. Jou aanlyn aankoop mag op die ou einde meer as R400 kos.

In April 2011 was die wisselkoers om en by R6,70 teen die Rand, en in Maart 2015 by 'n dertien-jaar hoogtepunt van R12,05 teen die Dollar. Wisselkoerse het te make met die sterkte van die ekonomie; met ander woorde, wanneer die ekonomie gesond is en wanneer ekonomiese aktiwiteite plaasvind, dan het buitelandse beleggers vertroue in die ekonomie.

Terminologie: hoë/lae wisselkoers en **swak/sterk** geldeenheid

- R6,70 tot die dollar is 'n *lae wisselkoers* in vergelyking met R12,05
- R6,70 tot die dollar beteken die *Rand is sterker* as wanneer dit R12,05 tot die dollar is

’n Geldeenheid sal gewoonlik sterker word wanneer daar meer belegging is, en swakker wanneer daar minder is. Sonder belegging in die land se industrieë, kan die land nie genoeg produseer nie. Die land voer dan te veel in en voer te min uit wat veroorsaak dat die geldeenheid verswak, wat dit selfs moeiliker maak om dit in te voer wat die land nie kan produseer nie en veroorsaak dus inflasie.

Oefeninge

29 Jy beplan ’n 10-dag toer na Los Angeles. Jy moet vir elke dag wat jy daar is sakgeld hê. Vir hierdie doel het jy R14 000 gespaar. Jou vriend in Los Angeles lig jou in dat jy ongeveer \$120 per dag gaan nodig hê om. Ten tye van die bespreking van jou vlug, is die wisselkoers R11,54.

(a) Is R14 000 genoeg om jou daaglikse uitgawes te dek volgens die gegewe wisselkoers?

(b) ’n Paar weke later, ’n paar dae voor jou vertrek, sien jy dat die wisselkoers gestyg het tot R12,10. Hoeveel ekstra geld, in Rand, het jy nou nodig om jou uitgawes te dek?

(c) Kon jy hiervoor beplan het, of was dit maar net gewone teenspoed? Verduidelik.

30 ’n Ingenieursfirma is betrokke by ’n groot projek om ’n kragstasie te bou. Die begroting is noukeurig bereken. ’n Bepaalde eenheid wat in die kragstasie ingebou moet word, word in Frankryk vervaardig en kos €870 000. Toe die begroting opgetrek is, was die wisselkoers R1 = €0,090. Betaling vir die eenheid sal een jaar later moet geskied, net voordat die eenheid afgelewer en geïnstalleer word.

(a) Hoeveel Rand moet vir die eenheid begroot word, gebaseer op die gegewe wisselkoers?

(b) Die projek is vir ses maande vertraag. Teen die tyd dat die eenheid bestel moet word, het die Rand tot €0,080 verswak. Hoeveel is die projek oor sy begroting as gevolg van die vertraging in die installering van die eenheid?

31 Dimakatso hou daarvan om haar spaarkontantgeld in buitengewone strokiesprentboeke te belê. In 2010 het sy 'n boek van 'n aanlynveiling in Tokio vir JPY 12 000 (Japannese Yen) gekoop. In 2014 het sy dieselfde strokiesprentboek aan 'n Amerikaanse versamelaar vir USD 250 (Amerikaanse Dollars) verkoop. Die wisselkoerse tussen ZAR (Suid-Afrikaanse Rand) USD, en JPY vir hierdie twee dae, word hieronder aangegee:

September 2010	ZAR 1	USD 0,140	JPY 11,8
Desember 2014	ZAR 1	USD 0,086 9	JPY 10,3

(a) Het die ZAR verswak of versterk in vergelyking tot die USD en tot die JPY? Verduidelik.

(b) Het die JPY verswak of versterk teenoor die USD? Verduidelik.

(c) Vir hoeveel in JPY het sy die boek verkoop?

(d) Watter persentasie profyt in USD het sy op die strokiesprentboek gemaak?

(e) Watter persentasie profyt in ZAR het sy gemaak?

(f) Is sy 'n goeie sakevrou of is sy bloot baie gelukkig? Bespreek.

(g) Was daar enige berekeninge wat nie ingesluit is nie, soos addisionele koste wat kon veroorsaak dat haar 'profyt' in Rand kleiner kon wees?

11.7 Opsomming

- **Enkelvoudige rente**: Bereken slegs op die hoofwaarde: die hoeveelheid rente is dieselfde vir elke tydperiode.
  - Enkelvoudige rente formule: $A = P(1 + ni)$
  - A is 'n liniêre funksie van n
  - Pi is die gradiënt en P is die *A-afsnit*
  - Rente deel: $A - P = Pni$
- **Saamgestelde rente**: bereken op die opgehoopde waarde; die hoeveelheid rente word meer van een tydperiode tot die volgende.
  - Saamgestelde rente formule: $A = P(1 + i)^n$
  - A is 'n eksponensiële funksie van n
  - P is die koëffisiënt en $1 + i$, is die basis
  - Rente deel: $A - P = P[(1 + i)^n - 1]$
- **Huurkoop** ('huur om te besit'): 'n deposito mag betaalbaar wees; die balans word afbetaal in gelyke paaiemente met enkelvoudige rente bygevoeg; daar kan addisionele fooie wees, soos versekering teen skade of 'n administratiewe fooi.
- **Inflasie**: die geleidelike verhoging in die koste van goedere van dieselfde intrinsieke waarde; verbandhoudend met faktore soos produktiwiteit, vlak van investering, beleggingsvertroue, totale voorraad van kontant in sirkulasie, sterkte van die geldeenheid soos wisselkoers; 'n lae inflasiekoers word as ideaal beskou om die ekonomie te laat groei; te lae of te hoë inflasiekoers is 'n aanduiding van probleme met die ekonomie en hoe dit bestuur word; hiperinflasie is die gevolg van ekonomiese ineenstorting.

- **Wisselkoers**: die verhouding wat gebruik word om een geldeenheid te wissel vir 'n ander geldeenheid; geldeenheid verswak wanneer die koers styg en versterk wanneer die koers verminder: dit is dus 'n belangrike aanduider van ekonomiese krag: dit is belangrik wanneer ons te make het met internasionale handel, toerisme, ens.

11.8 Konsolideringsoefeninge

1 Andrew belê R5 000 teen 15% enkelvoudige rente per jaar en Glenton belê dieselfde bedrag teen 10% rente, jaarliks saamgestel. Wie se belegging is die grootste na:

(a) 4 jaar

(b) 8 jaar

(c) 12 jaar

Watter belegging is die beste?

2 Mpho en Cassandra belê elk R5 000 teen 12% per jaar. Mpho se rente is enkelvoudig, terwyl Cassandra se rente saamgestel is. Watter belegging is beter?

3 ’n Firma in Suid-Afrika voer staalkabels uit na ’n aantal lande in die buiteland, insluitend Botswana en Venezuela. Die verkoopsprys vir ’n tafel in Suid-Afrika is R625,00. Die wisselkoers vir die drie geldeenhede word hieronder aangegee in US Dollars:

100 Suid-Afrikaanse Rand (ZAR)	8,47 US Dollar (USD)
100 Botswana Pula (BWP)	10,3 US Dollar
100 Venezuelan Bolivar (VEF)	15,7 US Dollar

(a) Hoeveel sal ’n koper in Venezuela vir ’n tafel in Bolivar betaal?

(b) Voltooi: 1 USD = ? ZAR = ? BWP = ? VEF?

(c) ’n Meubelwinkel in Gaborone het BWP 6 000 om te spandeer op staaltafels. Hoeveel tafels kan hulle koop?

(d) Ons het verskepingskoste van die tafels na hierdie lande buite rekening gelaat. Watter land word meer hierdeur geraak wanneer hulle goedere invoer vanuit Suid-Afrika; Botswana of Venezuela?

4 Verwys na oefening 14. Siphiwe wil die effek van inflasie in aanmerking neem. Hy besluit om die bedrag van sy maandelikse lopende uitgawes, wat R2 500 is, hiervoor te gebruik. Hy aanvaar dat inflasie konstant teen 5% sal bly vir die veertig jaar wat hy gaan belê.

(a) Hoeveel maande se uitgawes kan hy betaal deur die R10 000–geskenk te gebruik teen sy huidige ouderdom van 20 jaar?

(b) Gebruik inflasiekoers om sy verwagte maandelikse uitgawes oor 40 jaar wanneer hy 60 word, te bereken.

(c) Hoeveel maande se uitgawes sal deur sy opgehoopde belegging in 40 jaar se tyd gedek word?

(d) Hy kom tot die volgende gevolgtrekking: '*Die belegging se rentekoers van 17% vermeerder die hoeveelheid geld, maar die inflasiekoers laat die waarde van die geld afneem*'. Stem jy saam met sy gevolgtrekking? Dink jy dat dit belangrik is om inflasie in aanmerking te neem wanneer jy lang-termyn beleggings beplan?

(e) Hoe betroubaar is sy aanname wat betref die inflasiekoers waarde? Verduidelik kortliks.

5 Giorgio wil 'n gasstoof koop. Hy het 'n spesifieke model in gedagte. Hy kan dit by kleinhandelaar A of by kleinhandelaar B koop. Hy kan nie met kontant daarvoor betaal nie, dus moet hy van huurkoop (H.K.) gebruik maak. Die tabel hieronder dui die H.K. transaksies van albei kleinhandelaars aan:

Kleinhandelaar	Kosprys	Deposito	Enkelvoudige rente	Periode	Addisionele maandelikse koste
A	R13 500	10%	20%	48 maande	R23
B	R14 350	15%	21%	48 maande	geen

Gebaseer op die gegewe inligting, watter H.K. ooreenkoms is die beste vir Giorgio?

6 Lerato belê R7 000 vir 5 jaar, enkelvoudige rente, teen 13,5% per jaar. Hoeveel geld sal sy hê aan die einde van die beleggingsperiode?

7 James sal R54 800 na 'n 10-jaar beleggingsperiode ontvang. Hoeveel moet hy belê as hy 'n rentekoers van 18% saamgestel jaarliks, ontvang?

8 Peter ontvang R11 600 nadat hy R5 000 vir 10 jaar belê het. Watter persentasie saamgestelde rente het hy verdien?

9 Thandi koop 'n huis vir R2 300 000. Sy moet 'n oordragfooi betaal wat 5% van die koopprys beloop. Sy moet ook 'n 15% deposito op hierdie bedrag betaal. Wat sal haar maandelikse paaiement wees indien die bank 8% enkelvoudige rente per jaar oor 'n periode van 25 jaar hef?

10 Shane leen R25 000 teen 11% enkelvoudige rente om 'n nuwe sitkamerstel te koop. Hy betaal die geld in 4 jaar terug in maandelikse paaiemente.

(a) Wat is die totale bedrag wat Shane sal terugbetaal?

(b) Wat is die rente wat hy op die R25 000 betaal het?

(c) Hoeveel is sy maandelikse paaiemente?

(d) Hoeveel geld sal hy spaar indien hy die bedrag in 2 jaar in plaas van 4 jaar terugbetaal?

11 Lindiwe ontvang ’n toetspunt van $\frac{12}{80}$ vir haar wiskunde toets. Indien sy haar punte elke week met 50% kan verbeter, hoe lank sal dit haar neem voordat sy haar wiskunde toets slaag? In haar skool is die aanvaarde slaagpunt 50%.

12 Brian verdien ’n salaris van R8 000 per maand. Indien sy salaris elke jaar met 6% vermeerder, wat sal hy oor sewe jaar verdien?

13 Aan die begin van 2008, kos ’n witbrood van 700 g R5,89. Aan die begin van 2015 kos dieselfde brood R11,42.

(a) Bereken die jaarlikse inflasie in die prys van ’n 700 g brood oor hierdie tydperk.

(b) Deur gebruik te maak van jou inflasiekoers, skat hoeveel ’n 700 g brood aan die begin van 2014 sal kos.

(c) Die werklike koste van ’n 700 g witbrood in Januarie 2014 was R10,49. Vergelyk dit met jou skatting en verduidelik waarom die waardes verskil.

14 ’n Klavier kos USD12 000.

(a) Indien die Rand/Dollar wisselkoers 8,3 is, wat sal jy in SA geldeenheid daarvoor betaal?

(b) Jy sal ook 14% BTW op die koopprys moet betaal om dit na Suid-Afrika in te voer. Hoeveel BTW sal jy moet betaal?

(c) Invoerheffings is 17% op die koopprys. Hoeveel sal jy betaal op heffings?

(d) Wat is die totale bedrag wat jy vir die klavier betaal?

15 In Oktober 2014 was die gemiddelde koste van 2 liter volroom melk R23,28. Die inflasie vir volroom melk tussen Oktober 2013 en Oktober 2014 was 16,47%.

(a) Bereken die koste van 2 liter volroom melk in Oktober 2013.

(b) Veronderstel die inflasiekoers vir volroom melk het dieselfde gebly vir die volgende twee jaar. Skat die geprojekteerde koste van 2 liter volroom melk in Oktober 2015.

(c) Verskaf ’n rede waarom die werklike gemiddelde prys nie dieselfde sal wees as die waarde wat jy in (b) bereken het nie.

16 David spaar R50 000 sakgeld vir sy oorsese vakansie. Hy wissel al sy geld vir Britse Ponde (GBP) teen 1R/£17,20. Hy moet ’n wissel-fooi van 5% betaal wanneer hy tussen die twee eenhede wissel.

(a) Hoeveel Britse Pond (GBP) kry hy?

(b) Nadat hy van sy vakansie terugkeer, het hy nog £564 oor en wissel dit terug na ZAR geldeenheid teen 0,056 GBP vir elke Rand. Hoeveel Rand kry hy?

17 In 2012 was die geskatte wêreldbevolking 8 biljoen.

(a) Wat sal die wêreldbevolking in 2015 wees teen ’n saamgestelde groei van 2,11%?

(b) Na 2015 verander die groeikoers na 1,25%. Wat sal die bevolking in 2020 wees?

WOORDELYS

Aangrensende sy Die sy langs 'n skerphoek in 'n reghoekige driehoek; dit vorm een van die bene van die hoek

Afsnit Wanneer twee lyne mekaar kruis; die punt waar dit gebeur word die afsnitpunt van twee lyne genoem

Afstandsformule Om die afstand tussen twee punte $(x_1; y_1)$ en $(x_2; y_2)$ te bereken, as volg voorgestel $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Aftrekking Die proses om een getal van 'n ander af te trek

Akkuraatheid Hoe naby die waarde aan die korrekte waarde is (vergelyk met **Presisie**)

Algebraïese identiteit 'n Algebraïese stelling wat waar is vir alle waardes van die insetveranderlikes

Algebraïese onmoontlikheid 'n Algebraïese stelling waar daar geen waardes is wat die stelling 'n ware wiskundige uitdrukking kan maak nie

Amplitude van sinus of kosinus grafiek Dit is die maksimum afstand van die middellyn tot die grafiek. Vir sinus en kosinus is dit 1. Amplitude is 'n positiewe kwantiteit

As van simmetrie Dit is 'n lyn wat 'n beeld in twee helftes verdeel, waar elke helfte 'n refleksie van die ander is om die lyn (vergelyk met **Refleksie**)

Asimptoot Dit is 'n lyn waarna die grafiek van 'n funksie al hoe nader en nader beweeg sonder om aan die lyn te raak soos wat jy die lyn langer en langer trek

Assosiatiewe eienskap Groepering van twee of meer Bewerkinge op verskillende wyses het geen effek op die finale waarde nie, bv. $(3 + 4) + 5 = 7 + 5$ is dieselfde as $3 + (4 + 5) = 3 + 9$

Beduidende syfers Die getalle of syfers in 'n desimale getal wat deel van die waarde van die getal vorm; sien **Presisie**

Bewerking Die aksie wat ons moet neem met die konstante en veranderlike waardes

Binêre getalle Getalle in die basis 2; hulle word geskryf deur 0 en 1 te gebruik om die verskillende magte van 2 voor te stel, in dalende orde van links na regs wat die nommer opmaak

Binnehoek van 'n veelhoek 'n Hoek binne die veelhoek wat twee aangrensende sye van die veelhoek as sy bene het

Boog lengte Die lengte van 'n boog; 'n breuk van die **Omtrek** van die sirkel

Boog Deel van die omtrek van 'n sirkel

Buitehoek van 'n veelhoek 'n Hoek wat supplementêr is aan 'n binnehoek; daar is altyd twee by enige hoeklyn en hulle is teenoorstaande hoeke en daarom gelyk

Deeltal (teller) Die deel wat jy deel

Definisieversameling Die versameling van al die moontlike insetwaardes van 'n funksie; in praktiese probleme, die fisies-toelaatbare insetwaardes maak die definisieversameling op; sien Veranderlike

Deflasie Wanneer die inflasiekoers tot onder 0% daal; aanduidend dat produktiwiteit besig is om af te neem

Deler (noemer) Die deel waarmee jy deel

Deling Die proses om 'n getal in dele te deel om te sien hoeveel keer een getal in 'n ander vervat is

Denkbeeldige getalle Getalle wat geskryf kan word in terme van $\sqrt{-1}$

Deursnee 'n Reguitlyn van een punt op die omtrek deur die middelpunt van die sirkel na die oorkantste punt op die omtrek die x-as lê

Dilatasie Wanneer iets uitstrek of -rek

Distributiewe eienskap Wanneer 'n getal in verskillende dele opgebreek word en elke deel vermenigvuldig word, is die antwoord dieselfde as wanneer die getal in sy geheel vermenigvuldig word

Draaipunt Wanneer die grafiek glad gekrom is naby die minimum of maksimum punte, noem ons dit die draaipunte

Eenterm 'n Getal wat net een term bevat

Eenvoudigste vorm By eksponente, beteken alle basisse in priemfaktor vorm waar elke priemfaktor slegs een maal voorkom

Eindige breuk Breuke wat 'n beperkte aantal desimale syfers het

Eksponente Herhaalde vermenigvuldiging of deling (wanneer die eksponent 'n heelgetal is)

Ekwivalente numeriese uitdrukkings Algebraïese uitdrukkings wat dieselfde numeriese waardes (antwoorde) het vir alle waardes van die getalle wat deur letters verteenwoordig word

Ekwivalente uitdrukkings Algebraïese uitdrukkings wat dieselfde numeriese waardes (uitsetwaarde) het, ongeag die toelaatbare insetwaarde wat ons kies

Element Getal wat tot 'n versameling behoort

Enkelvoudige rente Rente wat slegs op die hoofwaarde bereken word

Evaluering van 'n uitdrukking Die proses om die uitdrukking op te los deur 'n waarde aan die veranderlike toe te ken

Faktor 'n Deel van 'n getal wat vermenigvuldig word met 'n ander getal om die oorspronklike getal te kry, bv. 3 is 'n faktor van 53 121

Faktore van 'n uitdrukking Die dele van 'n uitdrukking wat vermenigvuldig word

Faktorisering Die uitdruk van getalle of algebraïese uitdrukkings as produkte van hulle faktore

2154 TechMaths Afr G10 LB.indb 373 2015/11/25 4:14 PM

Gelykbenige driehoek Twee van die hoeke is gelyk; hierdie hoeke moet skerphoeke wees; die sye oorkant die twee gelyke hoeke is ook altyd gelyk

Gelykhoekige driehoek Al drie hoeke is dieselfde en gelyk aand 180° ÷ 3 = 60°; word ook 'n gelyksydige driehoek genoem omdat al die sye ewe lank is

Gelyksoortige driehoeke Driehoeke met dieselfde hoekgroottes; die verhoudings van die lengtes van hulle ooreenstemmende sye is gelyk

Geordende versameling 'n Versameling met orde waar elke element van die versameling óf bo óf onder enige ander element van die versameling is; reële getalversamelings is almal geordende versamelings

Getallelyn Elke reële getal is 'n punt op 'n skaal lyn

Gradiënt Van 'n reguit lyn tussen twee koördinaat punte dui die helling van die lyn aan en of dit 'n positiewe (toenemende) of negatiewe (afnemende) helling is. Ons gebruik die volgende formule om die gradiënt van 'n reguit lyn tussen twee punte $(x_1; y_1)$ en $(x_2; y_2)$ te bepaal: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Herhalende breuk 'n Breuk waar 'n reeks syfers hulself oor en oor herhaal sonder om te eindig

Hiërargie In wiskunde bedoel ons die wyse waarop voorwerpe rangskik word sodat die voorwerp laer af in die rangskikking al die eienskappe het van die voorwerpe hoër op in die rangskikking; dit word ook beskryf as taksonomie

Hiperinflasie Baie hoë inflasiekoers; dit dui daarop dat die ekonomie te veel afneem en dat geld nie waarde behou nie

Hoeke Meet verskil in rigting of oriëntasie, en ook die hoeveelheid omwenteling; gemeet in grade (volle omwenteling = 360°), in radiaal (volle omwenteling = 2*pi* radiaal), of soms gradiaan

Hoekpunte 'n Punt waar twee strale bymekaar kom of waar twee lyne kruis

Hoofwaarde Aanvanklike bedrag belê (P)

Horisontale asimptoot van 'n kurwe 'n Horisontale lyn parallel aan die x-as is 'n horisontale asimptoot van 'n kurwe wanneer die afstand tussen koördinaatpunte op die kurwe en die asimptootlyn voortdurend verminder, maar nooit nul word nie, soos wat die x-koördinate van hierdie punte na regs beweeg (toeneem) of na links beweeg (afneem).

Huurkoop 'n Wettige ooreenkoms tussen 'n koper en verkoper waar iets aangekoop word deur dit in gereelde, maandelikse paaiemente af te betaal

Inflasiekoers Die persentasie toename in die prys van 'n item of diens; wanneer ons van inflasie praat, praat ons gewoonlik oor positiewe inflasie waar die koste van items toeneem oor tyd; 'n negatiewe inflasiekoers word **Deflasie** genoem

Interval 'n Subversameling van al die getalle tussen twee gegewe getalle

Intrinsieke waarde Die waarde wat iets het as gevolg van dit waaruit dit gemaak is of die doel daarvan; intrinsieke waarde kan baie laag wees selfs al is die kommersiële waarde baie hoog (bv. 'n skildery deur Gerard Sekoto is intrinsiek baie min werd omdat die verf en skilderdoek nie baie duur is nie. Sy skilderye is egter miljoene werd omdat kunsversamelaars 'n hoë waarde aan sy werk heg)

Irrasionale getalle Is nie rasionaal nie; kan nie as verhoudings van heelgetalle geskryf word nie; *pi* en alle ware wortelgetalle is irrasionale getalle; die meeste oplossings tot trigonometriese vergelykings is ook irrasionaal; wanneer ons met irrasionale getalle in desimale vorm moet werk, moet ons hulle afrond tot die gepaste aantal beduidende getalle (omdat hulle nie-eindige, nie-herhalende desimale breuke is)

Kardinaliteit Die aantal **Elemente** in 'n versameling; party versamelings in eindigend (bv. Die oplossings vir 'n kwadratiese vergelyking of die moontlikheid om 6 kaarte van 'n pak te trek), en party is oneindigend (bv. Al die punte op 'n lynsegment of die versameling reële getalle)

Ko-binnehoeke Hierdie is die twee pare hoeke aan dieselfde kant van 'n hoeklyn deur twee lyne, tussen twee lyne; as die twee lyne parallel is, dan sal elke paar van die hoeke 'n som van 180° hê en ons sê dat hulle **Supplementêr** is

Koëffisiënt Getalle of simbole wat vermenigvuldig word met veranderlikes in 'n algebraïese term

Kommutatiewe eienskap Verandering van die volgorde van 'n **bewerking**, verander nie die antwoord nie; optelling is kommutatief, maar aftrekking nie; vermenigvuldiging is kommutatief, maar deling nie

Komplementêre hoeke Hoeke het 'n som van 90°, bv. die twee nie-reghoekige hoeke in 'n reghoekige driehoek is altyd komplementêr

Kongruente driehoeke Driehoeke wat in alle opsigte dieselfde is; die verhoudings van hul ooreenstemmende sye is 1 : 1

Konsentriese sirkels Sirkels met verskillende radiusse wat dieselfde middelpunt deel

Konstante Die bekende waarde in 'n algebraïese uitdrukking

Kontraksie Wanneer iets verminder word in grootte met dieselfde faktor langs een of twee rigtings af

Kwantiteit Is enige iets wat ons kan meet of tel

Kwosiënt uitdrukking of algebraïese breuk Wanneer twee uitdrukkings so is dat die uitset van een (die **deeltal**) vir enige inset gedeel moet word deur die ooreenstemmende uitset van die ander (die **deler**)

Lengtes Meet verskille in posisies teen 'n lyn af wat óf reguit óf gekrom kan wees

Lyn Dit is 'n reguit lyn waar albei 'eindpunte' aanhou verby enige punt wat ons kan kies d.i. oneindig in albei rigtings

Lyn segment Dit is 'n reguit lyn wat twee eindes het, d.i. dit het 'n eindige lengte

Maksimum en minimum punte op 'n grafiek Hierdie is uitsetwaardes op 'n grafiek wat groter is, of kleiner is, as die naaste uitsetwaardes

Manipulering van 'n uitdrukking Vorm 'n uitdrukking wat ekwivalent is aan 'n gegewe uitdrukking

Middelpunt formule Om die middelpunt van enige lynsegment tussen twee koördinaatpunte $(x_1; y_1)$ en $(x_2; y_2)$ te vind, sonder om 'n diagram te teken en die formule $m\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ te gebruik

n Aantal tyd eenhede waaroor rente bereken word

Nie-eindige breuk 'n Desimale breuk wat 'n oneindige aantal syfers in sy breukdeel het

Notasie Ons gebruik notasie om spesifieke idees op 'n duidelike wyse voor te stel (veral wanneer ons dit in gewone taal uitdruk is dit nie maklik om te doen of verstaan nie); notasies word gedefinieer en aanvaar (in hierdie sin is hulle konvensies); notasie bestaan uit simbole en die reëls oor hoe om hulle te gebruik

Omtrek Die lengte rondom die hele rand van 'n sirkel; dit is die maksimum booglengte van die sirkel; die verhouding van die omtrek tot die deursnee is die konstante, *pi* = 3,141 592 693 ...

Omwenteling Het 'n meting van 360° of 2 π rad

Onbekende Die waarde van 'n veranderlike in 'n spesifieke situasie; gewoonlik is daar slegs 'n paar waardes wat die onbekende kan hê, bv. in 'n vergelyking wat 'n lineêre uitdrukking = 0 het, kan die onbekende op die meeste slegs een waarde het; in 'n vergelyking wat 'n kwadratiese vergelyking = 0 het, kan die onbekende op die meeste twee waardes hê

Onderwerp van die formule Om die formule te herrangskik om die waarde van een van die kwantiteite te bereken; wanneer jy 'n spesifieke veranderlike die onderwerp van die formule maak, maak jy dit die afhanklike veranderlike en al die ander veranderlikes in die uitdrukking is afhanklike veranderlikes

Oneindigheid Groter as enige getal wat ons kies en dit word deur ∞ voorgestel; 'n versameling is oneindig wanneer ons nie die individuele elemente kan tel nie, m.a.w. dit maak nie saak hoe lank ons neem nie, ons sal nooit hulle almal kan tel nie; $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ is almal oneindige versamelings

Ongelykbenige driehoek Die binnehoeke is almal van verskillende waardes; die sye is ook altyd van verskillende lengtes

Ooreenstemmende hoeke Die vier pare hoeke in dieselfde posisies in verhouding tot 'n hoeklyn deur twee lyne; as die twee lyne parallel is, dan is elke paar van die ooreenstemmende hoeke gelyk

Opgehoopte waarde Finale totale waarde van die belegging (*A*) op 'n spesifieke tyd

Oplossing van 'n vergelyking Die waarde(s) van die insetveranderlike wat die vergelyking 'n ware wiskundige uitdrukking maak d.i. as die waarde vervang word in elk van die uitdrukkings, sal hulle dieselfde uitsetwaarde voortbring

Optellingsinverse Van 'n getal *a*, is die getal wat, wanneer dit by *a* getel word, dit gelyk is aan nul

***Pi* of π** Die verhouding van die omtrek van 'n sirkel tot sy deursnee; $\pi = \frac{\text{omtrek}}{\text{deursnee}}$

Presisie Om die aantal beduidende syfers in 'n waarde te beskryf. Hoe meer beduidend die syfers is, hoe groter die presisie (vergelyk met **Akkuraatheid**)

Priemfaktor Al die priemgetal faktore van 'n getal

Priemgetalle Heelgetalle groter as 1 wat slegs twee faktore (1 en hulself) het; priemfaktore is die 'boustene' van heelgetalle omdat priemfaktore nie verder gefaktoriseer kan word nie (dit is die kleinste heelgetal faktore van die heelgetal)

Produk uitdrukking 'n Uitdrukking wat uit twee of meer uitdrukkings bestaan waarvan die uitsette vir die gegewe insette vermenigvuldig moet word om die algehele uitset van die uitdrukking te vind

Radiaal Meting van 'n sentrale hoek wat 'n boog onderspan met 'n lengte gelyk aan die radius van 'n sirkel; alhoewel ons van hoeke as radiaal gemeet praat, is die radiaal eintlik eenheidloos (omdat dit die kwosiënt of verhouding van twee lengtes is)

Radius 'n Lynsegment wat die middelpunt van die sirkel met 'n punt op die omtrek van die sirkel verbind; die woord radius verwys ook na die lengte van die radius; al die punte op die omtrek van 'n sirkel is dieselfde afstand, die radius, van die middelpunt af

Rasionale getalle Reële getalle wat as 'n verhouding van heelgetalle geskryf kan word, in breuke

Reële getalle Getalle wat ons in ons alledaagse wiskunde teenkom wat getalle insluit wat ons direk in kwantiteite kan meet

Refleksie Wanneer iets omgekeer is om 'n spieëlbeeld van homself te skep; die lyn van refleksie is die denkbeeldige **As van Simmetrie** tussen die oorspronklike en gereflekteerde beeld

Reghoekige driehoek Al drie binnehoeke is kleiner as 90°

Reghoekige driehoek Een van die hoeke is 90°; beide die oorblywende hoeke is outomaties skerphoeke en is komplimentêr

Saamgestelde rente Rente word nie alleenlik op die hoofwaarde gehef nie, maar ook op die totale opgeloopte rente tot die einde van die vorige tydeenheid.

Sektor Deel van die sirkel wat tussen twee radiusse van 'n sirkel en hulle onderspande boog lê; 'n sektor van die sirkel

Sentrale hoek 'n Sentrale hoek is 'n positiewe hoek waarvan die hoekpunt by die middelpunt van die sirkel is

SI Internasionale stelsel van maateenhede

Skaal diagram Ons kan hoek en lengte metings direk daarop maak; dit is 'n skaal voorstelling van iets werklik, of van 'n ander diagram

Skets diagram Geen van die lengtes en hoeke is volgens 'n vasgestelde skaal geteken nie; slegs hulle verhoudings word in die diagram gewys

Skuinssy Die sy van 'n reghoekige driehoek oorkant die regte hoek

Somuitdrukking Wanneer optelling/aftrekking die laaste stap in die evaluasie van 'n algebraïese uitdrukking is

Standaard posisie van 'n hoek Ons meet hoeke op 'n sirkel deur by die positiewe horisontale as te begin en antikloksgewys te beweeg, tensy anders aangedui

Stomphoekige driehoek Een van die hoeke is groter as 90° maar kleiner as 180°; albei oorblywende hoeke is skerphoeke

Straal 'n Reguit lyn met slegs een punt

Subversameling Versamelings wat aan die versameling bokant die versameling gekoppel word bv. die versameling heelgetalle is 'n subversameling van die versameling van rasionale getalle

Supplementêre hoeke Twee hoeke waarvan die som 180° is

Teenoorstaande hoeke Die paar hoeke aan die oorkantse sye van die **Hoekpunt**; hulle is altyd gelyk

Teenoorstaande sy Die sy oorkant 'n skerphoek in 'n reghoekige driehoek

Terme van die uitdrukking Hierdie is die dele van 'n algebraïese uitdrukking wat opgetel of afgetrek word

Translasie 'n Translasie is 'n beweging in een rigting sonder om die oriëntasie te verander, te dilateer, of kontrakteer

Tweeterm Wanneer 'n uitdrukking die som van twee terme is

Tydlyn 'n Getallelyn vir tyd

Uitbreiding Wanneer 'n produkuitdrukking as 'n somuitdrukking geskryf word

Veelterm Uitdrukkings met meer as een term

Veelvoud Hoeveel maal groter of kleiner, deur vermenigvuldiging, een waarde is in vergelyking met 'n ander waarde; ons praat ook van 'n vermenigvuldiger; sien **Faktor**

Veranderlikes 'n Kwantiteit wat nie 'n vasgestelde waarde het nie; in 'n funksie noem ons die insetveranderlike, die onafhanklike veranderlike en die uitsetveranderlike noem ons die afhanklike veranderlike; die waarde van die onafhanklike veranderlike kan enige getal in 'n spesifieke **Definisieversameling** wees, terwyl die uitset veranderlike enige getal in die ooreenstemmende **Waardeversameling** kan wees; vergelyk met **Onbekende**

Verbruikers Prys Indeks (VPI) Meet veranderinge in die prysvlakke van markte en verbruikersgoedere en dienste wat deur huishoudings aangekoop word

Vereenvoudiging Skryf 'n uitdrukking op 'n gerieflike wyse deur die uitdrukkings te manipuleer deur optelling en aftrekking van soortgelyke terme

Vergelyking Dit is 'n tipe wiskundige vraag; 'n vergelyking word gevorm wanneer ons wil uitvind watter insetwaardes die uitsetwaardes van twee verskillende uitdrukkings dieselfde sal maak, bv. om te vra wanneer sal $4x - 6$ dieselfde waarde hê as $x^2 - x$, lei ons na 'n kwadratiese vergelyking wat vir ons twee moontlike insetwaardes, 2 en 3, sal gee, waarvoor $4x - 6$ en $x^2 - x$ dieselfde uitsetwaardes (2 en 6 respektiewelik) sal hê; soms is een van die uitdrukkings 'n konstante, bv. $\sin x = -0{,}23$, en in hierdie geval hoef ons slegs die waarde of waardes van x te vind wat ons as inset kan gebruik om die uitset $-0{,}23$ te gee; sien **Onbekende**

Verhouding Lig uit hoeveel maal groter (vermenigvuldiging) of kleiner een meting in vergelyking met 'n ander meting is; sien **Veelvoud**; vergelyk met **Verskil**

Vermenigvuldiging inverse of resiprook Is 'n getal wat wanneer dit met x vermenigvuldig word, dit 'n multiplikatiewe identiteit voortbring

Versameling 'n Versameling van getalle; elke getal word 'n **Element** van die versameling genoem

Verskil Hoeveel groter of kleiner een waarde is in vergelyking met 'n ander; verkry deur aftrekking; vergelyk met **Verhouding** en **Veelvoud**

Vertikale asimptoot 'n Horisontale lyn parallel aan die y-as is 'n vertikale asimptoot van 'n kurwe wanneer die afstand tussen koördinaatpunte op die kurwe en die asimptootlyn voortdurend verminder, maar nooit nul word nie, soos wat die x-koördinate van hierdie punte na regs beweeg (toeneem) of na links beweeg (afneem).

Verwisselende hoeke Hierdie is die twee pare hoeke aan die oorkant van 'n hoeklyn deur twee lyne, tussen die twee lyne; as die twee lyne parallel is, dan is elke paar van die verwisselende hoeke gelyk

Waardeversameling Die versameling van al die moontlike uitsetwaardes van 'n funksie; die waardeversameling van uitsetwaardes is bepalend deur die **Definisieversameling** van insetwaardes; sien **Veranderlike**

Wetenskaplike notasie 'n Manier om 'n desimale getal te skryf as 'n faktor groter as –1m en kleiner as 10, vermenigvuldig met 'n mag van 10

Wisselkoers Die verhouding van een geldeenheid tot 'n ander

***x*-afsnit** Die punt waar die grafiek die x-as sny (ook genoem die horisontale as)

***y*-koördinate** Die punt waar die grafiek die y-as sny (ook genoem die vertikale as)

HOOFSTUK 1 INLEIDING ANTWOORDE

1.

		Verduideliking/betekenis	**Voorbeeld(e)**
(a)	Produk	Die antwoord wat jy kry wanneer jy twee of meer getalle vermenigvuldig	$3 \times a = 3a$; $7 \times 3 = 21$
(b)	Kwosiënt	Die antwoord wat jy kry wanneer jy getalle deel	$\frac{12}{2} = 6$; $18 \div 9 = 2$
(c)	Som	Die antwoord wat jy kry wanneer twee of meer getalle bymekaar getel word	$4 + 5 = 9$
(d)	Verskil	Die antwoord wat jy kry wanneer een getal afgetrek word van 'n ander aftrek	$4 - 2 = 2$
(e)	Faktor	'n Getal wat vermenigvuldig word met 'n ander getal en 'n produk gee	4×2; $(c + 1)(d - 1)$
(f)	Optellingsinverse	'n Getal wat bygetel word by 'n ander getal en nul gee as antwoord	$2 + (-2) = 0$
(g)	Vermenigvuldigingsinverse	Die getal waarmee 'n gegewe getal vermenigvuldig word en 'n antwoord gelyk aan 1	$2 \times \frac{1}{2} = 1$
(h)	Optelling identiteit	Die getal opgetel by enige ander getal en as antwoord die ander getal gee	$3 + 0 = 3$
(i)	Vermenigvuldiging identiteit	Die getal vermenigvuldig met enige ander getal en as antwoord die ander getal gee	$9 \times 1 = 9$
(j)	Koëffisiënt	Die getal wat met 'n veranderlike vermenigvuldig word	$3x^2$ waar 3 die koëffisiënt is
(k)	Oplossing	Die waarde van 'n veranderlike wat waar is vir 'n gegewe wiskundige stelling	$2x + 8 = 14$ het een oplossing $x = 3$
(l)	Omgekeerdes	Die getal waarmee 'n gegewe getal vermenigvuldig moet word om die antwoord een te gee	$2 \times \frac{1}{2} = 1$
(m)	Inset veranderlike	'n Onafhanklike veranderlike in 'n funksie wat die uitsetgetal bepaal	In die funksie $r = t^2 + 2t - 1$, t is die inset veranderlike
(n)	Uitset veranderlike	'n Afhanklike veranderlike in 'n funksie wat deur 'n spesifieke inset veranderlike voortgebring word	In die funksie $r = t^2 + 2t - 1$, is r die inset veranderlike

2.

Uitdrukking	**Tipe uitdrukking**	**Simbool wat die veranderlike verteenwoordig**	**Konstante**	**Koëffisiënt van**
(a) $3x^2 - 7x + 9$	Drieterm	x	9	x is -7
(b) $5s^3 - 11$	Tweeterm	s	-11	s^3 is 5
(c) $-1{,}2t + \pi$	Tweeterm	t	π	t is $-1{,}2$
(d) $105k$	Eenterm	k	0	k is 105
(e) $11 - p + p^3$	Drieterm	p	11	p^3 is 1

4.

Basis Kwantiteit	**SI (Internasionale Stelsel van Maateenhede) basis eenhede**	
	Naam	**Simbool**
lengte	meter	m
massa	kilogram	kg
tyd	sekondes/minute	s/m
elektriese stroom	Ampere	A

5. (a) kilogram (kg) (b) kubieke meter (m^3) (c) meter (m) (d) kilometer (km) (e) liter (l)

8. (a) 1 815 (b) 7 030 (c) 1 700
9. (a) Uitdrukkings is ekwivalent
   (b) Uitdrukkings is nie ekwivalent
10. (a) Uitdrukkings is ekwivalent
   (b) Uitdrukkings is ekwivalent
12. (a) $x(a + b)$ (b) $3(2x - 1)$ (c) $4(1 + 4x)$
   (d) $x(7x - 1)$ (e) $5(x - 3)$ (f) $7(2 - x^2)$
   (g) $3(x - 1)$ (h) $3(5x - 2)$
13. (a) $(a + 3)(a + 1)$ (b) $2(2x^2 + 4x + 1)$
   (c) $(x + 1)(x + 1)$ (d) $(a + b)(c + d)$
   (e) $(a + b)(x + 1)$ (f) $3x(5x - 2)$
14. (a) $a^2 - b^2$ (b) $a^2 + 2ab + b^2$
   (c) $a^2 - 2ab + b^2$ (d) $p^2 + 2pq + q^2$
   (e) $p^2 - 2pq + q^2$ (f) $p^2 - q^2$
   (g) $ac + ad + bc + bd$ (h) $ac - ad + bc - bd$
   (i) $x^2 + 6x + 9$ (j) $x^2 - 9$
   (k) $x^2 - 6x + 9$
15. (a) $(x - 2)(x + 2)$ (b) $(3 - x)(3 + x)$
   (c) $(x - 11)(x + 11)$ (d) $(11 - x)(11 + x)$
   (e) $(13 - 2x)(13 + 2x)$ (f) $(2x - 13)(2x + 13)$
   (g) $(5 - x)(5 + x)$ (h) $(x - 5)(x + 5)$
   (i) $(p - 1)(p + 1)$ (j) $(1 - p)(1 + p)$
18. (a) 23 385 (b) 199 (c) 1 999
23. (a) 417,1 (b) 79,35 (c) 356,14 (d) 23,45
24. (a) 78 (b) 79 (c) 70 (d) 73
25. 4,5
26. (a) $9 \times 10^3 + 8 \times 10^2 + 7 \times 10 + 6$
   $9x^3 + 8x^2 + 7x + 6$, met $x = 10$
   (b) $3 \times 10^2 + 5 \times 10 + 7$
   $3x^2 + 5x + 7$, met $x = 10$
   (c) $2 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 6 \times 10 + 8$
   $2x^3 + 4x^2 + 6x + 8$, met $x = 10$
   (d) $1 \times 10^2 + 2 \times 10 + 3$
   $x^2 + 2x + 3$, met $x = 10$
27. (a) $11x^3 + 9x^2 + 7x + 5$ (b) $9x^2 + 11x + 9$
   (c) $9x^2 + 12x + 10$ (d) $9x^2 + 4x + 4$
   (e) $6x^2 + 8x + 5$
28. (a) $2x - 1$ en $x^2 - x - 6$
   (b) 2 en $-x^2 + 1$
   (c) $11{,}2x + 3$ en $12x^2 + 3{,}6x$
   (d) $x + 10$ en $0{,}21x^2 + 5{,}4x + 24$
   (e) $3x$ en $2x^2 - x - 1$
29. (a) (Aantal dae) = 7 × (Aantal weke)
   (b) (Aantal minute) = 60 × (Aantal ure)
   (c) (Aantal minute) = 25 × (Aantal onderwysers)

29. (a)

Aantal weke	1	2	3	4	5	12	24	33	52
Aantal dae	7	14	21	28	35	84	168	231	364

(b)

Aantal ure	1	2	3	6	18	24	36	48	60	72
Aantal minute	60	120	180	360	1 080	1 440	2 160	2 880	3 600	4 320

(c)

Aantal leerders	100	200	300	350	405	600	660	809	1 000	1 800
Aantal onderwysers	4	8	12	14	16	24	26	32	40	72

30.

x	−10	−5	−1	0	8	14	20	23	50
$5x + 3$	−47	−22	−2	3	43	73	103	118	253

32. Vergelyking
33. (a) Nee. Hulle gee nie dieselfde uitsetwaarde vir dieselfde waarde van x nie.
   (b) Nee. Die twee uitdrukkings is slegs gelyk vir een waarde van x.
   (c) Die twee uitdrukkings verskaf dieselfde antwoorde
34. (a) Nee (b) Onmoontlik
36. $\frac{73}{10}$
37. 7,3
41. (a) $12 - 5 \times 2 + 1 = 3$ (b) $18 - 12 + 3 \times 2 = 12$ (c) $24 \div 4 - 2 + 3 = 7$ (d) $12 \div 4 + 6 + 2 = 11$
   (e) $60 + 20 - 50 = 30$

2154 TechMaths Afr G10 LB.indb 378 2015/11/25 4:14 PM

42. (a) $12 \div 3 + 1 = 5$ (b) $20 \div 5 \div 2 + 3 = 5$
(c) $24 \div 6 \times 2 - 2 + 4 = 10$ (d) $8 \times 3 - 8 \times 3 = 8 - 8 - 3 + 3$

43. 11; 22; 33; 44; 55

44.

Term posisie	1	2	3	4	5	10	17	23	35	100
Term	3	6	9	12	15	30	51	69	105	300

45. (a) –60 (b) –180 (c) –370

46. 2; 6; 18; 54; 162; 486; 1 458; 4 374

47. (a) 2; 6; 18

(b)

Term posisie	1	2	3	13	25	46	57	88	91
Term	2	6	18	1 062 882	$5{,}648 \times 10^{11}$	$5{,}91 \times 10^{21}$	$1{,}05 \times 10^{27}$	$6{,}47 \times 10^{41}$	$1{,}75 \times 10^{43}$

49. (a) 125 (b) 243 (c) 2,343 (d) 2,25 (e) –9 (f) –9 (g) 9 (h) –9

HOOFSTUK 2 GETALLESTELSELS

EXERCISES

1.
   - $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ Die versameling heelgetalle is 'n subversameling van die versameling rasionale getalle
   - $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ Die versameling rasionale getalle is 'n subversameling van die versameling reële getalle
   - $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$ Die versameling heelgetalle is ook 'n subversameling van die versameling van reële getalle
   - $0,56 \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z} \wedge \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ 0,56 is 'n nie-heelgetal rasionale getal en ook 'n reële getal, maar is nie 'n heelgetal nie
   - $7 \in \mathbb{Z}+$ 7 is 'n positiewe heelgetal en ook nie nul nie
   - $pi \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ Die getal $pi = 3,141\ 592\ 653\ 589 \ldots$ is irrasioneel
   - $2 \in \mathbb{N}$ 2 is 'n natuurlike getal, 'n telgetal, 'n rasionale getal en 'n reële getal. Dit is nie 'n negatiewe heelgetal of 'n irrasionale getal nie
   - $0,578\ 5 \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z}$ 0,578 5 nie-heelgetal, rasionale getal en 'n reële getal
   - $\sqrt{3} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ $\sqrt{3}$ 'n irrasionale getal en 'n reële getal
   - $\sqrt{2} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ Ware wortelgetalle is nooit rasionaal nie
   - $\sqrt{-1} \notin \mathbb{R}$ $\sqrt{-1}$ 'n nie-reële getal

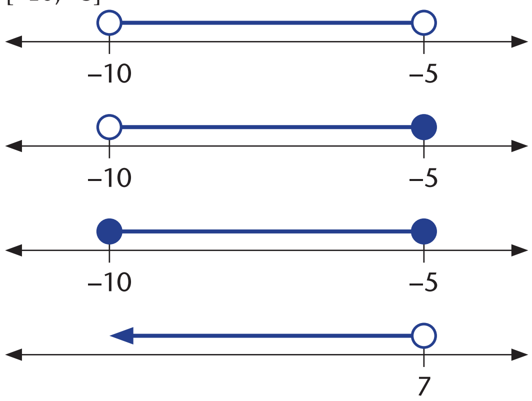
2. (a) Heelgetal; (b) Rasioneel; (c) Irrasioneel; (d) Irrasioneel; (e) Rasioneel; (f) Irrasioneel; (g) Irrasioneel; (h) Heelgetal; (i) Rasioneel (j) Rasioneel; (k) Rasioneel; (l) Rasioneel; (m) Irrasioneel (n) Nie-reël (o) Irrasioneel (p) Irrasioneel (q) Rasioneel (r) Irrasioneel

4. (a) $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ (b) $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ (c) $\mathbb{Q}' \subseteq \mathbb{R}$ (d) $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ (e) $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ (f) $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ (g) $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ (h) $\mathbb{Q}' \subseteq \mathbb{R}$

5. (a) Die versameling getalle gestel
   (b) Die versameling heelgetalle tussen –2 en 11, uitsluitend –2 en ingesluit 11
   (c) y is enige rasionale getal tussen $\frac{1}{3}$ en $\frac{4}{3}$
   (d) Reële getalle tussen $-\sqrt[3]{5}$ en 10,98, uitsluitend $-\sqrt[3]{5}$ en ingesluit 10,98
   (e) x is enige telgetal van 500 tot 550

6. (a) $\{x \in \mathbb{R} \mid -10 < x < -5\}$
   (b) $\{x \in \mathbb{R} \mid -10 < x \leq -5\}$
   (c) $\{x \in \mathbb{R} \mid -10 \leq x \leq -5\}$
   (d) $\{x \in \mathbb{Z} \mid x < 7\}$
   (e) $\{x \in \mathbb{N} \mid x < 7\}$

7. (a) $(-10; -5)$
   $(-10; -5]$
   $[-10; -5]$
   (b)



8. 5(a) 7 5(b) 13 5(c) 2
   5(d) oneindig 5(e) oneindig
   6(a) – (e) oneindige

9. (a) (i) 22,891 452 78 (ii) 22, 891 452 8 (iii) 22,891 453 (iv) 22,891 45
   (b) (i) 21,115 7 (ii) 21,116 (iii) 21, 12 (iv) 21,1
   (c) (i) 58,453 451 7 (ii) 58, 45 (iii) 58, 5 (iv) 58

10. (a) $\frac{16}{100}$ (b) $\frac{15}{90}$ (c) $\frac{1}{9}$
    (d) $\frac{125}{1000}$ (e) $\frac{2}{9}$ (f) $\frac{1}{16}$
    (g) $\frac{7}{9}$ (h) $5\frac{125}{1000}$ (i) $\frac{235}{999}$
    (j) $\frac{794\ 659}{99\ 990}$

11. (a) $0,\dot{3}$ (b) 4,875
    (c) 0,275 714 285 (d) 7,615 384 615
    (e) 0,687 5 (f) $30,1\dot{3}$
    (g) 78, 27272727... (h) 9,916666667
    (i) 47,27272727.... (j) 1,916666667

13. (a) $1,414^2 = 1,999396$ en $1,415^2 = 2,002225$
    (b) 1,9966 en 1,9993 (c) 1,997 en 1,999

15. (a) tussen 1 en 2 (b) 2
    (c) tussen 2 en 3 (d) tussen 2 en 3
    (e) tussen 2 en 3 (f) tussen 2 en 3
    (g) 3 (h) tussen 3 en 4
    (i) tussen 3 en 4 (j) 5
    (k) tussen 1 en 2 (l) 2
    (m) tussen 2 en 3 (n) tussen 2 en 3
    (o) tussen 4 en 5 (p) tussen 2 en 3
    (q) tussen 4 en 5 (r) tussen 2 en 3

18. (a) 1 (b) 3 (c) 7 (d) 15
(e) 2 (f) 6 (g) 14 (h) 5
(i) 9 (j) 17 (k) 81 (l) 70
(m) 97 (n) 119

19. (a) 1101111 (b) 1110000 (c) 1110001
(d) 1111111 (e) 10000001 (f) 101101101
(g) 1010 (h) 1100100 (i) 1111101000
(j) 110000000 (k) 111100100 (l) 110000001
(m) 111110100 (n) 1001101111

20. (a) 11111 > 11110 (b) 11111 < 100000
(c) 10101 > 10010 (d) 110010 < 110100
(e) 101010 < 101101 (f) 1001011 < 1010101

23. (a) 11 (b) 101 (c) 110 (d) 111
(e) 111 (f) 1111 (g) 1110 (h) 1111

24. (a) 101 (b) 110 (c) 1010 (d) 1110
(e) 11001 (f) 10111 (g) 100110 (h) 101000
(i) 110000 (j) 1011101 (k) 100 (l) 1000
(m) 1000 (n) 10000 (o) 100000
(p) 100001 (q) 100011 (r) 100111

25. (a) 1 (b) –1 (c) 10 (d) 11
(e) –11 (f) 11 (g) 1000 (h) 1100
(i) 1110 (j) 1001 (k) 10 (l) 110
(m) 100 (n) 1000 (o) 11110 (p) 11101
(q) 11011 (r) 10111

27. (a) 1001 (b) 10010 (c) 100100
(d) 1111 (e) 1000 (f) 1010
(g) 1000001 (h) 110001 (i) 1011011
(j) 111111 (k) 10011010 (l) 1110101
(m) 100101011 (n) 11100001 (o) 100111011
(p) 1000110111 (q) 10100011001
(r) 100101011101

28. (a) 10 (b) 1001 (c) 10 s 1
(d) 1 (e) 101 (f) 111 s 1
(g) 10 s 1 (h) 11 (i) 1011
(j) 100 (k) 111 (l) 111
(m) 1010 s 1

29. (a) Denkbeeldig (b) Reël (c) Denkbeeldig
(d) Reël (e) Denkbeeldig (f) Reël
(g) Denkbeeldig (h) Reël (i) Reël
(j) Reël

KONSOLIDERINGSOEFENINGE

1. (a) heelgetal (b) rasioneel (c) irrasioneel
(d) rasioneel (e) rasioneel (f) natuurlik
(g) nie-reël (h) irrasioneel

3. (a) $\frac{3}{4}$ (b) $\frac{97}{99}$ (c) $\frac{1}{40}$
(d) $\frac{126}{125}$ (e) $4\frac{14}{33}$ or $\frac{438}{99}$ (f) $\frac{11}{8}$
(g) $\frac{9}{50}$ (h) $\frac{12}{99}$ (i) $\frac{3}{4}$
(j) $\frac{25}{8}$ (k) $\frac{871}{999}$ (l) $\frac{223}{99}$

4. (a) 0,857 421 857 (b) 0,875
(c) 0,888... (d) 0,9
(e) 0,353 5... (f) 0,015 15....
(g) 0,666 6... (h) 0,066 66...
(i) 0,366 66... (j) 3,857 142 857
(k) 6,466 666... (l) 3,477 272 727...

5. (a) tussen 2 en 3 (b) tussen 3 en 4
(c) tussen 5 en 6 (d) tussen 2 en 3
(e) tussen 3 en 4 (f) tussen 2 en 3

6. 1; 10; 11; 100; 101; 110; 111; 1000; 1001; 1010 1011; 1100; 1101; 1110; 1111; 10000; 10001; 10010; 10011; 10100

7. (a) 1 (b) 7 (c) 3 (d) 2
(e) 6 (f) 9

8. (a) 1110000 (b) 101101
(c) 1011 (d) 11000110101
(e) 110100100 (f) 1101

9. (a) 1000 (b) 11 (c) 1000
(d) 1001 (e) 10011 (f) –1
(g) 1 (h) –10 (i) 10100
(j) 11100

10. (a) 111 (b) 10 (c) 1100
(d) 1110 (e) 1000110 (f) 10
(g) 1 rem 1 (h) 1111 (i) 1001
(j) 111

HOOFSTUK 3 EKSPONENTE ANTWOORDE

OEFENINGE

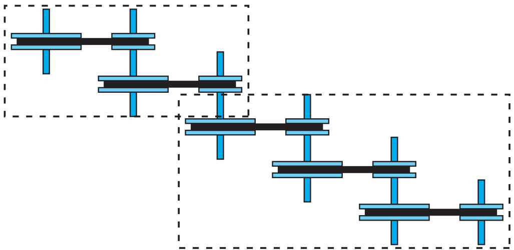
1.

Stroom vermenig-vuldiger by elke dinode	Aantal dinodes	Gekombineerde stroom vermenigvuldiger in uitgebreide vorm	Gekombineerde stroom vermenig-vuldiger in eksponensiële vorm	Gekombineerde stroom vermenig-vuldiger in eksponensiële vorm
2	5	$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$	2^5	32
2	10	$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$	2^{10}	1 024
3	5	$3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$	3^5	243
4	5	$4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4$	4^5	1 024
4	9	$4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4$	4^9	262 144
6	5	$6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6$	6^5	7 776
3	9	$3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$	3^9	729
9	3	$9 \times 9 \times 9$	9^3	729
5	6	$5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5$	5^6	15 625
1,5	6	$1{,}5 \times 1{,}5 \times 1{,}5 \times 1{,}5 \times 1{,}5 \times 1{,}5$	$1{,}5^6$	11,390 625
1	(x)	1 x 1 x 1 x... (x aantal kere)	1^x	1

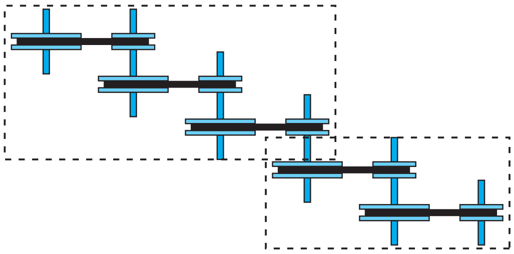
2. (a) Een laag: effektiewe klanktransmissie is slegs 0,3 wat $0{,}3^1$ is in eksponensiële vorm (dus om $x^1 = x$ te hê maak sin)
   (b) Geen lae behoort geen verandering in klankintensiteit te beteken; die klanktransmissie faktor is dus 1; deur $0{,}3^0 = 1$ te definieer maak dus sin
3. Die omtrek van die klein wiel is ’n derde van die omtrek van die groot wiel. Vir elke draai van die groot wiel sal die klein wiel dus drie keer moet draai (ons neem aan daar is geen gly aksie nie)
   (a) $\frac{1}{3}$ of 3^{-1} of $0{,}\dot{3}$
   (b) Hulle is omgekeerdes
4. (a) $3 \times 3 \times 3 \times 3$ of 3^4 (wat 81 keer vinniger as die aandrywer is)
   (b) $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{3^4} = 3^{-1} \times 3^{-1} \times 3^{-1} \times 3^{-1} = (3^{-1})^4 = 3^{-4}$ wat almal gelyk is
   (c) $3 \times \frac{1}{3} = 3 \times 3^{-1} = 3^0 = 1$ dit maak nie saak watter een van die twee groot katrolle die aandrywer is nie
   (d) $\frac{1}{3} \times 3 = 3^{-1} \times 3 = 3^0 = 1$ weereens maak dit nie saak watter van die klein katrolle die aandrywer is nie
   (e) Deur die individuele bandaandrywers om te keer is dieselfde as om die spoedfaktor om te keer d.i. dieselfde as om die spoedfaktor tot ’n mag van 1 te verhoog. Om x^{-1} te definieer maak dus sin.
5. Die volgende is ’n riglyn tot hierdie vraag:

   A: mees linkse aandrywer: $3 \times \frac{1}{3} \times 3$; $3 \times 3^{-1} \times 3$; 3^{1-1+1}; 3^1; 3
   B: mees linkse aandrywer: $3 \times 3 \times \frac{1}{3}$; $3 \times 3 \times 3^{-1}$; 3^{1+1-1}; 3^1; 3
   Ens.
   Let op dat al die verskillende vorms ekwivalent is
   A: mees regse aandrywer: $\frac{1}{3} \times 3 \times \frac{1}{3}$; $3^{-1} \times 3 \times 3^{-1}$; 3^{-1+1-1}; 3^{-1}; $\frac{1}{3}$
   B: mees regse aandrywer: $3 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3}$; $3 \times 3^{-1} \times 3^{-1}$; 3^{-1-1+1}; 3^{-1};
   Fokus op die ekwivalensie van die verskillende vorme
6. (a) 7^{6+6} (b) 7^{14-2} (c) $7^{6 \times 2}$
7. $3^6 \times 5^9 = (3 \times 5)^6 \times 5^3 = (3^2 \times 5^2)^3 \times 5^3 = (3^2 \times 5^3)^3$ is van die oplossings

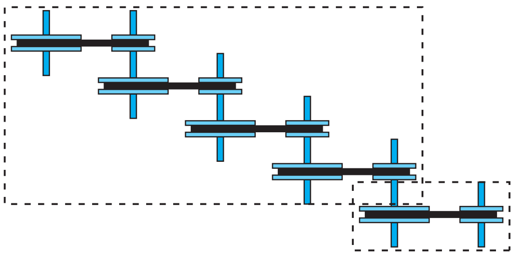
8. (a) Aandrywing is bo links in alle diagramme:
Enkel bandaandrywing met spoedfaktor 4
Saamgestelde bandaandrywing met spoed faktor $= 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 4^4$
Effektiewe spoed faktor $= 4^1 \times 4^4 = 4^5$



Saamgestelde bandaandrywing met spoed faktor 4^2
Saamgestelde bandaandrywing met spoed faktor 4^3
Effektiewe spoedfaktor $= 4^2 \times 4^3 = 4^5$

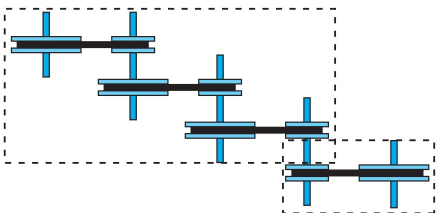


Saamgestelde bandaandrywing met spoed faktor 4^3
Saamgestelde bandaandrywing met spoed faktor 4^2
Effektiewe spoedfaktor $= 4^3 \times 4^2 = 4^5$

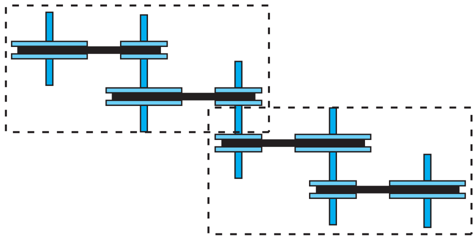


Saamgestelde bandaandrywing met spoed faktor 4^4
Bandaandrywing met spoedfaktor 4
Effektiewe spoedfaktor $= 4^4 \times 4^1 = 4^5$

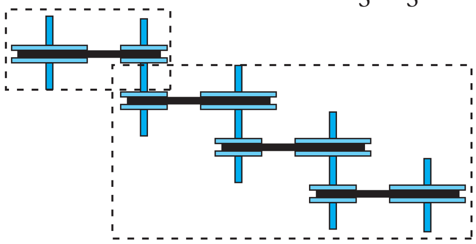
(b) Drywer links bo:



Saamgestelde bandaandrywing met spoed faktor $5 \times 5 \times 5 = 5^3$
Bandaandrywing met spoedfaktor $\frac{1}{5} = \frac{1}{5^1}$
Effektiewe spoedfaktor $= 5^3 \times \frac{1}{5^1} = \frac{5^3}{5^1} = 5^{3-1} = 5^2$

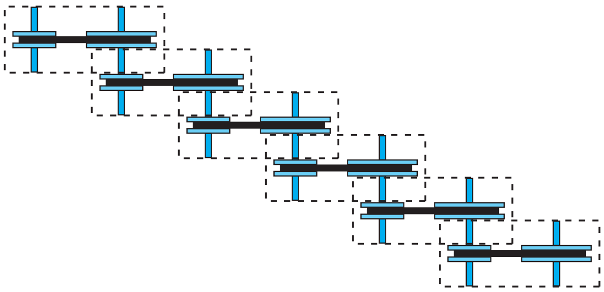


Saamgestelde bandaandrywing met spoed faktor $5 \times 5 = 5^2$
Saamgestelde bandaandrywing met spoed faktor $\frac{1}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{5^2}$
Effektiewe spoedfaktor $= 5^2 \times \frac{1}{5^2} = \frac{5^2}{5^2} = 5^{2-2} = 5^0$

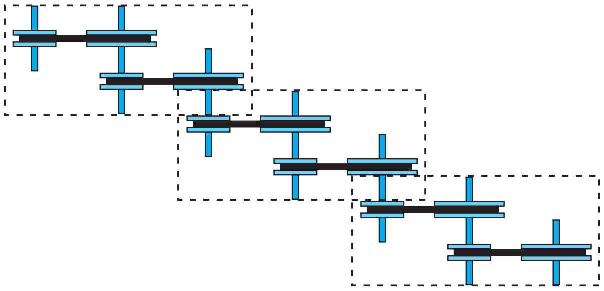


Bandaandrywing met spoedfaktor $5 = 5^1$
Saamgestelde bandaandrywing met spoed faktor $\frac{1}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{5^3}$
Effektiewe spoedfaktor $= 5^1 \times \frac{1}{5^3} = \frac{5^1}{5^3} = 5^{1-3} = 5^{-2}$

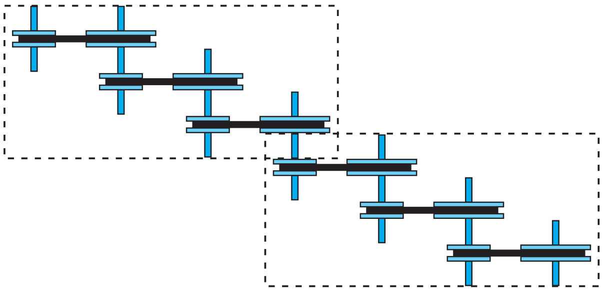
(c) Aandrywer bo links:



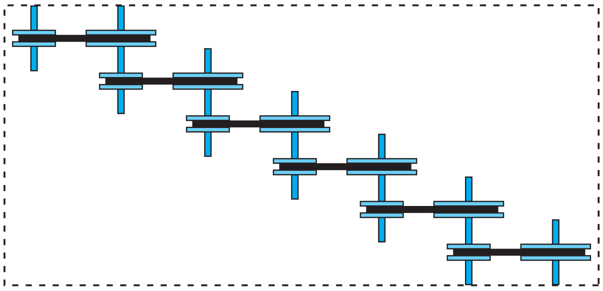
Effektiewe spoedfaktor $= (0{,}1^1)^6 = 0{,}1^{1 \times 6}$



Effektiewe spoedfaktor $= (0{,}1^2)^3 = 0{,}1^{2 \times 3}$

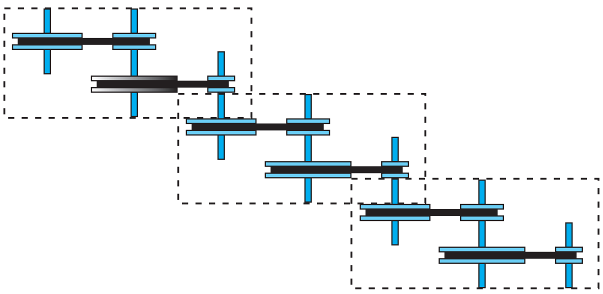


Effektiewe spoedfaktor = $(0{,}1^3)^2 = 0{,}1^{3\times 2}$



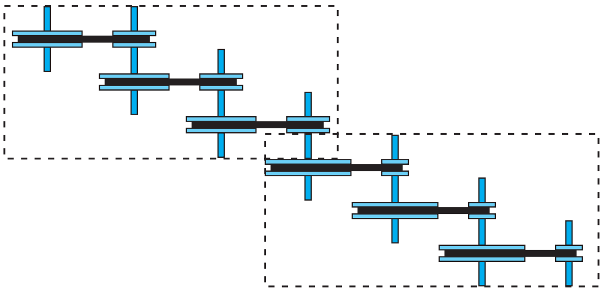
Effektiewe spoedfaktor = $(0{,}1^6)^1 = 0{,}1^{6\times 1}$

(d)



Elk van die drie saamgestelde aandrywers het 'n spoedfaktor van 2×5

Effektiewe spoedfaktor = $(2 \times 5)^3$



Hierdie saamgestelde bandaandrywing het 'n effektiewe spoedfaktor $2 \times 2 \times 2 = 2^3$

Hierdie saamgestelde aandrywing het effektiewe spoedfaktor van $5 \times 5 \times 5 = 5^3$

Effektiewe spoedfaktor = $(2^3) \times (5^3)$

Die twee saamgestelde bandaandrywers is ekwivalent aangesien albei dieselfde effektiewe spoedfaktor gee: $(2 \times 5)^3 = 2 \times 5 \times 2 \times 5 \times 2 \times 5 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5 = 2^3 \times 5^3$

9. (a) Korrek (b) Inkorrek
   (c) Korrek (d) Korrek

10. (a) 8×3^4 (b) Nee (c) 81×8
    (d) $18 \times 4 \times 3^2$ (e) $18 \times 12 \times 3$ (f) $3^4 \times 2^3$
    (g) Nee (h) $4^2 \times 9^2 \div 2$ (i) $6^4 \times 26^4 \div 2$
    (j) 3×6 (k) $18^3 \div 3^2$ (l) 2×18^2
    (m) 648

11. (a) $(5)^{2+7}$; 5^9; $5^3 \times 5^6$; $5^4 \times 5^5$; $5^8 \times 5^1$
    (b) 8^8; $(2^3)^8$; 2^{24}; $(2^4)^6$; $2^{16} \times 2^8$
    (c) $(x)^{5+4}$; x^9; $x^8 \times x^1$; $x^7 \times x^2$; $x^6 \times x^3$
    (d) 64^{p+4}; $6^{4p} \times 6^4$; $6^{4p} \times 6^2 \times 6^2$; $(6^{2p} + 2)^2$; $6^{2p} \times 6^{2p} \times 6^3 \times 6^1$
    (e) 4^3; 4^{5-2}; 2^6; $(2^3)^2$; $2^2 \times 2^2 \times 2^2$
    (f) $\frac{7^5}{7^4}$; 7^{5-4}; 7^1; $7^5 \times 7^{-1}$; $\frac{16\,807}{2\,401}$
    (g) $\frac{y^8}{y^6}$; y^2; y^{8-6}; $y \times y$; $y^8 \times y^{-6}$
    (h) $\frac{2^{3p} \times 2^3}{2^p \div 2^2}$; $2^{3p+3-(p-2)}$; 2^{2p+5}; $2^{2p} \times 2^5$; $2^{3p} \times 2^3 \div (2^p \times 2^{-2})$
    (i) $2^{3\times 4}$; 2^{12}; $2^6 \times 2^6$; $(2^3)^2 \times (2^3)^2$; $8^2 \times 8^2$
    (j) $\left(\frac{1}{x^3}\right)^{-5}$; $1x -{}^{15}$; x^{15}; $x^{12} \times x^3$; $x^{10} \times x^5$
    (k) $3^{2(x-3)}$; 3^{2x-6}; $3^{2x} \div 3^6$; $9^x \div 9^3$; $\left(\frac{3^x}{3^3}\right)^2$
    (l) 7^{-6}; $\frac{1}{7^6}$; $\left(\frac{1}{7^3}\right)^2$; $\left(\frac{1}{7^2}\right)^3$; $(7^{-3})^2$
    (m) $5^7 \times 9^2$; $5^7 \times 81$; $5^3 \times 5^4 \times 3^4$; $78\,125 \times 81$; $6\,328\,125$
    (n) $2^3 \times 2^2$; 2^{3+2}; 2^5; $(2^1)^5$; 8×4
    (o) $x^3 \times x^2 \times y \times y$; $x^3 \times x^2 \times y^2$; $x^3 \times (x \times y)^2$; $x^4 \times x \times y^2$; $x^3 \times x \times x \times y \times y$
    (p) $(3 \times 2)^2 \times 5^2$; $3^2 \times 2^2 \times 5^2$; $(3 \times 2 \times 5)^2$; 30^2; 900

12. (a) 2^8 (b) 2^8
    (c) 2^8 wys dat (a), (b) en (c) dieselfde is, omdat...
    (d) alreeds in eenvoudigste vorm
    (e) $2^5 + 2^4 = 2.2^4 + 2^4 = 2^4(2 + 1) = 2^4.3$
    (f) 2^4 (g) $\frac{1}{2^7}$
    (h) $\frac{1}{2^7}$ dieselfde as (g) omdat
    (i) $\frac{2}{3^2.5}$ (j) $\frac{1}{2.3^2.5}$ (k) 1 (l) 5^{25}
    (m) $2^6.3^3$ (n) $\frac{1}{2^2}$ (o) 1 (p) 2^63^6
    (q) $\frac{2.5}{3}$ (r) 2^3 (s) 3^3 (t) 3.5^4
    (u) 2 (v) $\frac{2^2}{3^3}$ (w) $\frac{2^5}{3^5}$ (x) $\frac{2}{3.5}$

13. (a) p^6q^6 (b) p^6q^6 (c) $\frac{1}{3a^2}$ (d) 3^{2m}
    (e) 3^4a^9 (f) 2^4p^2 (g) 2^5 (h) 3^x
    (i) $\frac{1}{2^2}$ (j) $\frac{7ab}{2c}$ (k) $\frac{5}{2}$ (l) $\frac{5^2}{3^4}$
    (m) $\frac{3b^4}{2^3}$ (n) 1

2154 TechMaths Afr G10 LB.indb 384 2015/11/25 4:14 PM

14. (a) 3 (b) 3 (c) 6 (d) 2
(e) 1 (f) 0 (g) -9 (h) 3 of -3
(i) -2 (j) 4 (k) 9 (l) 1
(m) -2 of -3 (n) 3 (o) $-0{,}5$ (p) $\frac{1}{3}$
(q) $-\frac{3}{4}$ (r) Geen oplossing
(s) Geen oplossing (t) Geen oplossing

15. klankintensiteit in die kontrolekamer

$= \text{klankintensiteit in die ateljee} \times 0{,}1^{\text{aantal lae}}$

$$(5 \times 10^{-7}) = (5 \times 10^{-3}) \times 0{,}1^{n}$$

$$\begin{aligned} 0{,}1^{n} &= \frac{5 \times 10^{-7}}{5 \times 10^{-3}} \\ &= 10^{-4} \\ &= (10^{-1})^{4} \\ &= 0{,}1^{4} \\ n &= 4 \end{aligned}$$

Jy het dalk opgelet dat daar 'n faktor $\frac{1}{10\,000}$ verandering in klankintensiteit is en het afgelei dat daar 4 lae is.

16. (a) 8s aangesien $50\% = \frac{1}{2}$

(b) Jy moet sien dat $12{,}5\% = 0{,}125 = \frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^{3}$ dat dit $3 \times 8 = 24$s, anders moet jy 'n vergelyking opstel en oplos:
lading later = lading by begin $\times\, 0{,}5^{\text{aantal periodes}}$
$12{,}5\% = 100\% \times 0{,}5^{n}$
$0{,}5^{n} = 0{,}125 = 0{,}5^{3}$
$n = 3$
So dit sal 3 periodes van 8s = 24s.

(c) lading later = lading by begin $\times\, 0{,}5^{\text{aantal periodes}}$

$$\begin{aligned} 3{,}125\% &= 100\% \times 0{,}5^{n} \\ 0{,}5^{n} &= \frac{3{,}125}{100} \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{n} &= \frac{1}{32} \qquad [100 \div 3{,}125 = 32] \\ &= \frac{1}{2^{5}} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{5} \\ n &= 5 \end{aligned}$$

Dit sal dus $5 \times 8 = 40$ s vir die lading neem om af te neem tot 3,125% van die aanvanklike waarde.
'n Ander manier: Elke periode deur die % gehalveer:

$n = 0$	100%
$n = 1$	50%
$n = 2$	25%
$n = 3$	12,5%
$n = 4$	6,25%
$n = 5$	3,125%

(d) Hierdie is moeilik (daar is nie 'n manier wat hulle 'n oplossing kan vind deur 'n vergelyking op te stel nie). Jy moet probeer om duidelikheid te kry en sien hoeveel periodes kom naby aan 1%.
Deur die tabel hierbo te gebruik wat die % vir elke periode in (c) wys, kan jy sien dat daar na 6 periodes $\frac{1}{64} = 1{,}56\%$ van die lading is en na 7 periodes sal daar $\frac{1}{128} = 0{,}78\%$ wees.
Dus, iewers tussen $6 \times 8 = 48$s and $7 \times 8 = 56$s.

17. (a)
$$\begin{aligned} 0{,}2 \times 3^{n} &= 48{,}6 \\ 3^{n} &= 243 \\ &= 3^{5} \\ n &= 5 \end{aligned}$$
Dit maak nie 'n verskil nie omdat die spoedfaktore almal met mekaar vermenigvuldig word en omdat dit nie 'n verskil maak wanneer ons die volgorde van vermenigvuldiging verander nie

18.
$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}\right)^{n} &= \frac{1{,}50}{3072} \\ 2^{n} &= \frac{3072}{1{,}50} \\ &= 2048 \\ &= 2^{11} \\ n &= 11 \end{aligned}$$

19. (a) 8×10^{3} (4 b.f. or 1 b.f. afhangende van die konteks)
(b) 8×10^{0} (1 b.f.) (c) 8×10^{-3} (1 b.f.)
(d) 1×10^{5} (6 b.f.) (e) $3{,}652\,5 \times 10^{2}$ (5 b.f.)
(f) $2{,}34 \times 10^{5}$ (3 b.f.) (g) $4{,}506 \times 10^{5}$ (7 b.f)
(h) $9{,}600 \times 10^{-14}$ (4 b.f.)
(i) $1{,}673 \times 10^{-27}$ kg (4 b.f.)
(j) $9{,}454\,256 \times 10^{13}$ km (7 b.f.)
(k) $7{,}3 \times 10^{-15}$ m (2 b.f.)
(l) $1{,}3 \times 10^{-10}$ m (2 b.f.)
(m) naastenby $10^{-10} \div 10^{-15}$ wat 10^{5} of 'n honderd duisend keer groter is
(n) 2×10^{17} kg/m^{3} (1 b.f. – die nulle kan duidelik nie beduidend wees nie)
(o) $1{,}932\,0 \times 10^{1}$ kg/m^{3} (5 b.f. die nul is duidelik doelbewus)
(p) naastenby 10^{-16} of een tien miljoen biljoenste

20. (a) $2{,}52 \times 10^{9}$ (afgerond tot 2 b.f.: $2{,}5 \times 10^{9}$)
(b) 7×10^{-3} (afgerond tot 2 b.f.: $7{,}0 \times 10^{-3}$)
(c) $9{,}72 \times 10^{1}$ (afgerond tot 2 b.f.: $9{,}7 \times 10^{1}$)
(d) $6{,}75 \times 10^{-9}$ (afgerond tot 2 b.f.: $6{,}8 \times 10^{-9}$)
(e) -5×10^{0} (afgerond tot 2 b.f.: $-5{,}0 \times 10^{0}$)
(f) $6{,}00 \times 10^{3}$
(g) $3{,}0 \times 10^{-3}$
(h) $1{,}25 \times 10^{3}$ (afgerond tot 2 b.f.: $1{,}3 \times 10^{3}$)

22. (a) $3{,}80 \times 10^3$ kW (b) $3{,}80 \times 10^6$ W
(c) $3{,}80 \times 10^{-3}$ GW (d) $5{,}7 \times 10^3$ mA
(e) $5{,}7 \times 10^6$ nA (f) $1{,}8 \times 10^{-2}$ mm
(g) $1{,}8 \times 10^{-5}$ mm (h) $1{,}8 \times 10^{-8}$ m
(i) $1{,}8 \times 10^{-11}$ km (j) $1{,}8 \times 10^2$ Å
(k) $1{,}75 \times 10^3$ mg (l) $1{,}75 \times 10^1$ mg
(m) $1{,}75 \times 10^{-1}$ dag (n) $1{,}75 \times 10^{-2}$ mg

23. (a) 200 mm² (b) 300 cm²
(c) 5×10^6 mm² (d) $9{,}823\text{m}^2 \times 10^{-3}$ m²
(e) $4{,}588 \times 10^{-5}$ mm² (f) 5 g/l
(g) 15 g/l (h) $6{,}556 \times 10^{-2}$ kg/m³
(i) 2×10^4 kg/m³ (j) 8×10^4 kg/m³

KONSOLIDERINGSOEFENINGE

1. (a) 3^5 (b) $2^5 \times 5^2 \times 3^3$
(c) $(-2)^4$ (d) $7^2 \times x^3 \times y^2$

2. (a) 32 (b) −27 (c) 40 (d) −1
(e) 46 (f) 1

3. (a) 1 (b) 0
(c) 1 (d) Ongedefinieerd
(e) $3{,}9 \times 10^{24}$ (f) Ongedefinieerd

4. (a) 3^5 (b) 2^{12} (c) 5^3 (d) 7^{11}
(e) 7^4 (f) $2^3 \times 3^6$ (g) 1 (h) $\frac{5 \times 2}{3}$
(i) $\frac{1}{5^{11}}$ (j) $\frac{1}{2^7 \times 3}$

5. (a) 5^9 (b) x^9 (c) x^9
(d) $3^{4p+4} \times 2^{4p+4}$ (e) 2^6 (f) 7
(g) y^2 (h) 2^{2p+p} (i) 2^{12}
(j) x^{15} (k) 3^{2x-6} (l) $\frac{1}{7^6}$
(m) $5^7 \times 3^4$ (n) 2^8 (o) x^5y^2
(p) $3^2 \,.\, 2^2 \,.\, 5^2$

6. (a) x^5 (b) y^7x^2 (c) $2x^7$
(d) $2x3y$ (e) $10xy^4+{}^2x^5y^2$ (f) $\frac{12e^5}{d^3}$
(g) b^2c^3 (h) $\frac{1}{m^4n^{10}}$ (i) 2^3d^9
(j) $\frac{1}{m^3n^7}$ (k) 5^x (l) $3^{x-y}\,2^{x-y}$
(m) $\frac{1}{13^{13}}$ (n) $7^{a+2b} \,.\, 11^{7b-13a}$

7. (a) 5^8 (b) 6^6 (c) 1 (d) -5^{15}
(e) x^6 (f) 3^{2x-6} (g) $\frac{5^2}{7^2}$ (h) 4
(i) 5^6 (j) $\frac{1}{16a^4}$

8. 12,31 kg

9. 0,08 gram

10. (a) 360 dae (b) 32 dae (c) vraag (a)

11. (a) 4.2435×10^8 (b) $3{,}689 \times 10^6$
(c) $5{,}456 \times 10^{25}$ (d) 6×10^{13}
(e) $1{,}206 \times 10^3$ (f) $4{,}297 \times 10^{-2}$

12. (a) $1{,}675 \times 10^{-27}$ kg (b) $1{,}675 \times 10^{-24}$ kg
(c) $1{,}675 \times 10^{-21}$ kg
(d) $5{,}97 \times 10^{23}$ neutrone

13. (a) $6{,}813 \times 10^5$ kg
(b) $4{,}01 \times 10^7$ m; $4{,}01 \times 10^9$ cm; $4{,}01 \times 10^{10}$ m

14. (a) $8{,}65 \times 10^3$ kW (b) $4{,}65 \times 10^6$ W
(c) $4{,}3 \times 10^{-9}$ pA (d) $5{,}5 \times 10^{-7}$ dm
(e) 556×10^{-2} g (f) $1{,}28 \times 10^{-1}$ mm
(g) $5{,}2 \times 10^{-11}$ TG (h) $8{,}8 \times 10^4$ MHz
(i) 3,679 g (j) 0,658 kL

15. (a) 1×10^6 (b) 15 kL (c) 0,16 g/L

16. (a) 100 teëls. (b) 100 cm²

17. (a) 63 reise. (b) 2,5 g/cm³
(c) 250 000 grawe.

18. (a) 9 975 jare (b) dieselfde as in (a)
(c) 4 560 jaar oud. (d) 7 600 jaar oud.

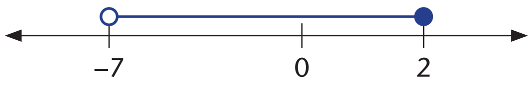
19. 100 000 syfers

HOOFSTUK 4 ALGEBRAÏESE UITDRUKKINGS ANTWOORDE

OEFENINGE

1. (a)


   (b) $x \in [3; 4)$ (c) $\{x \mid 3 \leq x < 4\}$

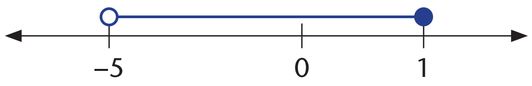
2. (a)


   (b) $x \in (-7; 2]$ (c) $\{x \mid -7 < x \leq 2\}$

3. (a)


   (b) $x \in (-\infty; -9) \cup x \in (-1; \infty)$

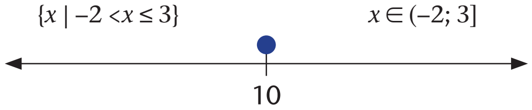
   (c) $\{x \mid x < -9 \text{ or } x > -1\}$

4. (a)


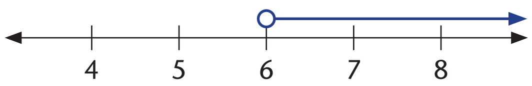
   $\{x \mid -5 < x \leq 1\}$ $x \in [-5; 1)$

   (b) $-2 < x \leq 3$

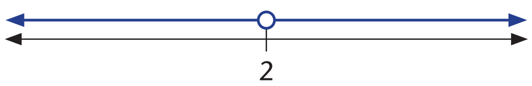

   $\{x \mid -2 < x \leq 3\}$ $x \in (-2; 3]$

   (c)


   $\{t \mid t = 10\}$ $t \in [10]$

   (d)


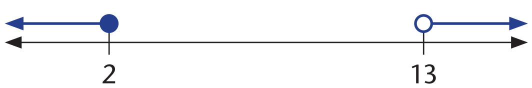
   $\{s \mid s > 6\}$ $s \in (6; \infty)$

   (e) $m \neq 2$
   $m < 2$ or $m > 2$


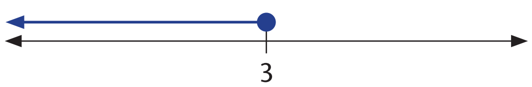
   $\{m \mid m < 2 \text{ or } m > 2\}$ $m \in (-\infty; 2) \cup (2; \infty)$

5. (a)


   $t \in (-7; 5]$

   (b)


   $m \in (-\infty; 2] \cup (13; \infty)$

6. (a)


   $\{k \mid k \leq 3\}$

   (b)


   $\{k \mid k \leq 3 \text{ or } k > 7\}$

7. (a) (i) neem af met 10 (ii) neem toe met 2
   (iii) 90 (iv) 30
   (v) R666,67 (vi) R0,00
   (b) Dit is verkeerd.

8. (a) eenterm (b) tweeterm
   (c) tweeterm (d) drieterm
   (e) eenterm (f) eenterm
   (g) eenterm (h) tweeterm
   (i) eenterm (j) eenterm
   (k) tweeterm (l) veelterm
   (m) drieterm (n) tweeterm
   (o) tweeterm (p) eenterm

9. (a) $-m^2 + 8m + 3mn - 2n + 1$
   Evalueer vir $m = 2$ en $n = 3$
   (b) $14x - 7xy - 2y$
   Evalueer vir $x = 2$ en $y = 3$
   (c) $4x^2 - 2x$
   Evalueer vir $x = 2$

10. (a) (i) $8m^2n^2 + 2n - m^2 - 3m^2n$
   (ii) $x^2y^2 + 5y^3 + 5x^2 + 7y$
   (iii) $6r^2s^2 + 8s^3 - 10r^2 + 4s^2$
   (iv) $10r^2s^3 + 5r^2s^2$
   (v) $8t^2u^2 - 2n^2 + 4k^2l^2$
   (vi) $2a^2b^{3c} + 2h^3$
   (b) (i) $16x^2 + 13x + 10$ (ii) $10x^2 - 6x$
   (iii) $7r^2s^3 + 2t^2 + 4$ (iv) $-5p^2 + 2q^2r^3$
   (v) $8x^3y - 2z^2$ (vi) $-2x^3 + x^2 - 3x + 1$
   (c) (i) $5r^2 - 21r - 7$ (ii) $10x + 3xy - 8y$
   (iii) $5x^2 + 3x + 1$ (iv) $3x^2 - 7x + 1$
   (v) $9m^3 - 9m^2 - m$ (vi) $-m^2$

11.

Vermenigvuldig	**$2x$**	**$-9y$**
$3y$	$6xy$	$-27y^2$
$-5x$	$-10x^2$	$45xy$

   (a) $6xy$ (b) $-27y^2$
   (c) $6xy - 27y^2$ (d) $-4xy + 18y^2$
   (e) $6xy - 27y^2$ (f) $-2y + 18y^2$

12. (a) $2x^2 + 3x$ (b) $-2x^2 - 3x + 18$
   (c) $6xy + 4x + 9y + 6$ (d) $6x^2 + 13x + 6$
   (e) $2x - 3y + 5$ (f) $\frac{2x + 3}{3x + 2}$
   (g) $2x - 3y + 1$

2154 TechMaths Afr G10 LB.indb 387 2015/11/25 4:14 PM

13. (a) $q^2 + 6q + 9$ (b) $9q^2 - 6q + 1$ (c) $9 - q^2$ (d) $-3q^2 - 8q + 3$
(e) $4x^2 + 20xy + 25y^2$ (f) $4x + 10y - 4x^2 - 20xy - 25y^2$ (g) $4x^2 - 25y^2$

14. (a) $4ax + 6bx + 2cx + 2ay + 3by + cy$ (b) $2ac + ac + 4ae + 6bc + 3bd + 12be$
(c) $3ax - 2bx + 3cx + 3ay - 2by + 3cy$ (d) $8ax - 6ay + 2az + 12bx - 9by + 3bz$
(e) $9ax + 6bx + 9cx + 6ay + 4by + 6cy$ (f) $10dx - 6ex + 2fx + 10dy - 6ey + 2fy$

15. (a) (i) $3x + 3$ (ii) $x^2 + x$ (iii) $-ax - 3x$ (iv) $-a^2 + ab$
(b) (i) $5x^2 + x$ (ii) $-2 - 2a + b - a^2$ (iii) $2a + 3$ (iv) $-7a^2 + 3a$

16. (a) $15x^2 10y$ (b) $x^2 - 3x$ (c) $6x^3 + 15x^2y^3$ (d) $3m^3 + 2mn - 3m$
(e) $12s^5 - 20s^2t + 28s^2$ (f) $a^2 + 2ab + b^2$ (g) $9a^2 + 6ab + b^2$ (h) $a^2 - 2ab + b^2$
(i) $9a^2 - 6ab + b^2$ (j) $a^2 - b^2$ (k) $9a^2 - b^2$ (l) $ax + bx + ay + by$

17. (a) $5x^2 + 4x$ (b) $4a^2$ (c) $3b^2 + b$ (d) $7y + 3$ (e) $x^3 + 3x^2 - x - 3$

18.

	Vir elk van die volgende uitdrukkings, vind:	$3x + 6y$	$4a^3 + 2a$	$5x + 2x$	$ax^2 - bx^3$	$12a^2b + 18ab^2$
(a)	die faktore (1 uitgesluit) van die eerste term;	3 en x	4 en a	5 en x	a en x	12 en a en b
(b)	die faktore (1 uitgesluit) van die tweede term;	2; 3 en y	2 en a	2 en x	b en x	18 en a en b
(c)	die hoogste algemene faktore van die twee terme;	3	$2a$	x	x^2	$6ab$
(d)	Skryf die uitdrukking in faktor vorm	$3(x + 2y)$	$2a\ (2a^2 + 1)$	$x(5 + 2)$	$x^2(a - bx)$	$6ab(2a + 3b)$

19. (a) $(a - b)(x + 1)$ (b) $(a - b)(x - 1)$ (c) $(y + 1)(x + 1)$ (d) $(a + b)(x - 1)$
(e) $(2x - 3)(3x + 1)$ (f) $(y - 4)(y + 3)$ (g) $(x + y)(p + q)$ (h) $(x - 3)(9x^2 + 1)$
(i) $(a + b)(4 + 3q)$ (j) $(a + 1)(a^3 + 3)$ (k) $(x - 1)(y + 1)$ (l) $(a - b)(c - d)$

20. (a)

As faktor *m* =	**As faktor *n* =**	***mn* = 8**	***m* + *n* = 6**	**Sal dit werk?**
+1	+8	1×8	$1 + 8$	Nee
+2	+4	2×4	$2 + 4$	Ja

(b) $(x + 2)(x + 4)$ (c) $x^2 + 6x + 8$
(d) die produk van die konstantes is positief en hulle som is positief

21. (a)

As faktor *m* =	**As faktor *n* =**	***mn* = 6**	***m* + *n* = –5**	**Sal dit werk?**
–1	–6	-1×-6	$-1 + -6$	Nee
–2	–3	-2×-3	$-2 + -3$	Ja

(b) $= (x - 2)(x - 3)$ (c) Brei uit om te toets
(d) die produk van die konstantes is positief en hulle som is negatief

22. (a)

As faktor *m* =	**As faktor *n* =**	***mn* = –12**	***m* + *n* = 4**	**Sal dit werk?**
+12	–1	12×-1	$12 + (-1)$	Nee
+4	–3	$4 \times (-3)$	$4 + (-3)$	Nee
+6	–2	$6 \times (-2)$	$6 + (-2)$	Ja

(b) $= (x + 6)(x - 2)$ (c) Brei uit om te toets (d) die produk van die konstantes is negatief

23. (a)

As faktor *m* =	**As faktor *n* =**	***mn* = –12**	***m* + *n* = –4**	**Sal dit werk?**
+1	–12	1×-12	$1 + -12)$	Nee
+3	–4	3×-4	$3 + (-4)$	Nee
+ 2	–6	2×-6	$2 + (-6)$	Ja

(b) $= (x + 6)(x - 2)$ (c) Brei uit om te toets (d) die produk van die konstantes is negatief

24. (a) $(x + 4)(x - 3)$ (b) $(x - 4)(x + 3)$
(c) $(x + 6)(x + 2)$ (d) $(x - 6)(x - 2)$
(e) $(x + 10)(x - 1)$ (f) $(x - 5)(x + 2)$
(g) $(x + 7)(x - 3)$ (h) $(x + 7)(x + 3)$
(i) $(x - 9)(x + 2)$ (j) $(x - 10)(x + 2)$
(k) $(x + 1)(x + 1)$ (l) $(x - 1)(x - 1)$
(m) $(a + 7)(a + 7)$ (n) $(p - 8)(p - 8)$
(o) $(m + 3n)(m - n)$ (p) $(a - 5b)(a - 5b)$
(q) Breedte $= x - 2y$

25. (a) $(a + 7)(a + 2)$ (b) $(x + 6)(x - 3)$

26. (a) $(a + 7)(a + 2)$ (b) $(x + 6)(x - 3)$
(c) $(x - 17)(x - 1)$ (d) kan nie faktoriseer
(e) $(y - 15)(y + 2)$ (f) $(y - 3)(y + 10)$
(g) $(x + 5)(x - 3)$ (h) $(m + 7)(m - 3)$
(i) kan nie faktoriseer (j) $(b + 7)(b + 8)$
(k) kan nie faktoriseer (l) $(a - 6)(a + 5)$
(m) $(x - 8)(x + 3)$ (n) $(x - 8)(x - 5)$

27. (a) $(2a + 3)(a + 3)$ (b) $(3x - 3)(x + 2)$

29. (a) $c = 14$ (b) $b = 9$
(c) $a = 1$

31. (a) $(5a + 2)(a + 5)$ (b) $(3x + 4)(x - 3)$
(c) $(4x - 3)(6x + 1)$ (d) $(5y - 2)(3y - 1)$
(e) $(2x - 5)(7x + 5)$ (f) $(3y - 7)(4y + 5)$
(g) $(3x + 2)(2x - 6)$ (h) $(7m + 2)(3m - 3)$
(i) $4(2x - 1)(3x - 2)$ (j) $2(4b - 9)(3b + 1)$

32. (a) $(x + 3)(x - 3)$ (b) $(x + 4)(x - 4)$

35. (a) $(3a - b)(3a + b)$ (b) $2(3a - b)(3a + b)$
(c) $(a - 1)(a + 1)$ (d) $(3a^2 - b^3)(3a^2 + b^3)$

36. (a) $(2a - b)(2a + b)$ (b) $(m - 3)(nm + 3n)$
(c) $(5x - 6y)(5x + 6y)$ (d) $(11x - 12y)(11x + 12y)$
(e) $(4p - 7q)(4p + 7q)$ (f) $(8a - 5bc)(8a + 5bc)$
(g) $(x - 2)(x + 2)$ (h) $(4x - 6y)(4x + 6y)$
(i) $(1 - abc)(1 + abc)$ (j) $(5x^5 - 7y^4)(5x^5 + 7y^4)$
(k) $2(x - 3)(x + 3)$ (l) $2(10 - b)(10 + b)$
(m) $3(xy - 4)(ay + 4a)$ (n) $5(a^2 - 2b)(a^2 + 2b)$

38. (a) $x^3 + y^3$ (b) $x^3 - y^3$
(c) $x^3 + 8y^3$ (d) $x^3 - 8y^3$
(e) $8x^3 + y^3$ (f) $x^3 - 8y^3$
(g) $27x^3 + 8y^3$ (h) $27x^3 - 8y^3$

39. (a) $(1 - 2x^3)(1 + 2x^3 + 4x^3)$
(b) $(2m^3 - 1)(4m^6 + 2m^3 + 1)$
(c) $(2a - b4)(a^2 + 2ab + b^2)$
(d) $(x^3 - 3y)(x^6 + 3x^3y + 9y^2)$
(e) $(5p^4 - 6)(25p^8 + 30p^4 + 36)$
(f) $\left(1 + \frac{4}{t^5}\right)\left(1 - \frac{4}{t^5} + \frac{16}{t^{10}}\right)$
(g) $(3bx - 2)(x^2 + 2x + 4)$
(h) $(x + 7)(x^2x^2 - 7x^3 + 49x^4)$
(i) $(m + 4n)(m^2 - 4mn + 16n^2)$
(j) $2(2a - b)(4a^2 + 2ab + b^2)$
(k) $\left(\frac{10}{11} + 6y^2\right)\left(\frac{100}{121} - \frac{60y^2}{11} + 36y^4\right)$

40. (a) $2(3x + 2)(x - 3)$ (b) $(7m + 2)(m - 1)$
(c) $2(3x - 2)(2x - 1)$ (d) $2x(3b + 1)(4b - 9)$
(e) $6x - 7y6x + 7y$ (f) $24a3x^2 - y^2$
(g) $(5p^4 + 2x^2)(25p^8 - 10)(p^4x^2 + 4x^4)$
(h) $4ab(2a - b)(4a^2 + 2ab + b^2)$
(i) $9a^2 + 27a + 10 - b^2$
(j) $(2a - b)(4a^2 + 2ab + b^2) + (x - 33x + 4)$
(k) $2(x - 3)(x + 3) + 5(a^2 - 2)(ba^2 + 2b)$
(l) $2(2a - b)(4a^2 + 2ab + b^2) + (x - 2)(x + 2)$
(m) $(m + 4n)(m^2 - 4mn + 16n^2) + (2y - 5)(7y + 5)$
(n) $(m - 3n)(m + 3n) + (3y - 7)(4y + 5)$

41. (a) 544 (b) 1 280

42. (a)

Inset waarde 1
$x^2 + 5x + 6$

$\underline{(x + 3)(x + 2)} \div \underline{(x + 2)} = \underline{x + 3}$ (Uitset waarde)

Inset waarde 2
$x + 2$ $= 2 + 3$
$= 5$

(b) Optelling

43. (a) $\frac{3x^2 + 1}{x}$ (b) $x + 3$ (c) $\frac{x - 2}{x + 4}$
(d) $\frac{x + 3}{2}$ (e) $\frac{3x^2y^2}{2}$ (f) $\frac{a}{b}$
(g) $\frac{2x^2(x - 2)}{(x + 1)}$ (h) $a - b$

44. (a) $2y - 1$ (b) $\frac{x^2 - y^2 + 2y}{y}$ (c) $\frac{a + b}{a - b}$
(d) $\frac{r}{s}$ (e) $\frac{x + y}{x - y}$ (f) $\frac{a + 2b}{a - b}$
(g) $\frac{2x + 3}{2x}$ (h) $\frac{x + 1}{x + 4}$
(i) $\frac{(x + 6)(x - 1)}{(x + 3)(x + 2)}$ (j) $m + 2$
(k) $x - y$ (l) $\frac{(m - n)(m - n)}{(m + n)(m^2 - mn + n^2)}$

45. (a) $\frac{11}{12}$ (b) $\frac{3}{20}$
(c) $\frac{4a + 3b}{12}$ (d) $\frac{2b + a}{ab}$
(e) $\frac{13}{18}$ (f) $\frac{3m - 2n}{3n}$
(g) $\frac{5y - 2z}{2}$ (h) $\frac{10 - 3xy}{5xy}$

46. (a) $\frac{\mathrm{a}+5}{6}$ (b) $\frac{x+y}{2}$
(c) $\frac{37a-3}{15}$ (d) $\frac{bc+ac+ab}{abc}$
(e) $\frac{2a^2+b^2}{\mathrm{ab}}$ (f) $\frac{3ab+b^2-a^2}{ab}$
(g) $\frac{a-b}{6a}$ (h) $\frac{2ac+c-a}{abc}$
(i) $\frac{6}{x^2y^2}$ (j) $\frac{-9m-4k}{18\mathrm{k}m^2}$
(k) $\frac{20x^4+20x^3-15x^2-3x+12}{60x^5}$
(l) $\frac{3a^2\mathrm{b}+\mathrm{ab}^2-4ab+b^2}{a^3b^2}$

47. (a) KGV $= x+2$ (b) KGV $= x-2$
(c) KGV $= x-2y$ (d) KGV $= x+y$
(e) KGV $= x+2$ (f) KGV $= a+3b$
(g) KGV $= x+y$ (h) KGV $= a+b$

48. (a) $\frac{74}{x+y}$ (b) $\frac{4b-4a+2x^2+2xy}{4(x+y)(b-a)}$
(c) $\frac{r^2-2rs-s^2}{s(r-s)}$ (d) $\frac{x^2-a-b}{x(a+b)}$
(e) $\frac{2-3y}{(y-2)(a-b)}$
(f) $\frac{(-3x-1)(9x^3-27x^2x-3)-18x^3}{9x^3-27x^2x-3}$
(g) $\frac{6+(y+1)(y+3)}{2(y+1)}$
(h) $\frac{2b(a+b)}{x(a+b)-y(a-b)}+\frac{x-y}{x\,y}$
(i) $\frac{-1}{x+y}$
(j) $\frac{(x-y)(y+2x)+5(x+y)}{5(x-y)}$
(k) $\frac{y(x-1)(x-y)+9a(y-1)}{3y(y-1)}$
(l) $\frac{2(x+y)}{(x-y)}$

49. (a) $\frac{2}{(x-5)(x+3)}$ (b) $\frac{x^2-10x+14}{(2x+3)(x-11)}$
(c) $\frac{3x^2\ 23x-14}{3x-2}$ (d) $\frac{-(x^2-21x-40)}{x^2+4x-5}$
(e) $\frac{x(y+6)}{(x+3)(x+4)}$ (f) $\frac{x^2-13x+60}{3(x-10)}$
(g) $\frac{x^2+x+1}{(x+2)(x+1)}$ (h) $\frac{x^2+10x+13}{3(x+8)}$
(i) $\frac{-14x^2+3xy+4y^2}{3x(5x-4y)}$ (j) $\frac{1}{x+y}+\frac{y+1}{x-1}$
(k) $\frac{3a+x-1}{3a(x-1)}$
(l) $\frac{3(x-y)(y-x)-a(x-1)}{a(y-x)}$

50. (a) $\frac{2}{5}$ (b) $\frac{2}{7}$
(c) $\frac{27}{20}$ (d) $\frac{33}{5}$

51. (a) $2a$ (b) $2a$
(c) ab (d) $\frac{d}{3}$

52. (a) x (b) $-\frac{2y^2}{x}$
(c) $\frac{x^4}{4}$ (d) $-\frac{2}{m^2n}$
(e) $-\frac{a^2}{3}$ (f) $\frac{m}{2n}$
(g) $-\frac{12y}{x}$ (h) $-\frac{a^5}{7b}$
(i) $\frac{2}{n^3}$ (j) $\frac{13x^6y^5}{2}$
(k) $\frac{7b^2}{2}$ (l) $\frac{6}{n^4}$

53. (a) $[(x+2)-y][(x+2)+y]$
(b) $(2x+1)(4x^2-2x+1)$

54. (a) $2(a-b)$ (b) $x+3$

55. (a) $\frac{3}{2}$ (b) $\frac{2}{5}$
(c) $\frac{15}{(a-5)(a+5)}$ (d) $\frac{35(x+3)^2}{6(x-4)^2}$
(e) $-\frac{4a}{3}$ (f) $\frac{b}{3a}$
(g) $\frac{x^2-4}{x^2}$ (h) $\frac{(x-y^2)}{(x+y^2)}$
(i) 1 (j) 1
(k) $\frac{(a-5)(a+1)}{a(a-2)(a-4)}$ (l) $\frac{6(x^2-3x+9)}{(x^2-3x+4)}$

56. (a) $\frac{2}{5}$ (b) $\frac{2}{7}$

57. (a) $2a$ (b) $\frac{a}{2}$

58. (a) $4x^3$ (b) $-\frac{1}{2xy^2}$
(c) $\frac{4}{9}$ (d) $-\frac{8n^5}{m^{12}}$
(e) $\frac{a^2b^4}{-3}$ (f) $\frac{8m^5}{n^5}$
(g) $-\frac{3}{x^5y^5}$ (h) $-\frac{25ab^5}{7}$
(i) $\frac{m^4n^2}{2}$ (j) $24x^4y^5$
(k) $\frac{1}{14a^6b^8}$ (l) $\frac{32}{3m^6n^4}$

59. (a) $(x-2)(x-2)$ (b) $(x-3)(x+3)$
(c) $(a-b)(a+b)$ (d) $2(a-b)$
(e) $x+3$

60. (a) 2 (b) $\frac{2}{5}$
(c) $\frac{5(a+7)}{(a+5)(a-1)}$ (d) $-\frac{5}{3}$
(e) $\frac{a(a-5)}{(a+2)}$ (f) 1
(g) $\frac{(x^2+5a^2)(x+2)}{x^2(x-3)}$ (h) $\frac{28}{x^2(x+y)^2}$
(i) $-\frac{x}{y(x^2-y^2)}$ (j) $\frac{1}{3}$
(k) $\frac{(a-5)(a+1)(a-3)}{(a-2)(a-2a)(a+2a)}$ (l) $\frac{36x(x-3)}{x^2-6x+18}$

KONSOLIDERINGSOEFENINGE

1 (a) (i)


(ii) $x \in (-5; 2]$ (iii) $\{x \mid -5 < x \leq 2\}$

(b) (i)

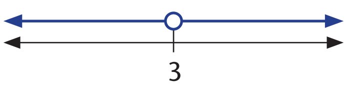

(ii) $x \in (-4; 0]$ (iii) $\{x \mid -4 < x \leq 0\}$

(c) (i)

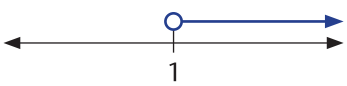

(ii) $x \in (-6; -1)$ (iii) $\{x \mid -6 < x < -1\}$

(d) (i)


(ii) $x \in (2; 8)$ (iii) $\{x \mid 2 < x < 8\}$

(e) (i)


(ii) $m \in (-\infty; 3) \cup (3; \infty)$

(f) (i)


(ii) $k \in (1; \infty)$ (iii) $\{k \mid k > 1\}$

2. (a) 6 (b) 13
(c) 66 (d) –12
(e) –24 (f) 81

3. (a) a (b) $\frac{1}{b}$
(c) $5y$ (d) $x+1$
(e) 6 (f) $\frac{1}{3(x+y)}$
(g) $\frac{1}{2a}$ (h) $\left(\frac{x^3}{x+y}\right)^2$

4. (a) $\frac{8}{9}$ (b) $-\frac{12}{5}$

5. (a) 2 (b) $3+y$
(c) a (d) 0
(e) $\frac{3}{5z^2}$ (f) $\frac{x-3}{3}$

6. (a) $x-3$ (b) 1
(c) $\frac{a(a-2)(a-5)}{1-a}$ (d) $\frac{(b-2)^2}{(x-2)^2}$
(e) $\frac{1}{1+x+y}$ (f) $\frac{p^2-2pq-7q^2}{4p(p-4q)}$

7. (a) $b+1$ (b) $b+1$

8. (a) 1 (b) $\frac{3b^3}{4}$
(c) $\frac{3x^2y}{2}$ (d) $\frac{a^2b}{3c^2}$
(e) $\frac{ac}{b^2}$ (f) $\frac{a^2}{bc^3}$
(g) $\frac{x^3y^2}{9}$ (h) $\frac{6}{pq}$
(i) $\frac{b}{a^3}$ (j) $\frac{x^6y^6z}{2}$

9. (a) $\frac{a-3}{4a^3}$ (b) $\frac{3x-2y}{2(2x-3y)}$
(c) $\frac{2(x+1)(x-1)^2}{x^2(x+2)}$ (d) $\frac{1}{y}$

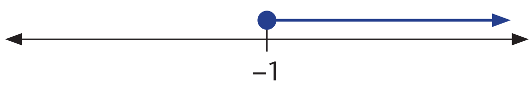
10. (a) $\frac{5y-2}{xy}$ (b) $\frac{a+1}{4}$
(c) $\frac{1}{3a}$ (d) $\frac{3}{x-3}$
(e) $\frac{5q+p}{q}$ (f) $\frac{3y+1}{4y}$

11. (a) $(x-4)(x+4)$ (b) $(x-6)(x-2)$
(c) $(x-3)(x+2)$ (d) $(p+3)(p-1)$
(e) $(x+5)(x-5)$ (f) $(y-12)(y-12)$
(g) $(a+b)(c+d)$ (h) $(x-y)(m-3)$
(i) $(a+1)(x-1)$ (j) $(3-\mathrm{m})(x+2y)$
(k) $x(x-y)(y-1)$ (l) $(1+y)(1-y-3x)$

HOOFSTUK 5 VERGELYKINGS EN ONGELYKHEDE ANTWOORDE

OEFENING

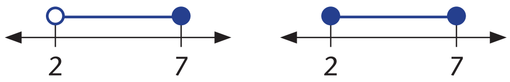
1. (a) $x = -2$ (b) $x = -6$ (c) $x = 0$
   (d) $x = -2$ (e) $x = 27$ (f) $x = -2$
2. (a) $x = 2$ (b) $x = -2$ (c) $x = \frac{1}{4}$
   (d) $x = -\frac{1}{4}$ (e) $x = -\frac{3}{4}$ (f) $x = \frac{3}{4}$
   (g) $x = 0$ (h) $x = -3$
3. (a) $x = 1$ (b) $x = 7$ (c) $x = -1$
   (d) $x = 7$ (e) $x = 3$ (f) $x = 12$
   (g) $x = 10$ (h) $x = -2$
4. (a) $x = 11$ (b) $x = -\frac{2}{3}(x \neq -1)$
   (c) $x = -1\ (x \neq 0)$ (d) $x = -\frac{11}{13}(x \neq -\frac{1}{2})$
   (e) $x = 0\ (x \neq 1)$ (f) $x = -1\ (x \neq -1)$
5. (a) $\left(\frac{35}{32}; \frac{27}{32}\right)$ (b) $\left(\frac{12}{61}; \frac{-1}{61}\right)$ (c) $(-1; 3)$
   (d) $(-1; -1)$ (e) $\left(\frac{1}{2}; \frac{31}{12}\right)$ (f) $(-5; 0)$
   (g) $(28; -7)$ (h) $\left(-\frac{55}{7}; -\frac{129}{7}\right)$
6. (a) $x \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; \ldots\}$
   (b) $x \in \{-1; -2; -3; -4; -5; -6; 1; 2; 3; 4; \ldots\}$
   (c) $x \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; \ldots\}$
   (d) $x \in \{0; 2; 4; 6; 8; 10; 12; 14; 16; 18; \ldots\}$
7. (a) Ja, die gegewe versameling is 'n subversameling van reële getalle
   (b) Die gegewe versameling is 'n subversameling van heelgetalle
   (c) Nee. –10, byvoorbeeld, is nie 'n natuurlike getal nie
   (d) Ja. Al hierdie getalle is heelgetalle
   (e) Ja. Hierdie is rasionaele getalle
8. (a) $x = 0$ (b) $x = -3$ (c) $x = 1$
9. (a) $x = 0; x = 1; x = 2; x = 3 \quad \therefore x \in \{0; 1; 2; 3\}$
   (b) $x = 1; x = 2; x = 3 \quad \therefore x \in \{1; 2; 3\}$
   (c) $x = -2; x = -1; x = 0; x = 1; x = 2; x = 3$
   $\therefore x \in \{-2; -1; 0; 1; 2; 3\}$
   (d) $x = -2; x = -3 \quad \therefore x \in \{-2; -3\}$
   (e) $x = -1; x = -2; x = -3 \quad \therefore x \in \{-1; -2; -3\}$
   (f) $x = -3 \quad \therefore x \in \{-3\}$
10. (a) $x = -\frac{1}{2}$
    (b) $x = 0; x = 1; x = 2; x = 3 \quad \therefore x \in \{0; 1; 2; 3\}$
11. (a) Verduidelik (b) Verduidelik
12. (a) $k \in \{5; 6; 7; 8\}$ (b) $k \in \{0\}$
    (c) $k \in \{-4; -3; -2; -1; 0; 1\}$
    (d) $k \in \{-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2\}$
    (e) $k \in \{-5; -4; -3; -2; -1; 0; 1\}$
    (f) $k \in \{-5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2\}$
13. (a) $\{S \in Z \mid -1 \leq S < \infty\}$ (b) $[-1; \infty)$
    (c)



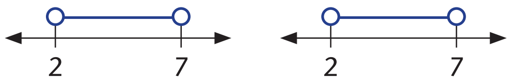
14.

Woorde	Interval Notasie	Versamelingskeurdernotasie	Getallelyn
A. Versameling van reële getalle tussen –3 en 4	$(-3; 4)$	$\{x \in R \mid -3 < x < 4\}$	
Versameling reële getalle tussen –3 en insluitend 4	$(-3; 4]$	$\{x \in R \mid -3 < x \leq 4\}$	
Versameling reële getalle tussen –3 en 4, albei ingesluit	$[-3; 4]$	$\{x \in R \mid -3 \leq x \leq 4\}$	
Versameling reële getalle tussen –3 ingesluit, en 4	$[-3; 4)$	$\{x \in R \mid -3 \leq x < 4\}$	

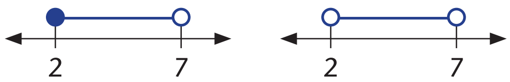
15. (a) (0; 10] en $\{x \in \mathbb{Z} \mid 0 < x \leq 10\}$
16. 'n reële getal tussen 2 en 7, insluitend beide 2 en 7
17. Verduidelik (a) tot (c)
18. (a) $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x \leq 7\}$ en $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 7\}$

(b) 

(a) $\{x \mid 2 < x < 7; x \in \mathbb{R}\}$ en $x \in \{2; 3; 4; 5; 6; 7\}$

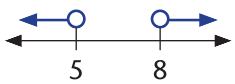
(b) 

(a) $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x < 7\}$ en $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 7\}$

(b) 

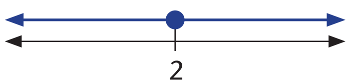
19. (a) 

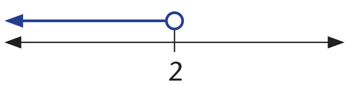
x is groter as 5 of kleiner as 8

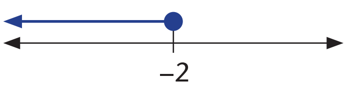
(b) 

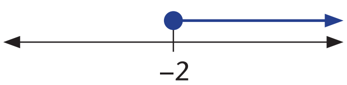
x is minder as 5 of groter a 8

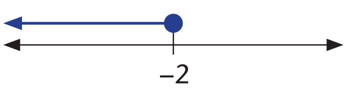
20. (a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2 \text{ en } x \leq 2\}$

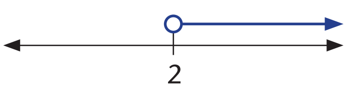
(b) 

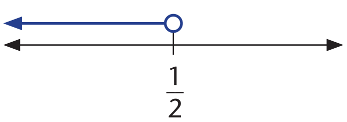
21. (a) $5x < 10$
$x < 2$


(b) $-5x \leq 10$
$x \leq -2$


(c) $5x \geq -10$
$x \geq -2$


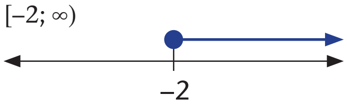
(d) $3x \leq -6$
$x \leq -2$


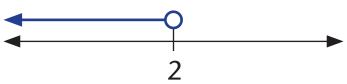
(e) $7x > 14$
$x > 2$


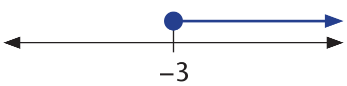
(f) $-14x < -7$
$x < \frac{1}{2}$


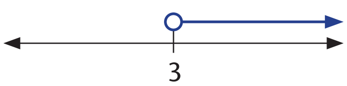
22. (a) $x \leq 1$ (b) $x < 1$
(c) $x < -3$ (d) $x \leq -2$
(e) $x \leq -2$ (f) $x > -5$
23. (a) $x = 4$ of $x = 5$ (b) $x = -2$ of $x = -4$
(c) $x = 7$ of $x = 3$ (d) $x = -6$ of $x = 2$
(e) $x = 7$ of $x = -5$ (f) $x = -1$ of $x = -5$
(g) $x = 1$ of $x = -1$ (h) $x = 4$ of $x = -4$
(i) $x = 9$ of $x = -9$ (j) $x = 5$ of $x = -5$
(k) $x = 13$ of $x = -13$ (l) $x = 15$ of $x = -15$
(m) $x = 0$ of $x = -5$ (n) $x = 7$ of $x = -2$
(o) $x = 0$ of $x = 1$ (p) $x = -4$ of $x = 1$
(q) $x = -5$ of $x = 2$ (r) $x = 9$ of $x = -3$
24. (a) $t = \frac{v - u}{a}$ (b) $a = \frac{v - u}{t}$
(c) $V = IR$ (d) $R = \frac{V}{I}$
(e) $F = \frac{9C}{5} + 32$ (f) $r = \pm\sqrt{\frac{A}{\pi}}$
(g) $R = \frac{A}{\pi} + r$ (h) $Q = \frac{RP}{P - R}$
(i) $P = \frac{RQ}{Q - R}$ (j) $m = \frac{c^2}{E}$
(k) $c = \pm\sqrt{\frac{E}{m}}$ (l) $R = \frac{P}{I^2}$
(m) $I = \pm\sqrt{\frac{P}{R}}$
25. Omtrek reghoek = Omtrek driehoek
$$4x + 10 = 10x + 4$$
$$-6x = -6$$
$$x = 1$$
26. ∴ Die getalle is 14; 15; en 16 respektiewelik.
27. ∴ Volwasse kaartjies kos R20 elk.
28. 6 en 18
29. 63 volwasse kaartjies en 37 kinder kaartjies
30. 6 opstel tipe vrae en 15 veelvoudige keuse vrae
31. Afmetings van die hoenderhok is 2 meter by 3 meter
32. Opeenvolgende getalle is −6 & −7
33. (a) 21 ton verfynde chroom & 43 ton verfynde vanadium
(b) 7 besending A & 6 besending B
34. Eindpunte sal raak teen 'n temperatuur van 26,92 °C

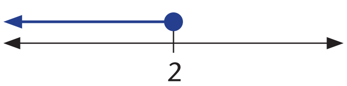
KONSOLIDERINGSOEFENINGE

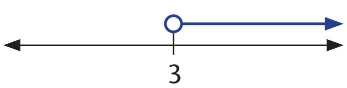
1. (a) $x = -6$ (b) $x = 13$
   (c) $x = \frac{7}{2}$ (d) $x = \frac{7}{3}$
   (e) $x = \frac{3}{4}$ (f) $x = 18$
   (g) $x = 0$ (h) $x = -\frac{1}{2}$
2. (a) $x = \frac{3}{5}$ (b) $x = \frac{17}{3}$
   (c) $x = -\frac{12}{7}$ (d) $x = -\frac{3}{2}$
   (e) $x = \frac{18}{7}$ (f) $x = -\frac{10}{3}$
   (g) $x = -\frac{90}{13}$ (h) $x = -1$ & $x = -2{,}5$
3. (a) $x = 16$ (b) $x = -13$
   (c) $x = -3$ (d) $x = \frac{14}{25}$
   (e) $x = -13$ (f) $x = -\frac{1}{3}$
4. (a) $\left(1; \frac{3}{2}\right)$ (b) $(-2; -2)$
   (c) $\left(-\frac{1}{34}; -\frac{27}{17}\right)$ (d) $\left(\frac{28}{31}; \frac{41}{62}\right)$
   (e) $\left(\frac{490}{143}; \frac{15}{286}\right)$
5. (a) $k \in \{7\}$ (b) $k \in \{-1; 0; 1; 2; 3\}$
   (c) $k \in \{-4; -3; -2; -1; 0\}$ (d) $k \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$
   (e) $k \in \{2; 3\}$ (f) $k \in \{-3; -2; -1; 0; 1\}$
6. (a) $\{M \in Z \mid -2 \leq M < \infty\}$
   (b) $[-2; \infty)$
   (c) 

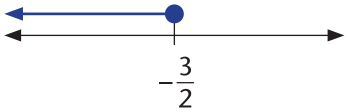
7. $(0; 10]$
8. (a) $x < 2$ 

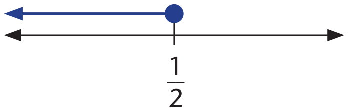
   (b) $x \geq -3$ 

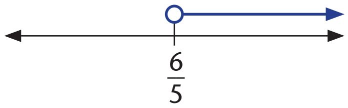
   (c) $x > 3$ 

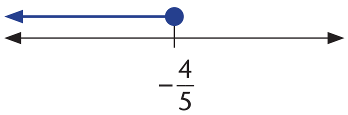
   (d) $x \leq -2$ 

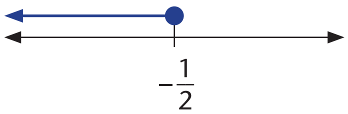
   (e) $x > 3$ 

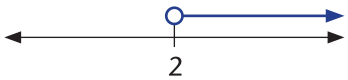
   (f) $-\frac{3}{2} \geq x$ 

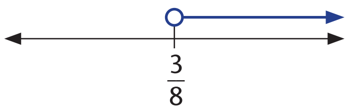
   (g) $x \leq \frac{1}{2}$ 

   (h) $x > \frac{6}{5}$ 

   (i) $x \leq -\frac{4}{5}$ 

   (j) $x \leq -\frac{1}{2}$ 

   (k) $x > 2$ 

   (l) $x > \frac{3}{8}$ 

9. (a) $x = 3$ of $x = 4$ (b) $x = -2$ of $x = -4$
   (c) $x = 3$ of $x = -3$ (d) $x = 6$ of $x = -2$
   (e) $x = 0$ of $x = 7$ (f) $x = 0$ of $x = -7$
   (g) $x = 0$ of $x = 1$ (h) $x = -5$ of $x = -1$
   (i) Geen oplossing
10. (a) $a = \frac{v - u}{t}$ (b) $t = \frac{v - u}{a}$
   (c) $R = \frac{V}{I}$ (d) $V = IR$
   (e) $Q = \frac{RP}{P - R}$ (f) $r = \pm\sqrt{\frac{A}{\pi}}$
   (g) $I = \pm\sqrt{\frac{P}{R}}$ (h) $\frac{E}{c^2} = m$
   (i) $r = R - \frac{A}{\pi}$

HOOFSTUK 6 TRIGONOMETRIE ANTWOORDE

OEFENING

1. (a) hulle is dieselfde
   (c) die drie waardes vir die drie verskillende verhoudings is dieselfde
2. dieselfde verhouding in elk van jou drie driehoeke behoort dieselfde waardes te hê
3. (a) 26°; 4,9:10; 0,49 (b) 45,6°; 10,2:10; 1,0
   (c) 14,7°; 2,6:10; 0,26
   (d) 14,3°; 2,5:10; 0,25; 27,3°; 5,2:10; 0,52
   (e) 26°; 4,9:10; 0,49; 50,6°; 12,2:10; 1,2; 0°; 0:10; 0
   (f) ongedefinieerd
4. (a) 36,9° (b) 39,7° (c) 16,7°
   (d) 81,25° (e) 0,42 (f) 0,04
5. (a) 1,5 mm; 1,2 mm
   (b) 5,5 cm; 0,6
   (c) 45°; 45°; 1,4 eenhede
   (d) 4,7 eenhede; 12,8 eenhede
   (e) 26,6°; 63,4°; 2,2 eenhede
   (f) 2,7 eenhede; 3,3 eenhede; 38,6°
6. (a) d = teenoorstaande e = aangrensend f = skuinssy
   (b) ST = teenoorstaande RS = aangrensend RT = skuinssy
   (c) m = teenoorstaande l = aangrensend n = skuinssy
   (d) y = teenoorstaande x = aangrensend r = skuinssy
7. (a) BC ≈ 40 cm
   (b) AC ≈ 19 cm
   (c) BC = teenoorstaande AB = aangrensend AC = skuinssy
   (d) 54°
   (e) AB = teenoorstaande BC = aangrensend AC = skuinssy
8. Al vier stellings is korrek. Gebruik hierdie oefening om die minimum inligting te gebruik wat nodig is om 'n spesifieke reghoekige driehoek te konstrueer versus die minimum inligting nodig om 'n reghoek te konstrueer met sekere verhoudings van sye (d.i. een met oneindige aantal soortgelyke driehoeke, almal met dieselfde verhoudings van sye).
9. (a) $\frac{3}{5}$ of 0,6 (b) $\frac{4}{5}$ of 0,8
   (c) $\frac{12}{13}$ of 0,923 (d) $\frac{5}{13}$ of 0,385
   (e) $\frac{1}{2}$ of 0,5 (f) $\frac{2}{1}$ of 2
   (g) $\frac{r}{p}$ (h) $\frac{4}{5}$ of 0,8
   (i) $\frac{12}{5}$ of 2,4 (j) 0,89
   (k) $\frac{4}{5}$ of 0,8 (l) $\frac{r}{q}$
   (m) 0,45 (n) $\frac{q}{r}$
   (o) α (p) 20°
   (q) $90° - \alpha$ (r) θ
   (s) β (t) $90° - \alpha$
   (u) $90° - \alpha$ (v) $90° - \beta$
   (w) β
10. (a) $\sin\theta = 0{,}6$; $\cos\theta = 0{,}8$; $\tan\theta = 0{,}75$
    (b) $\sin\alpha = 0{,}64$; $\cos\alpha = 0{,}77$; $\tan\alpha = 0{,}83$
    (c) $\sin\theta = 0{,}29$; $\cos\theta = 0{,}96$; $\tan\theta = 0{,}3$
    (d) $\sin\alpha = 0{,}99$; $\cos\alpha = 0{,}15$; $\tan\alpha = 6{,}5$
    (e) $\sin 23° = 0{,}39$; $\cos 23° = 0{,}92$; $\tan 23° = 0{,}42$
    (f) $\sin 46° = 0{,}72$; $\cos 46° = 0{,}69$; $\tan 46° = 1{,}04$
11. (a) $\frac{4}{3}$ of 1,33 (b) $\frac{5}{4}$ of 1,25
    (c) $\frac{13}{12}$ of 1,083 (d) $\frac{13}{5}$ of 2,6
    (e) 2 (f) $\frac{3}{4}$ of 0,75
    (g) $\frac{p}{q}$ (h) $\frac{5}{3}$ of 1,67
    (i) $\frac{5}{12}$ of 0,417 (j) 1,12
    (k) 2,24 (l) $\frac{q}{r}$
    (m) $\frac{p}{r}$ (n) $\frac{r}{q}$
12. (a) 3,73 (b) 1,40 (c) 0,38
    (d) 0,35 (e) 0,86 (f) 1,93
    (g) 0 (h) 0 (i) 0
    (j) 0,05 (l) 1,45 (m) 1,59
    (n) 1,59 (o) 50,4 (p) –0,11
13. (a) 1 (b) 2,11 (c) 57,30
    (d) 4,26 (e) 2,48 (f) 1
    (g) 4,46 (h) 1 (i) 2,86
    (j) 0,04 (k) –0,03
14. (a) 74,05 (b) 30,39 (c) ongedefinieer
    (d) 75,52° (e) 60,97° (f) 36,12°
    (g) 0,21
15. (a) 0° (b) 0 (c) 90°
    (d) die strekking is altyd nul, daarom is die kwosiënt van die styging/strekking ongedefinieerd
16. (a) B(9,3; 5) C(16; 8,6)
    (b) (i) 0.54 (ii) 0,54 (iii) 0,54
    (c) 28°
17. (a) 0.54 (b) 0,5418
22. (a) A: $x = 1$; $\cos 0° = \frac{1}{1} = 1$
    D: $x = 0$; $\cos 270° = \frac{0}{1} = 0$
    (b) A: $x = 0$; $\sin 0° = \frac{0}{1} = 0$
    D: $x = -1$; $\sin 270° = \frac{(-1)}{1} = -1$

2154 TechMaths Afr G10 LB.indb 395 2015/11/25 4:14 PM

(c) neem toe van 0 tot 1; neem af van 1, tot 0 en dan tot –1; neem toe van –1 terug na nul

24. (a) –0,84 (b) –3,37
(c) –5,67 (d) 57,29
(e) 0,02 (f) –0,02
(g) 0,02 (h) –0,02
(i) 1 (j) –1
(k) 1 (l) –1

25. (a) (1,87; 0) (b) (–100; 0)
(c) (–5; –5) (d) (–0,3; 0,3)

26. (a) B(0;7,23); C(–7,23;0)
(b) $\tan 180° = \frac{0}{(-7{,}23)} = 0$; $\tan 90° = \frac{7{,}23}{0}$ wat ongedefinieerd is
(c) die verhoudings wat x, y en r insluit bly dieselfde vir verskillende radiusse, of anders gestel, alle sirkels is soortgelyk

27. (b) hoek vir D = 315°
(c) $\tan 315° = \frac{(-5)}{5} = -1$ (d) 7,07 eenhede

28. (a) 146,69° (b) –25
(c) –0,23 (d) 15,15°
(e) 7,13° (f) –0,11

29. (a) –2,25 (b) 323,13°
(c) 1,25 eenhede

30. (a) M(100;0); P(100;140); Q(50;70); R(0;70); S(50;0)
(b) M : 34,99°; R: 55.01°; S: 90°
(c) 35,54° en 86,02 m
(d) 54,46° en 172,05 m

31. (a) $\sin\theta = \frac{\sqrt[3]{10}}{10}$ $\cos\theta = \frac{\sqrt{10}}{10}$ $\tan\theta = -3$
$\text{cosec}\,\theta = \frac{\sqrt{10}}{3}$ $\sec\theta = \sqrt{10}$ $\cot\theta = \frac{4}{3}$
(b) $\sin\theta = \frac{3}{4}$ $\cos\theta = \frac{3}{4}$ $\tan\theta = \frac{3}{4}$
$\text{cosec}\,\theta = \frac{5}{3}$ $\sec\theta = \frac{5}{4}$ $\cot\theta = \frac{4}{3}$
(c) $\sin\theta\, \frac{\sqrt[4]{17}}{17}$ $\cos\theta = \frac{\sqrt{11}}{11}$ $\tan\theta = -4$
$\text{cosec}\,\theta = \frac{\sqrt{17}}{4}$ $\sec\theta = \sqrt{11}$ $\cot\theta = \frac{1}{-4}$
(d) $\sin\theta = \frac{\sqrt[-3]{10}}{10}$ $\cos\theta = \frac{\sqrt{10}}{10}$ $\tan\theta = 3$
$\text{cosec}\,\theta = \frac{\sqrt{10}}{-3}$ $\sec\theta = \sqrt{10}$ $\cot\theta = \frac{1}{3}$
(e) $\sin\theta = \frac{178}{255}$ $\cos\theta = \frac{548}{765}$ $\tan\theta = \frac{267}{274}$
$\text{cosec}\,\theta = \frac{255}{178}$ $\sec\theta = \frac{765}{548}$ $\cot\theta = \frac{274}{267}$
(f) $\sin\theta = \frac{\sqrt[-2]{26}}{15}$ $\cos\theta = \frac{1{,}1}{1{,}5}$ $\tan\theta = \frac{\sqrt[-2]{26}}{11}$
$\text{cosec}\,\theta = \frac{15}{\sqrt[-2]{26}}$ $\sec\theta = \frac{1{,}5}{1{,}1}$ $\cot\theta = \frac{11}{\sqrt[-2]{26}}$
(g) $\sin\theta = \frac{-12}{13}$ $\cos\theta = \frac{-5}{13}$ $\tan\theta = \frac{12}{5}$
$\text{cosec}\,\theta = \frac{-13}{12}$ $\sec\theta = \frac{-13}{5}$ $\cot\theta = \frac{5}{12}$
(h) $\sin\theta\, \frac{3}{7}$ $\sec\theta = \frac{\sqrt[2]{10}}{7}$ $\tan\theta = \frac{\sqrt[3]{10}}{20}$
$\text{cosec}\,\theta = \frac{7}{3}$ $\sec\theta = \frac{7}{\sqrt[2]{10}}$ $\cot\theta = \frac{20}{\sqrt[3]{10}}$

32. (a) 1,00 (b) –0,63 (c) 0,50
(d) 0,50 (e) –0,50 (f) 0,87
(g) –0,050 (h) –0,77 (i) 0,03
(j) –0,03 (k) –0,06 (l) 0,03

33.

	45°	**135°**	**225°**	**315°**
sinα	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
cosα	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

34. 45°; 225°

35. (a) 53,1° (b) –6 eenhede
(c) 0,37 eenhede (d) 63,4°
(e) 0,69 eenhede (f) 34,6 eenhede
(g) $e = 8{,}19$; $f = -5{,}74$ (h) 60 eenhede
(i) 1,28 eenhede (j) $e = 3$; $m = 4$

36. (a) $\sin\alpha = -0{,}71$ $\cos\alpha = -0{,}70$ $\tan\alpha = 1{,}02$
(b) $\cos\beta = -1$; $\cot\beta$ is ongedefineerd
(c) $\text{cosec}\,\theta = \frac{\sqrt{29}}{5}$ $\sec\theta = \frac{\sqrt{29}}{-2}$ $\cot\theta = \frac{-2}{5}$
(d) $\sin\theta = \frac{-12}{13}$ $\cot\theta = \frac{5}{-12}$
(e) $\frac{\sqrt{5}}{5}$
(f) $\sin A = 0{,}98$ $\cos A = 0{,}17$
$2\sin A - \cos A = 1{,}79$ $3\cot A \times \sin A = 0{,}52$
(g) $\tan\beta = \frac{4}{-3}$ $\frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{4}{-3}$ $\sin\beta \times \cos\beta = \frac{-12}{25}$
$\frac{1}{1 + \text{cosec}\,\beta} = \frac{4}{9}$
(h) $\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\frac{\sec\theta}{\text{cosec}\,\theta} = 1$

37. (a) 0° (b) 11,5°
(c) 23,6° (d) 53,1°
(e) 90° (f) onmoontlik
(g) 90° (h) 60°
(i) 0° (j) onmoontlik
(k) 0° (l) 18,4°
(m) 33,7° (n) 45°
(0) 53,1°

38. (a) 82,4° (b) 62,4° (c) 30°
(d) 45° (e) 112,4° (f) 18,4°
(g) 23,6° (h) 15,9° (i) –3,12
(j) 36,8° (k) 16,8° (l) –2,3
(m) 33,7° (n) 3,9° (o) 2
(p) 55,1° (q) (i), (l) and (o)

39. (a) hulle is gelyk; ooreenstemmende hoeke is gelyk (daarom is die twee driehoeke gelykvormig)
(b) 63 m; nee (c) 83,7°; ja

40. (a) 0,32 (b) 18°

41. (a) 19
(b) 337; die Son is 337 keer verder van die Aarde as wat die Maan is
(c) Baie groot! Om te sê dat die Son 19 keer verder van die Aarde is as die Maan, is 'n baie groot fout in vergelyking om te sê dat dit 337 keer verder as die Maan is.
(d) 129 miljoen km

42. (a) 50 cosec 280 = 107, so ja (b) 94m

43.

Afkantingshoek	Waarde van d
60°	4,3 mm
90°	2,5 mm
110°	1,8 mm

44. (a) AC = 3,05 m; BC = 1,75 m (b) nee
(c) 1,65 m indien dakkapplate gebruik is om die dakkappe te verbind (langer indien 'n tapvoeg of ander skarnier gebruik word)

45. (b) 11,5°

46. (b) 26 cm
(c) **Wenk:** Is die Son altyd teen dieselfde elevasie?

47. (a)

Inset (°)	Uitset
0	0
15	0,2588
30	0,5
45	0,7071
60	0,866
75	0,9659
90	1
105	0,9659
120	0,866
135	0,7071
150	0,5
165	0,2588
180	0
195	–0,2588
210	–0,5
225	–0,7071
240	–0,866
255	–0,9659
270	–1
285	–0,9659
300	–0,866
315	–0,7071
330	–0,5
345	–0,2588
360	0

50. (a) (41°; 1,31)
(b) (i) (41°; 0,16)
(c) (41°; –0,66)
(d)

θ	f $y = \sin\theta$	g $y = 2\sin\theta$	h $y = \frac{1}{4}\sin\theta$	k $y = -\sin\theta$
41°	0,66	1,31	0,33	–0,33
90°	1	2	0,5	–0,5
180°	0	0	0	0
203°	–0,39	–0,78	–0,20	0,20

51. $f(x) = 2\sin x$; $k(x) = -\sin x$

52.

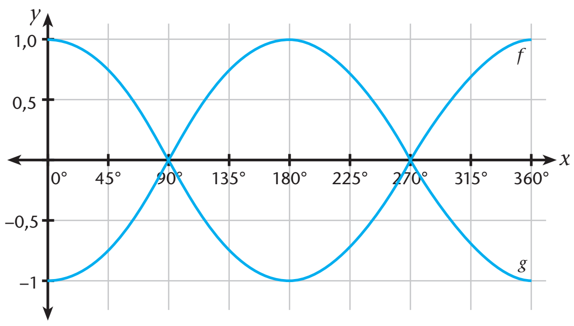
Inset (°)	Uitset
0°	0.00
15°	0.27
30°	0.58
45°	1.00
60°	1.73
75°	3.73
90°	ongedefineerd
105°	–3.73
120°	–1.73
135°	–1.00
150°	–0.58
165°	–0.27
180°	0.00
195°	0.27
210°	0.58
225°	1.00
240°	1.73
255°	3.73
270°	ongedefineerd
285°	–3.73
300°	–1.73
315°	–1.00
330°	–0.58
345°	–0.27
360°	0.00

54. (a) 78,69°; 84,29°; 87,14°; 88,57°
(b) 114,59° –114,59° 114,59° –114,59°
(d) 143,24 190,98 286,48 572,96

56. (a) $a > 1$ (en ook wanneer a minder is as –1)
(b) $0 < a < 1$ (en ook wanneer a tussen –1 en 0)
(c) $a < 0$

57.

x	$f(x) = \cos x$	$g(x) = -\cos x$
0°	1.00	–1.00
45°	0.71	–0.71
90°	0.00	0.00
135°	–0.71	0.71
180°	–1.00	1.00
225°	–0.71	0.71
270°	0.00	0.00
315°	0.71	–0.71
360°	1.00	–1.00



(a) (90°; 0); (270°; 0) vir beide f en g

(b) f: (0°, 1); (180°; –1); (360°; 1)
g: (0°; –1); (180°; 1); (360°; –1)

(c) 1; ja, die amplitudes is albei 1

(d) $x \in \{0°; 180°; 360°\}$

(e) (90°; 0) en (270°; 0)

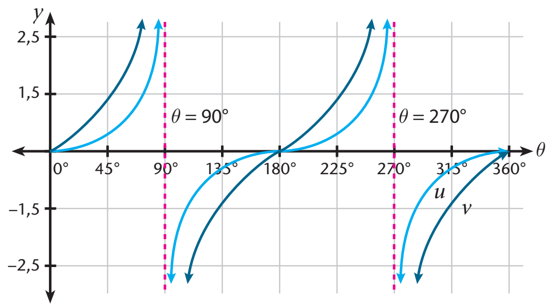
(f) Definisieversameling van $g = \{x \mid 0° <= x <= 360°\}$;
Waardeversameling van $g = \{y \mid -1 <= y <= 1\}$

58. (a)

θ	$u(\theta) = 0{,}4 \tan \theta$	$v(\theta) = 1{,}2 \tan \theta$
0°	0.00	0.00
30°	0.23	0.69
60°	0.69	2.08
90°	ongedefineerd	ongedefineerd
120°	–0.69	–2.08
150°	–0.23	–0.69
180°	0.00	0.00
210°	0.23	0.69
240°	0.69	2.08
270°	ongedefineerd	ongedefineerd
300°	–0.69	–2.08
330°	–0.23	–0.69
360°	0.00	0.00

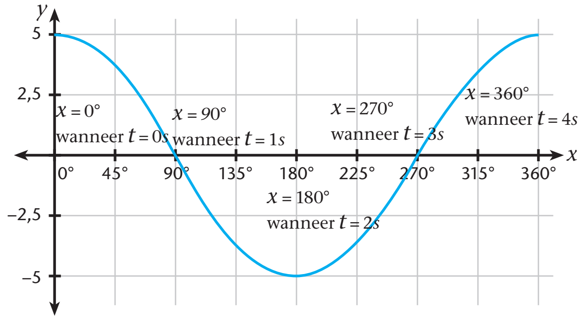
(b) (i) kontraksie; $\frac{1}{3}$
(ii) dilatasie; 3
(ii) horisontale afsnitte

(c)



59. (a) $\alpha = 5$ (amplitude); $\beta = 90$ (sodat $90 \times 4 = 360$)

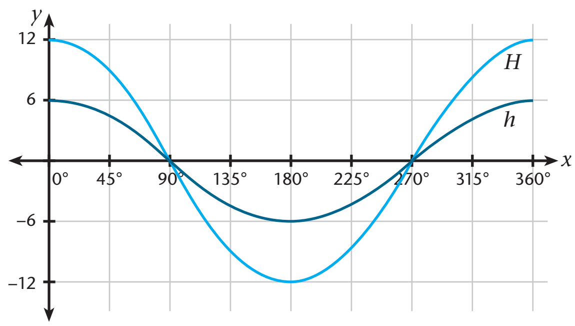
(b) Hanteer βt as 'n enkele veranderlike en maak $x = \beta t$; teken 'n tabel vir die insette van x en uitsette van $5 \cos x$; merk jou horisontale as $x = \beta t$, en jou vertikale as $y = 5 \cos x$



60. (a) (2,30; 5,54) (b) 4,60

(c)

θ	$h(\theta) = 6 \cos \theta$	$H(\theta) = 12 \cos \theta$
0°	6,00	12,00
90°	0,00	0,00
180°	–6,00	–12,00
270°	0,00	0,00
360°	6,00	12,00

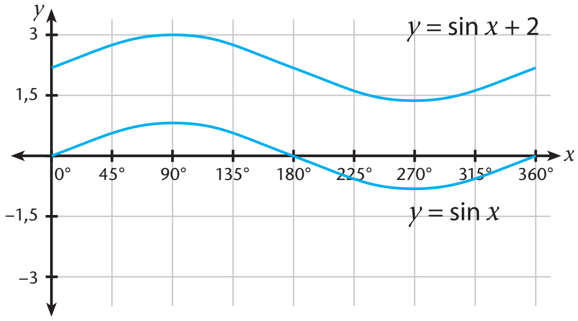


(d) Dit dui aan hoe ver links of regs 'n punt op die wiel omtrek is vanaf die vertikale lyn wat deur die middel van die wiel gaan

(e) H is h 'n dilatasie met 'n faktor van 2 (anders gesê, h is H 'n kontraksie met 'n faktor van of 0,5)

61. (b)

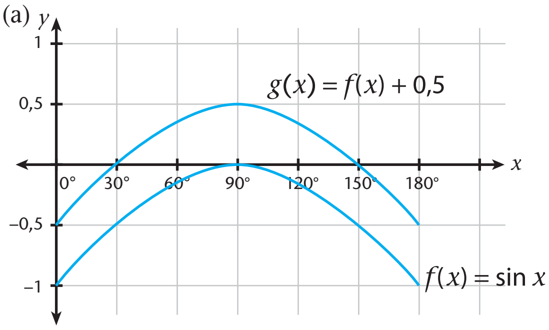
θ	$y = \sin\theta$	$y = \sin\theta + 2$
0	0.00	2.00
45	0.71	2.71
90	1.00	3.00
135	0.71	2.71
180	0.00	2.00
225	–0.71	1.29
270	–1.00	1.00
315	–0.71	1.29
360	0.00	2.00



62.

θ	$f(x) = \sin x - 1$	$g(x) = f(x) + 0,5$
0	–1.00	–0.50
30	–0.50	0.00
60	–0.13	0.37
90	0.00	0.50
120	–0.13	0.37
150	–0.50	0.00
180	–1.00	–0.50

(a)



(b) Waardeversameling van $f = \{y \mid -1 <= y <= 0\}$

(c) x–afsnit: (90°; 0); y–afsnit: (0°; –1)

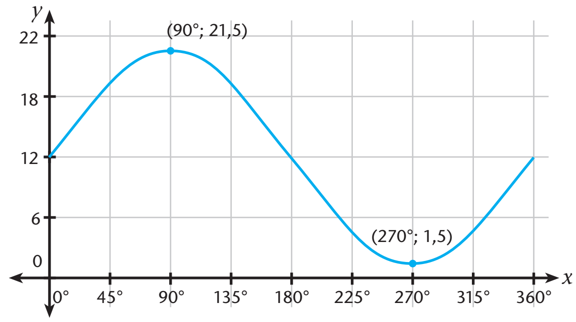
(d) $g(x) = \sin x - 0,5$

(e) Waardeversameling van $g = \{y \mid -0,5 <= y <= 0,5\}$

(f) 30° en 150°

63. $V(\theta) = v(\theta) + 11,5$

θ	Hoogte van verbindings-as bo/onder hoofas: $v(\theta) = 10 \sin\theta$	Hoogte van waentjie bokant die grond in meter
0	0.0	11.5
45	7.1	18.6
90	10.0	21.5
135	7.1	18.6
180	0.0	11.5
225	–7.1	4.4
270	–10.0	1.5
315	–7.1	4.4
360	0.0	11.5



65. (a) 1,7 V

(b) skat die lesing direk van die grafiek: 35°,145°, 215° en 325°; los die vergelyking op $1,7 \sin x = 1$ en $1,7\sin x = -1$ gee meer akkurate oplossings: 36° en 144° vir die eerste vergelyking en 216° en 324° vir die tweede vergelyking

(c) lees direk van die grafiek, min of meer waar 60° < = x < =120° en 240° < = x < = 300°; los oplossings op $1,7 \sin x = 1,5$ en $1,7 \sin x = -1,5$ sal meer akkurate waardes vir die interval grense gee (b.v. die laagste grens van die eerste interval is eintlik 61,9° en nie 60°)

(d) $V(x) = 1,7\sin x$

(e) 0 s; 0,1 s; 0,2 s

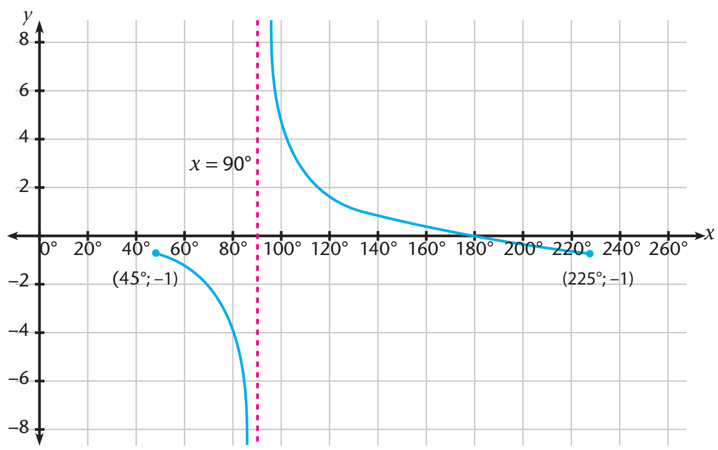
(f) 0,5 s; 1,5 s

(g) gebruik die geskatte lesings: 0,033 < = t < = 0,067 en 0,133 < = t < = 0,167

66. (a) Definisieversameling = $\{\theta \mid 0° < \theta < 90°\}$; Waardeversameling = $\{l \mid 0 < l < \infty\}$
(b) Nee, omdat aanloophoeke naby aan 0° beteken dat baie draaie nodig is vir selfs 'n klein aanloop, terwyl aanloophoeke wat naby aan 90° is, beteken dat 'n klein draai 'n baie groot aanloop sal veroorsaak; dit is ook baie moeilik om boute met 'n baie klein aanloophoek te draad; vrywing kan die draai van boute met 'n baie groot aanloophoek moeilik maak.
(c) gebruik jou liniaal om akkurate lesings te neem: 1,6 mm; 7,3 mm; 18,8 mm
(d) 3,1°; 11,7°; 37,7°
(e) $l(\theta) = 19{,}1 \tan \theta$
(f) 3,03 mm

KONSOLIDERINGSOEFENINGE

1. (a) $\frac{4}{3}$ (b) $\frac{-3}{5}$ (c) $\frac{-4}{5}$ (d) $\frac{-5}{4}$
2. $\frac{2}{3}$
3. 70,02 m
4. 138,56 m
5. (a) $\theta = 15{,}04°$ or $\theta = 105{,}04°$ (b) $\theta = 65{,}4°$ or $\theta = 245{,}4°$
6. (a) $y = \sin x$ (b) $y = -2 \cos x$
7. (c) 36
8. (a) $\frac{h}{d}$ (b) $\frac{h}{d + 35}$ (c) 52,41 m (d) 71,66
9. (a) 0,46 (b) 0,89
(c) 1,33
10. 27,76°
11. $\frac{24}{7}$
12. (a)



(b) daar is geen maksimum y–waarde
13. (a) 655 m
(b) 46,4°

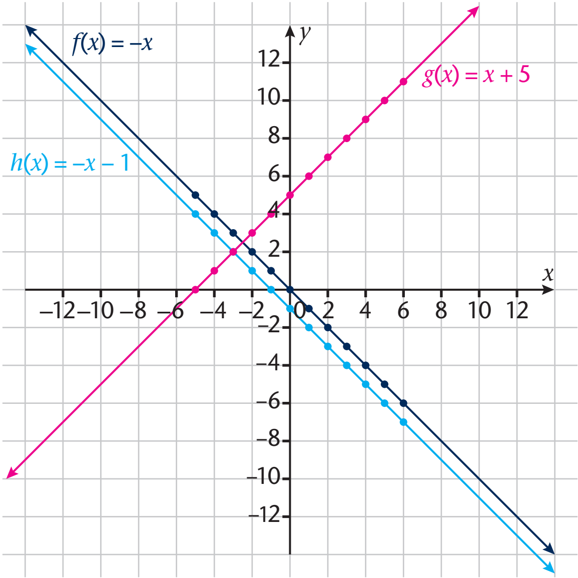
HOOFSTUK 7 FUNKSIES EN GRAFIEKE ANTWOORDE

OEFENINGE

1.

x	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	5	4	3	2	1	0	−1	−2	−3	−4	−5	−6
$g(x)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$h(x)$	4	3	2	1	0	−1	−2	−3	−4	−5	−6	−7

2.

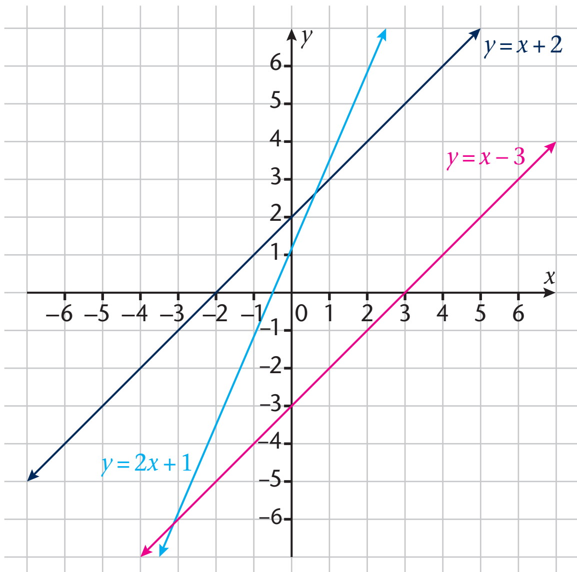


3.

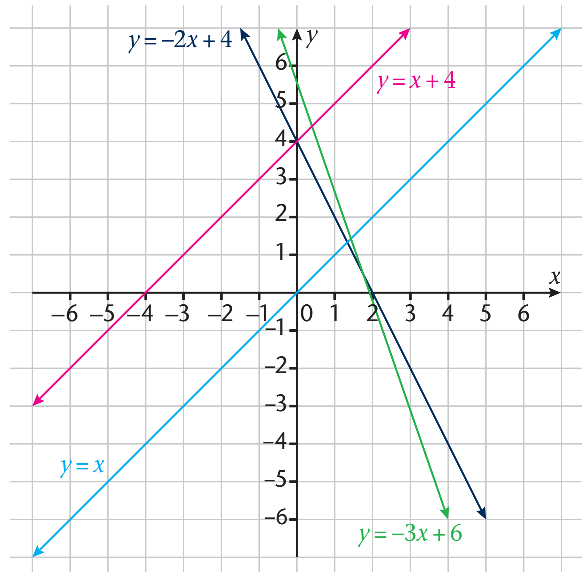
Funksie	x-afsnit	y-afsnit	Definisieversameling	Waardeversameling
$f(x) = -x$	(0; 0)	(0; 0)	$x \in \mathbb{R}$	$y \in \mathbb{R}$
$g(x) = x + 5$	(−5; 0)	(0; 5)	$x \in \mathbb{R}$	$y \in \mathbb{R}$
$h(x) = -x - 1$	(−1; 0)	(0; −1)	$x \in \mathbb{R}$	$y \in \mathbb{R}$

4.

(a)–(c)



(d)–(g)



2154 TechMaths Afr G10 LB.indb 401 2015/11/25 4:14 PM

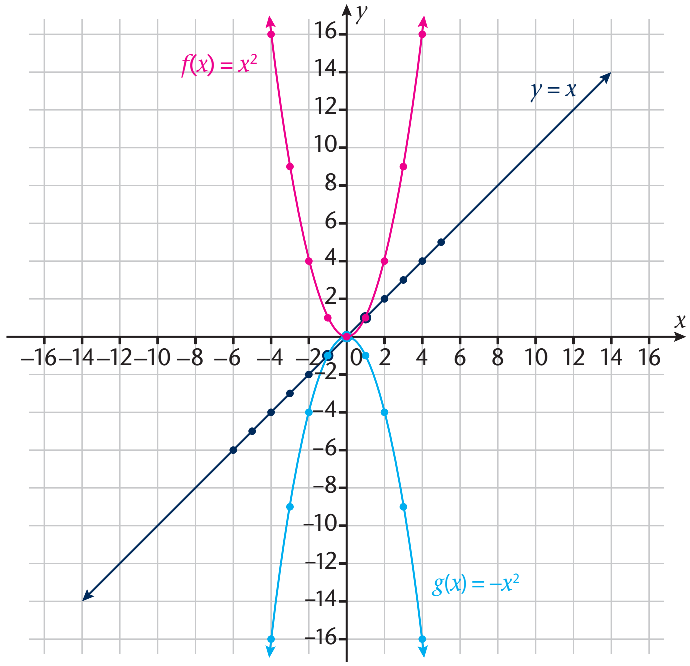
5. (lees van waardes moet so akkuraat moontlik gedoen word)

x	–2	–1	0	1	2	3	4
$y = g(x)$	7	5,25	3,5	1,75	0	–1,75	–3,5

6. (a)

x	**–4**	**–3**	**–2**	**–1**	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
$f(x)$	16	9	4	1	0	1	4	9	16
$g(x)$	–16	–9	–4	–1	0	–1	–4	–9	–16

(b)



(c)

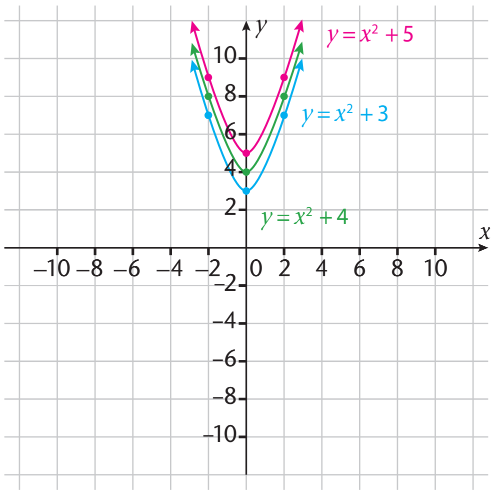
Funksie	x-afsnit(te)	y-afsnit	As van simmetrie	Draaipunt	Definisieversameling	Waardeversameling	Vorm
$f(x)$	(0; 0)	(0; 0)	$x = 0$	(0; 0)	$x \in \mathbb{R}$	$y \geq 0$	
$g(x)$	(0; 0)	(0; 0)	$x = 0$	(0; 0)	$x \in \mathbb{R}$	$y \leq 0$	

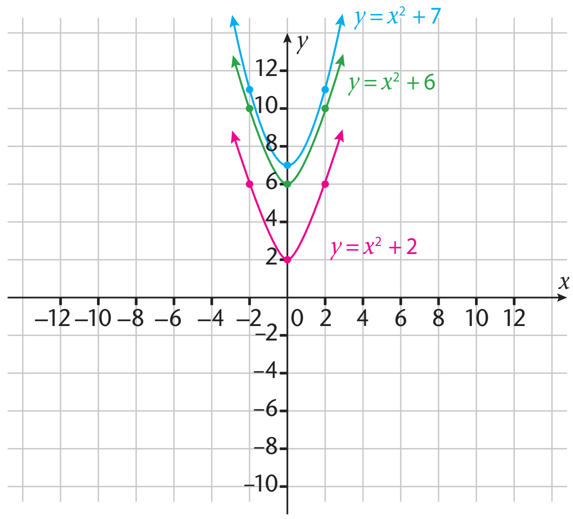
7.

Funksie	x-afsnit	y-afsnit	Draaipunt	Definisieversameling	Waardeversameling	As van simmetrie
(a) $f(x) = x^2 + 2$	Geen	(0; 2)	(0; 2)	$x \in \mathbb{R}$	$y \geq 2$	$x = 0$
(b) $f(x) = x^2 + 12$	Geen	(0; 12)	(0; 12)	$x \in \mathbb{R}$	$y \geq 12$	$x = 0$
(c) $f(x) = x^2 + 21$	Geen	(0; 21)	(0; 21)	$x \in \mathbb{R}$	$y \geq 21$	$x = 0$
(d) $f(x) = x^2 + 100$	Geen	(0; 100)	(0; 100)	$x \in \mathbb{R}$	$y \geq 100$	$x = 0$
(e) $f(x) = x^2 + 121$	Geen	(0; 121)	(0; 121)	$x \in \mathbb{R}$	$y \geq 121$	$x = 0$

2154 TechMaths Afr G10 LB.indb 402 2015/11/25 4:14 PM

8.

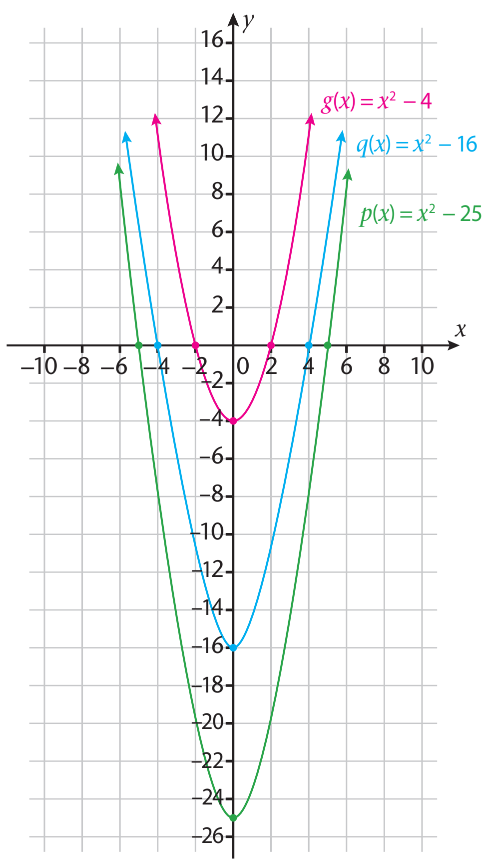


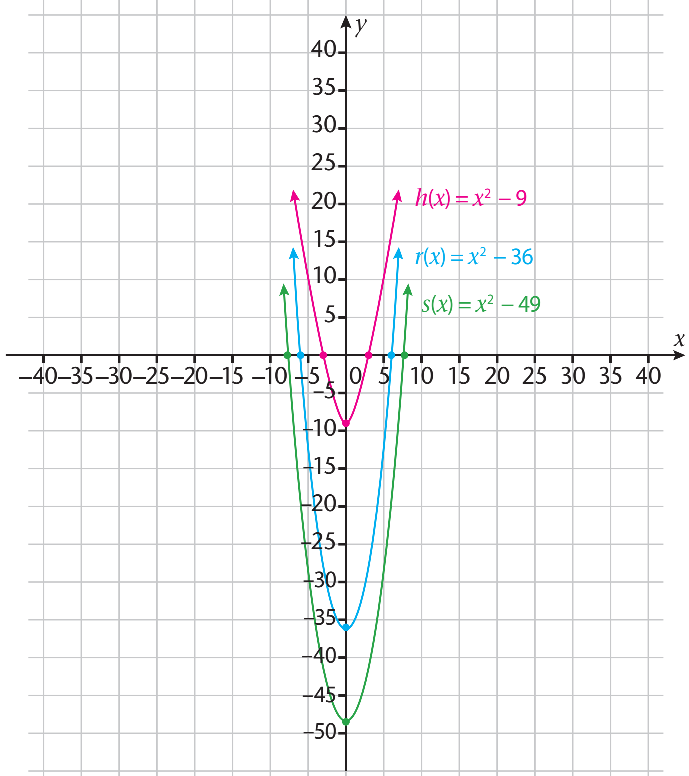


9.

Funksie	x-afsnit	y-afsnit	Draaipunt	Definisie-versameling	Waardever-sameling	As van simmetrie
(a) $f(x) = x^2 + 5$	Geen	(0; 5)	(0; 5)	$x \in \mathbb{R}$	$y \geq 5$	$x = 0$
(b) $f(x) = x^2 + 6$	Geen	(0; 6)	(0; 6)	$x \in \mathbb{R}$	$y \geq 6$	$x = 0$
(c) $f(x) = x^2 + 3$	Geen	(0; 3)	(0; 3)	$x \in \mathbb{R}$	$y \geq 3$	$x = 0$
(d) $f(x) = x^2 + 4$	Geen	(0; 4)	(0; 4)	$x \in \mathbb{R}$	$y \geq 4$	$x = 0$
(e) $f(x) = x^2 + 7$	Geen	(0; 7)	(0; 7)	$x \in \mathbb{R}$	$y \geq 7$	$x = 0$
(f) $f(x) = x^2 + 10$	Geen	(0; 10)	(0; 10)	$x \in \mathbb{R}$	$y \geq 10$	$x = 0$

10.



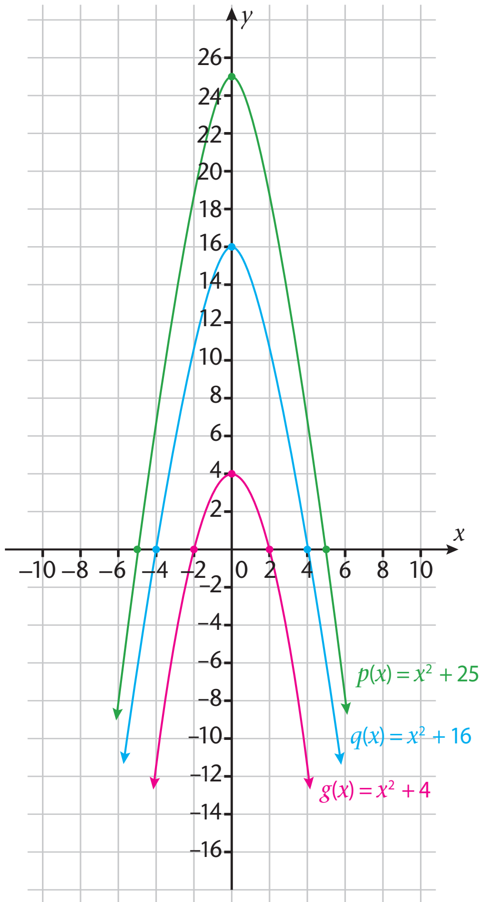


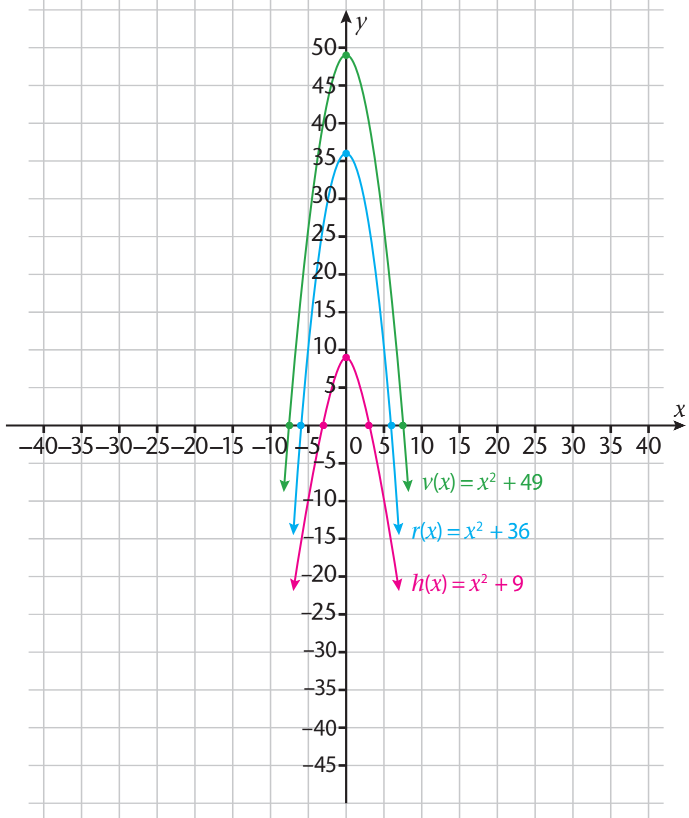
2154 TechMaths Afr G10 LB.indb 403 2015/11/25 4:14 PM

11.

Funksie	x-afsnit	y-afsnit	Draaipunt	Definisie-versameling	Waardever-sameling	As van simmetrie
(a) $g(x) = x^2$	(0; 0)	(0; 0)	(0; 0)	$x \in \mathbb{R}$	$y \geq 0$	$x = 0$
(b) $h(x) = x^2 - 4$	(–2; 0), (2; 0)	(0; –4)	(0; –4)	$x \in \mathbb{R}$	$y \geq -4$	$x = 0$
(c) $q(x) = x^2 - 16$	(–4; 0),(4; 0)	(0; –16)	(0; –16)	$x \in \mathbb{R}$	$y \geq -16$	$x = 0$
(d) $p(x) = x^2 - 25$	(–5; 0), (5; 0)	(0; –25)	(0.–25)	$x \in \mathbb{R}$	$y \geq -25$	$x = 0$
(e) $r(x) = x^2 - 36$	(–6; 0), (6; 0)	(0; –36)	(0; –36)	$x \in \mathbb{R}$	$y \geq -36$	$x = 0$
(f) $s(x) = x^2 - 49$	(–7; 0), (7; 0)	(0; –49)	(0; –49)	$x \in \mathbb{R}$	$y \geq -49$	$x = 0$
(g) $u(x) = x^2 - 121$	(–11; 0), (11; 0)	(0; –121)	(0; –121)	$x \in \mathbb{R}$	$y \geq -121$	$x = 0$
(h) $v(x) = x^2 - 81$	(–9; 0), (9; 0)	(0; –81)	(0; –81)	$x \in \mathbb{R}$	$y \geq -81$	$x = 0$

12.





2154 TechMaths Afr G10 LB.indb 404 2015/11/25 4:14 PM

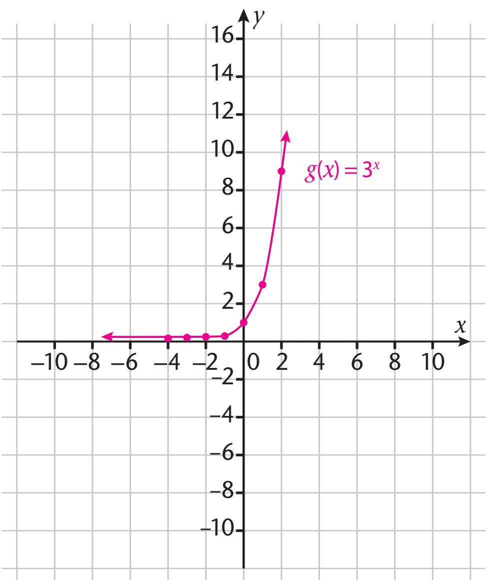
13.

Funksie	x-afsnit	y-afsnit	Draaipunt	Definisie-versameling	Waardever-sameling	As van simmetrie
(a) $g(x) = x^2$	(0; 0)	(0; 0)	(0; 0)	$x \in \mathbb{R}$	$y \leq 0$	$x = 0$
(b) $h(x) = -x^2 + 4$	(−2; 0), (2; 0)	(0; 4)	(0; 4)	$x \in \mathbb{R}$	$y \leq 4$	$x = 0$
(c) $q(x) = -x^2 + 16$	(−4; 0),(4; 0)	(0; 16)	(0; 16)	$x \in \mathbb{R}$	$y \leq 16$	$x = 0$
(d) $p(x) = -x^2 + 25$	(−5; 0), (5; 0)	(0; 25)	(0; 25)	$x \in \mathbb{R}$	$y \leq 25$	$x = 0$
(e) $r(x) = -x^2 + 36$	(−6; 0), (6; 0)	(0; 36)	(0; 36)	$x \in \mathbb{R}$	$y \leq 36$	$x = 0$
(f) $s(x) = -x^2 + 49$	(−7; 0), (7; 0)	(0; 49)	(0; 49)	$x \in \mathbb{R}$	$y \leq 49$	$x = 0$
(g) $u(x) = -x^2 + 121$	(−11; 0), (11; 0)	(0; 121)	(0; 121)	$x \in \mathbb{R}$	$y \leq 121$	$x = 0$
(h) $v(x) = -x^2 + 81$	(−9; 0), (9; 0)	(0; 81)	(0; 81)	$x \in \mathbb{R}$	$y \leq 81$	$x = 0$

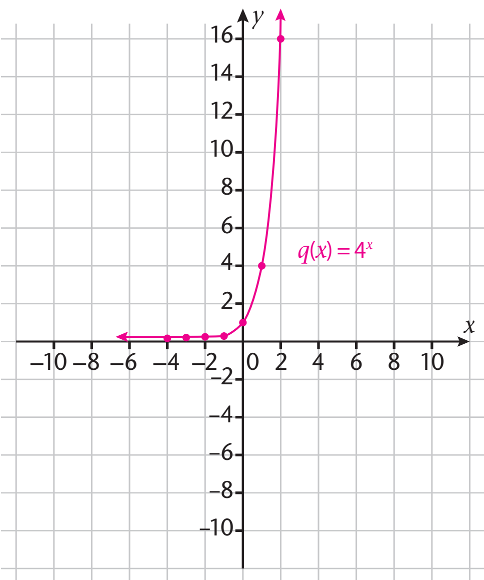
14.

	$q < 0$	$q > 0$
$a > 0$	Dit is asof die grafiek van die kwadratiese funksie afwaarts getrek word. Die y-koördinaat van die draaipunt verander van 0 na ’n negatiewe waarde. Die grafiek van die funksie het twee x-afsnitte.	Dit is asof die grafiek van die kwadriese funksie opwaarts getrek word. Die y-koördinaat van die draaipunt verander van 0 na ’n positiewe waarde. Die grafiek van die funksie het geen x-afsnitte nie.
$a < 0$	Dit is asof die grafiek van die kwadratiese funksie afwaarts getrek word. Die y-koördinaat van die draaipunt verander van 0 na ’n negatiewe waarde. Die grafiek van die funksie het geen x-afsnitte nie	Dit is asof die grafiek van die kwadriese funksie opwaarts getrek word. Die y-koördinaat van die draaipunt verander van 0 na ’n positiewe waarde. Die grafiek van die funksie het twee x-afsnitte.

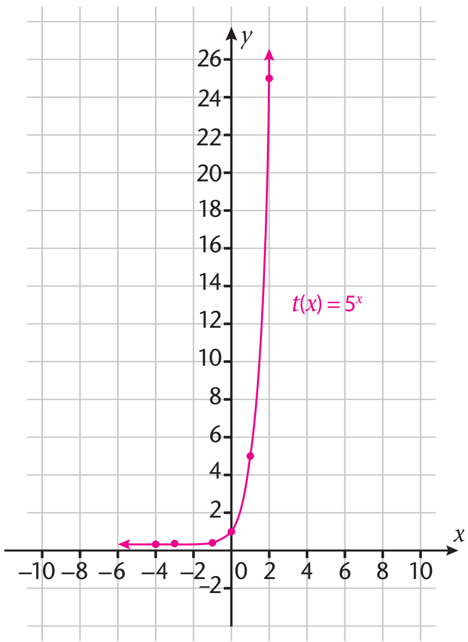
15. (a)



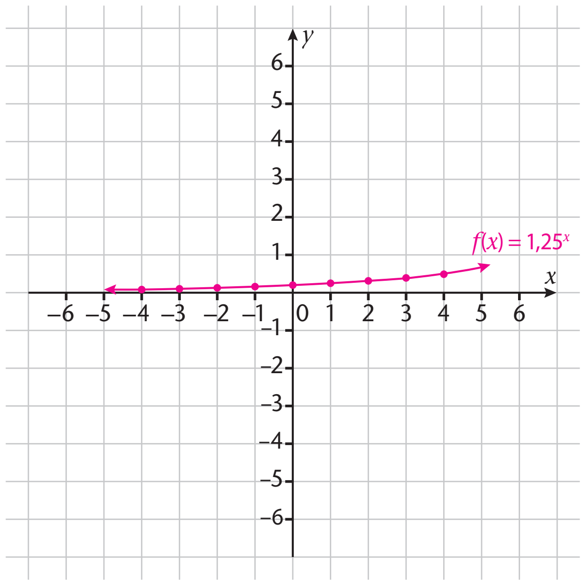
(b)



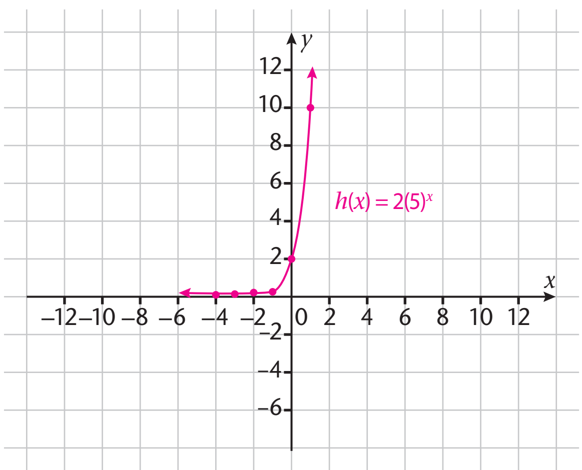
(c)



(d)



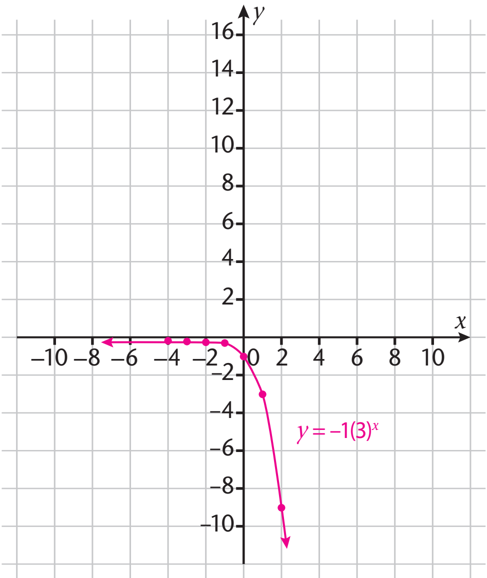
(e)



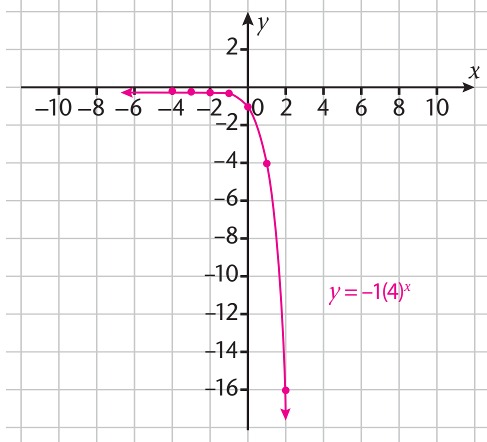
16.

Funksie	Afsnit	Definisie-versameling	Waardever-sameling	Asimptoot
(a) $g(x) = 3^x$	(0; 1)	$x \in \mathbb{R}$	$y > 0$	$y = 0$
(b) $q(x) = 4^x$	(0; 1)	$x \in \mathbb{R}$	$y > 0$	$y = 0$
(c) $t(x) = 5^x$	(0; 1)	$x \in \mathbb{R}$	$y > 0$	$y = 0$
(d) $f(x) = 1{,}25^x$	(0; 1)	$x \in \mathbb{R}$	$y > 0$	$y = 0$
(e) $h(x) = 2(5)^x$	(0; 2)	$x \in \mathbb{R}$	$y > 0$	$y = 0$
(f) $y = 3(2)^x$	(0; 3)	$x \in \mathbb{R}$	$y > 0$	$y = 0$
(g) $y = 2(2)^x$	(0; 2)	$x \in \mathbb{R}$	$y > 0$	$y = 0$
(h) $y = 2(3)^x$	(0; 2)	$x \in \mathbb{R}$	$y > 0$	$y = 0$
(i) $y = 2(4)^x$	(0; 2)	$x \in \mathbb{R}$	$y > 0$	$y = 0$

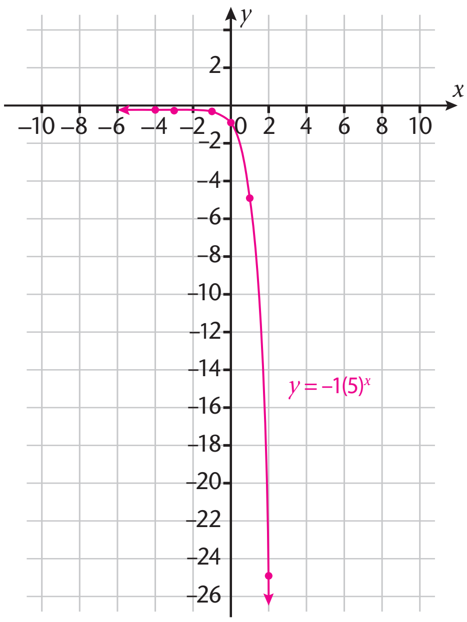
17. (a)



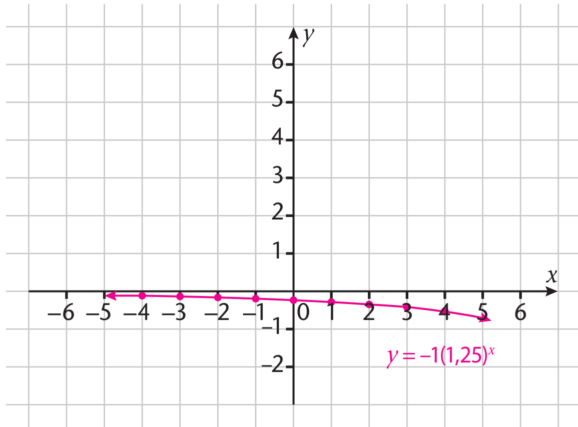
(b)



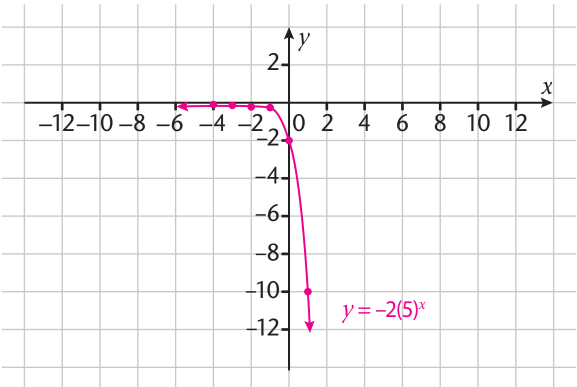
(c)

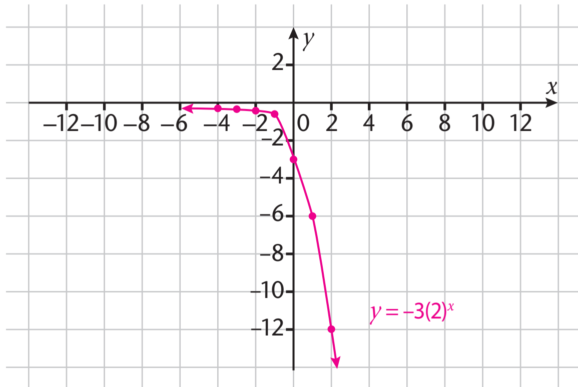


(d)



(e)





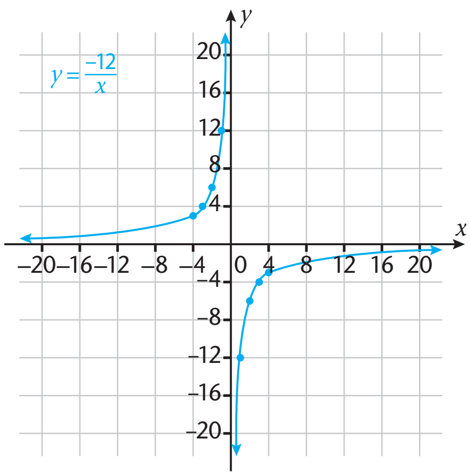
18.

Funksie	Afsnit	Definisie-versameling	Waardever-sameling	Asimptoot
(a) $y = -1(3)^x$	$(0; -1)$	$x \in \mathbb{R}$	$y < 0$	$y = 0$
(b) $y = -1(4)^x$	$(0; -1)$	$x \in \mathbb{R}$	$y < 0$	$y = 0$
(c) $y = -1(5)^x$	$(0; -1)$	$x \in \mathbb{R}$	$y < 0$	$y = 0$
(d) $y = -1(1{,}25)^x$	$(0; -1)$	$x \in \mathbb{R}$	$y < 0$	$y = 0$
(e) $y = -2(5)^x$	$(0; -2)$	$x \in \mathbb{R}$	$y < 0$	$y = 0$
(f) $y = -3(2)^x$	$(0; -3)$	$x \in \mathbb{R}$	$y < 0$	$y = 0$

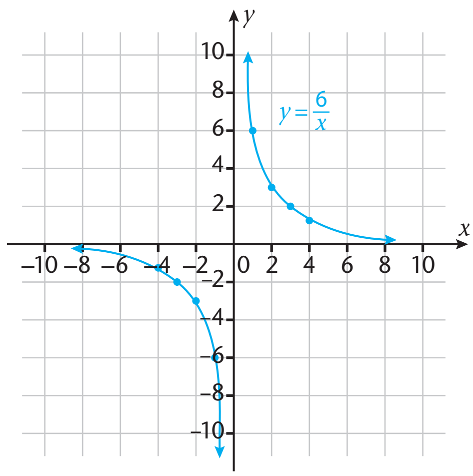
19. (a) dieselfde
    (b) verskillend, 3^x is almal positiewe y-waardes, en $-1(3)^x$ is almal negatiewe y-waardes
    (c) verskillend, 3^x bo 0, en $-1(3)^x$ onder 0
    (d) dieselfde

20. (a) 3^x grafiek beweeg opwaarts en $-1(3)^x$ grafiek beweeg afwaarts
    (b) 3^x funksie neem toe, en $-1(3)^x$ funksie neem af

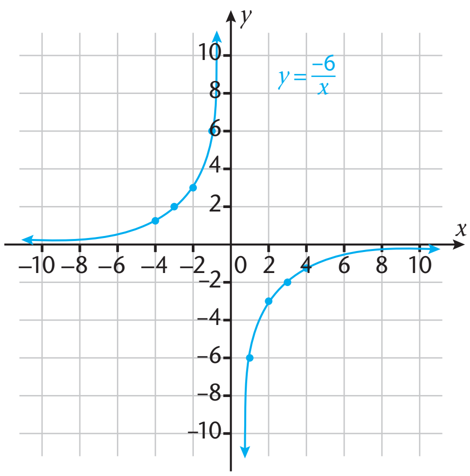
21. (a)



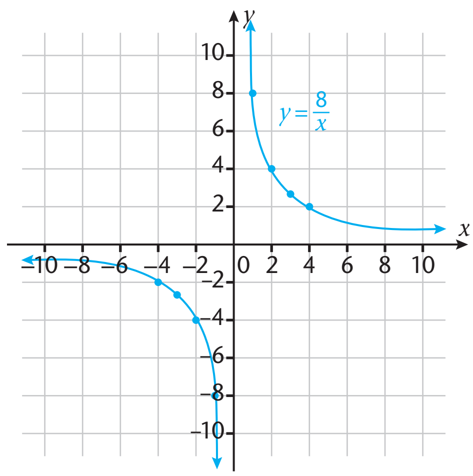
(b)



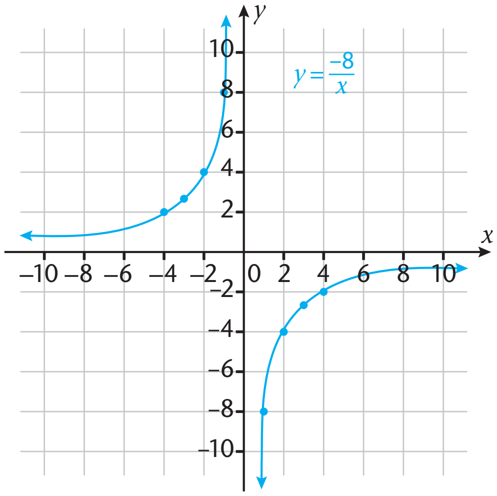
(c)



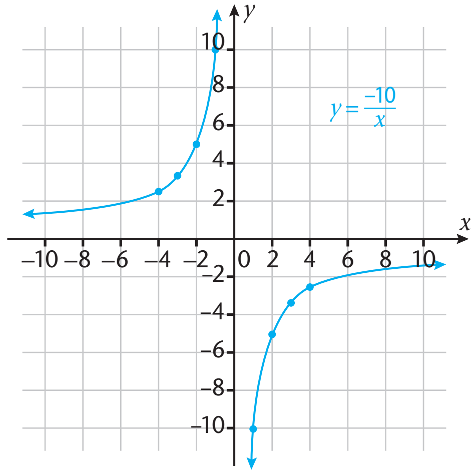
(d)



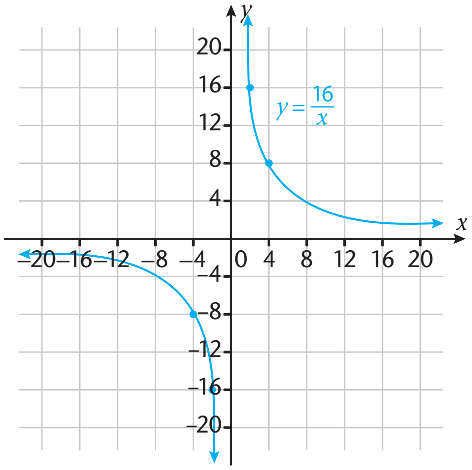
(e)



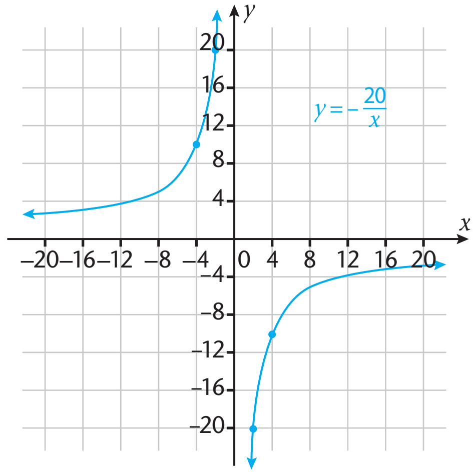
(f)



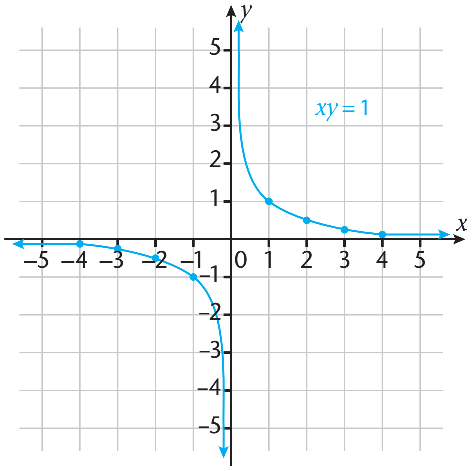
(g)



(h)



(i)



22.

Oefening 21 grafieke	Definisie-versameling	Waardever-sameling	Simmetrie lyn	Asimptoot
(a)	$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$y = x$	$y = 0$ & $x = 0$
(b)	$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$y = -x$	$y = 0$ & $x = 0$
(c)	$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$y = x$	$y = 0$ & $x = 0$
(d)	$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$y = -x$	$y = 0$ & $x = 0$
(e)	$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$y = x$	$y = 0$ & $x = 0$
(f)	$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$y = x$	$y = 0$ & $x = 0$
(g)	$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$y = -x$	$y = 0$ & $x = 0$
(h)	$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$y = x$	$y = 0$ & $x = 0$
(i)	$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$y = -x$	$y = 0$ & $x = 0$

23. Dit affekteer die vorm van die grafiek
24. 2,5 kalorieë
25. 140 g
26. (a)

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	0	–5	–8	–9	–8	–5	0

26. (b) (0; –9)
27. (a) 30 voet
27. (b) 7,5 meter
27. (c) 6 meter is langer as 15 voet

KONSOLIDERINGSOEFENINGE

1.

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
$f(x)$	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4

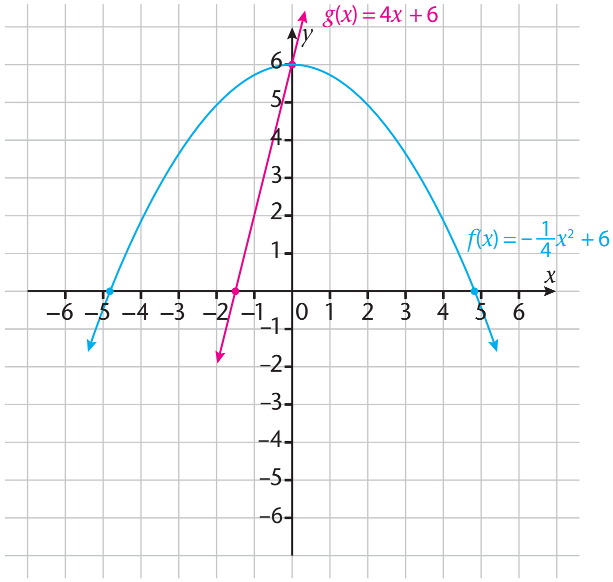
(a) (0; 0)
(b) (0; 0)
(c) $x \in \mathbb{R}$
(d) $y \in \mathbb{R}$

2. (a) i. (0; 0) ii. $\left(\frac{-4}{3}; 0\right)$ iii. (1; 0)
(b) i. (0; 0) ii. (0; 4) iii. (0; 1)
(c) i. $x \in \mathbb{R}$ ii. $x \in \mathbb{R}$ iii. $x \in \mathbb{R}$
(d) i. $y \in \mathbb{R}$ ii. $y \in \mathbb{R}$ iii. $y \in \mathbb{R}$

3.

	$f(x) = 0$	$f(x) > 0$	$f(x) \geq 0$	$f(x) < 0$	$f(x) \leq 0$
$f(x) = x^2 - 4$	$x = -2, x = 2$	$x < -2, x > 2$	$x \leq -2, x \geq 2$	$-2 < x < 2$	$-2 \leq x \leq 2$
$f(x) = -x^2 + 16$	$x = -4, x = 4$	$-4 < x < 4$	$-4 \leq x \leq 4$	$x < -4, x > 4$	$x \leq -4, x \geq 4$
$f(x) = -x^2 - 4$	geen	geen	geen	$x \in \mathbb{R}$	$x \in \mathbb{R}$
$f(x) = x^2 - 2$	$x = -2, x = 2$	$x < -\sqrt{2}, x > \sqrt{2}$	$x \leq -\sqrt{2}, x \geq \sqrt{2}$	$-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$	$-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$

4. (a)



(b) $f(x) \geq 0$ vir $-4{,}89 \leq x \leq 4{,}89$
$f(x) = g(x)$ vir $x = 0$
$f(x) < g(x)$ vir $x > 0$

(c) waardeversameling van $f(x)$ is $y \leq 6$
waardeversameling van $g(x)$ is $y \in \mathbb{R}$

(d) definisieversameling vir beide f en g is $x \in \mathbb{R}$

5. (a) $y = -1$ (b) $x \in \mathbb{R}$ (c) $y \leq 0$
(d) Maksimum, $y = 0$ (e) $x < 0$ (f) $x > 0$
(g) ja

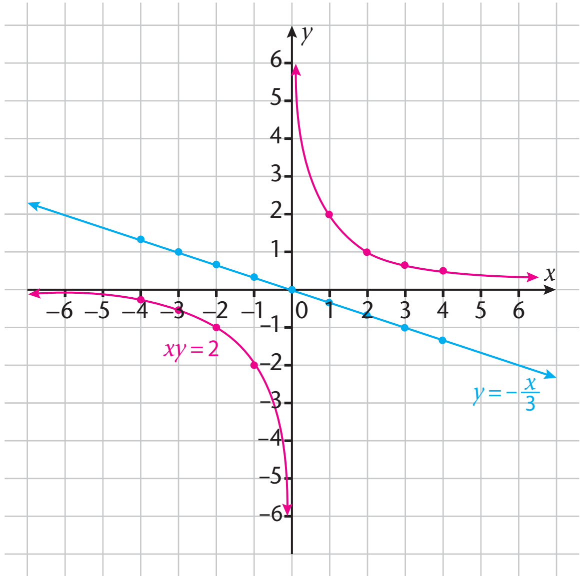
6. (a) $y = 4$ (b) (c) $y \geq 0$
(d) Minimum, $y = 0$ (e) $x > 0$ (f) $x < 0$
(g) ja

7. (a) (0; –2) (b) (0; 10)
(c) (0; 3) (d) (0; –4)

8.

	Afsnit	Definisie-versameling	Waardever-sameling
$g(x)$	(0; 1)	$x \in \mathbb{R}$	$y > 0$
$t(x)$	(0; 1)	$x \in \mathbb{R}$	$y > 0$
$h(x)$	(0; 1)	$x \in \mathbb{R}$	$y > 0$
$p(x)$	(0; 1)	$x \in \mathbb{R}$	$y > 0$

9. (a)



(b) definisieversameling vir $xy = 2$ is $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
definisieversameling vir $y = -\frac{x}{3}$ is $x \in \mathbb{R}$

(c) waardeversameling vir $xy = 2$ is $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
definisieversameling vir $y = -\frac{x}{3}$ is $y \in \mathbb{R}$

10. (a) $y = \frac{5}{x}$ (b) $y = \frac{-2}{x}$

(c) $y = \frac{6}{x}$ (d) $y = \frac{-12}{x}$

HOOFSTUK 8 MEETKUNDE ANTWOORD

OEFENINGE

1. (a) $\angle A_2 = 142°$; $\angle A_3 = 38°$; $\angle A_4 = 142°$;
   (b) teken 'n pyl langs GH wat weg van G wys; roteer dit antikloksgewys om G totdat die pylpunt langs GF afwys; die pyl het deur 'n halwe rewolusie beweeg; daarom moet die hoek tussen GH en GF half van 3600 = 1800 wees; gebruik 'n soortgelyke argument om te verduidelik waarom teenoorstaande hoeke gelyk is.
2. (a) x en k; b en q
   (b) a en x; q en e; k en p; t en b
   (c) e en b; x en p; q en t; a en k
   (d) q en x; b en k
   (e) e en p; p en b; b en x; x en e;
   q en k; k en t; t en a; a en q;
   x en q; a en e; k en b; t en b
3. (a) hulle moet almal perfekte silinders wees met presies dieselfde dwarsdeursnee deursnit
   (b) indien sirkels tussen twee lyne geteken word en hulle raak die lyne net, sal al die sirkels dieselfde deursneë hê indien die lyne parallel is; die deursneë sal verskil wanneer die twee lyne nie parallel is nie
4. (c) Nie-parallelle lyne: Twee lyne is nie parallel wanneer die sirkels waarvan hul beide raaklyne is, verskillende deursneë het; 'n Ander manier: Twee lyne is nie-parallel wanneer hulle nie 'n vasgestelde afstand van mekaar is oor hul lengte nie;
   Parallelle lyne: Twee lyne is parallel wanneer die sirkels waarvan hulle raaklyne is, dieselfde deursneë het. 'n Ander manier: Twee lyne is parallel indien hulle dieselfde afstand van mekaar is oor hul lengte heen
5. (c) Nie-parallelle lyne: Enige snylyn wat deur twee nie-parallelle lyne getrek word, sal veroorsaak dat die twee ooreenstemmende hoeke nie gelyk is nie, verwisselende hoeke sal nie gelyk wees nie, en ko-binnehoeke sal nie suplementêr wees nie.
   Parallelle lyne: Enige snylyn deur twee parallelle lyne sal veroorsaak dat die ooreenstemmende hoeke gelyk is, die verwisselende hoeke sal gelyk wees en die ko-binnehoeke sal supplementêr wees.
6. Jy behoort te vind dat die teenoorstaande segmente dieselfde lengte het. Jy het parallellogramme gekonstrueer. Wanneer vier lyne kruis om 'n geslote veelhoek te vorm, op so manier dat die teenoorstaande sye van die parallellogram gelyk is, dan beteken dit dat albei pare se teenoorstaande sye parallel is.
9. (c) die stelling is korrek en behoort sin te maak vir jou; daarom behoort (d) maklik vir jou te wees om te antwoord.
10. $x = 20°$; $y = 360$; $z = 40°$
11. $z = 65°$
12. $c = 42{,}8°$; e = 47,2°
13. (a) $y = 42°$ (b) $y = 69°$
14. (a) $a = 32°$; c = 58° (b) $f = 15°$
15. (a) Vals. Party skerphoekige driehoeke is ongelyksydige driehoeke en ander is nie (bv. gelyksydige driehoeke en gelykbenige driehoeke).
    (b) Vals. Alle gelykhoekige driehoeke is gelyksydig. Gelykhoekig en gelyksydig is sinoniem wanneer ons van driehoeke praat.
    (c) Vals. Die kortste sy is oorkant die kleinste hoek, en die langste sy is oorkant die grootste hoek.
16. alle gelykbenige driehoeke
19. hulle is kongruent
20. Maniere om 'n driehoek te teken: (I) meet een sy lengte en die twee hoeke op die einde van elke kant van daardie sy - teken oor deur 'n gradeboog en liniaal te gebruik; (II) meet die lengte van twee sye en die hoek tussen hulle - teken een sy, meet die hoek, en teken dan die ander sy; gebruik 'n liniaal en gradeboog; (III) meet die lengte van al drie sye - teken een met 'n liniaal en gebruik 'n passer om die oorblywende twee lengtes van die boog te merk. Sien die tabel op bladsy 279.

22. (a) Ja; [SHS] (b) Nee; OP in △OPQ korrespondeer met BA in △BAC, nie met BC nie
    (c) Ja; [SHS] (d) Ja; [SSS] (e) Ja; [AAS]
    (f) Ja; [RSS] (g) Ja; [SSS]
23. (a) ∠BCA = 38°; ∠QPR = 37°; ∠PQR = 105°; ∠QRP = 38°
    (b) omdat AP + PC = PC + CR [gegewe dat AP = CR]
    (c) Ja; [HHS]
24. **Wenk:** dit gaan oor die twee hoeke by P
25. [SSS]
26. (a) [HHS]
    (b) **Wenk:** Wat kan afgelei word van ∠ARI en ∠AIR? ...
    (c) **Wenk:** Wat kan gesê word omtrent △TAO en △TAH? ...
27. **Wenk:** Verbeel jouself 'n reghoek waar die regterkantste driehoek *net* inpas... Pythagoras sal jou daarheen lei.
32. Die driehoek in Oef. 29 se sye is almal 1,5 keer langer as die ooreenstemmende sye van die driehoek in Oef. 28; die binnehoeke van hierdie twee driehoeke is dieselfde. Die driehoeke in Oef. 30 en 31 het dieselfde ooreenstemmende sye en jy sal vind dat hulle ooreenstemmende sye dieselfde verhouding het. Oef. 33 behoort hierdie idees te bevestig.
34. (a) △MAD ||| △HAT
    (b) y = 2 eenhede
35. (a) ... hulle is soortgelyk [ooreenstemmende sye in proporsie/verhouding]
    (b) 1:3; 1:9
36. (b) OQ = 8 eenhede; 9,5 eenhede
37. (d) 1
38. (a) 1,25 eenhede
    (b) 3,5 eenhede
39. (c) FN; FO; GD (d) Nee
40. (c) kongruent (d) gelyk
    (e) as van simmetrie (f) loodreg; halveer
    (g) en (h) vergelyk en bespreek jou bevindinge met jou vriende sodra jy hierdie oefening voltooi het; maak seker dat julle jul redes oortuigend kan verduidelik.
41. (d) kongruent; gelyk
    (e) halveer
    (f) **Wenk:** verwisselende hoeke
    (g) en (h) bespreek, vergelyk en oortuig jouself
    (i) ja, indien die parallellogram toevallig 'n ruit is; nee
42. (a) ja; nee (ruite is wel parallellogramme); ja; nee (ruite is wel vlieërs); ja
    (c) ja, hulle het al die eienskappe van parallellogramme
    (d) **Wenk:** lengte van sye; hoek waarteen hoeklyne halveer; vier driehoeke vorm by die kruisende hoeklyne en sye; ... meer
    (g) lengte van sye; hoek waarteen hoeklyne halveer; vier driehoeke vorm by die kruisende hoeklyne en sye; ... meer
43. (b) en (c) lengte van sye; hoek waarteen hoeklyne mekaar kruis; as van simmetrie (alle vierkante is vlieërs, maar nie-vierkantige reghoeke is nie); ... meer
    (d) nee ('n vierkant is wel beide 'n reghoek en 'n ruit)
    (e) ja
44. (d) nee, ware trapesiums is nie parallellogramme nie (alhoewel alle parallellogramme trapesiums is); ja; ja; ja; ja

45. (e)

	Fig A	Fig B	Fig C	Fig D	Fig E
Twee lynsegmente is ewe lank	ja	nee	ja	nee	nee
Minstens een lynsegment halveer die ander een	ja	ja	ja	ja	ja
Twee lynsegmente halveer mekaar	ja	nee	ja	ja	ja
Twee lynsegmente is loodreg	ja	ja	nee	nee	ja

(f) Fig A: al vier klein driehoeke, so ook die vier groter driehoeke;
Fig B: △EHW en △EFW; △GWH en △GWF; △EHG en △EFG
Fig C: △IXJ en △LXK; △IXL en △KXJ; die vier groot driehoeke
Fig D: △MYN en △OYP; △PYM en △NYO; △MPN en △ ONP; △ MPO en △ONM
Fig E: al vier klein driehoeke; △TQR en RST; △QTS en SRQ

(g)

	Fig A	Fig B	Fig C	Fig D	Fig E
Twee hoeklyne is ewe lank	ja	nee	ja	nee	nee
Minstens een hoeklyn halveer die ander een	ja	ja	ja	ja	ja
Twee hoeklyne halveer mekaar	ja	nee	ja	ja	ja
Twee hoeklyne is loodreg	ja	ja	nee	nee	ja
Teenoorstaande sye is parallel	ja	nee	ja	ja	ja
Twee aangrensende sye is gelyk en twee ander aangrensende sye is ook gelyk	ja	ja	nee	nee	ja
Twee teenoorstaande hoeke is ewe groot	ja	ja	ja	ja	ja
Twee teenoorstaande hoeke is ewe groot en nog twee teenoorstaande hoeke is ook ewe groot	ja	nee	ja	ja	ja

46. (a) parallel; gelyk in lengte

47. (a) waar (b) nie altyd; hoek moet ingesluit wees
(c) vals; slegs as al die binnehoeke gelyk is (platgedrukte pentagon)
(d) waar (e) waar (f) waar
(g) vals; die sye en hoeke moet in ooreenstemmende posisies wees (sien Oef. 22 (b))
(h) vals; alhoewel vierkante en ruite vlieërs is en hoeklyne het wat mekaar loodreg sny (teenvoorbeeld: dit is moontlik om ’n trapesium te konstrueer met hoeklyne wat mekaar loodreg sny)
(i) vals; dit moet dieselfde sye wees (teenvoorbeeld: ’n gelykbenige trapesium het een paar parallel sye en die ander paar is gelyk in lengte)

48. (a) B; D (b) E (c) A (d) B; C
(e) D (f) B; D (g) B (h) C; D; F
(i) C (j) A; D; E; F

50. jy behoort saam te stem

51. (a) waar
(b) vals: konstrueer ’n vlieër teenvoorbeeld, of ’n trapesium teenvoorbeeld
(c) waar
(d) vals; alle ruite (selfs nie vierkantiges) is beide vlieërs en trapesiums

52. (a) E (b) F; I (c) B; E (d) G
(e) geen (f) A; B; C; E; H

53. (a) $a = 36°$; $b = 144°$; $c = 36°$; $d = 36°$; $e = 29°$; $f = 60°$
(b) $p = 5$ eenhede; $q = 5$ eenhede; $r = 3$ eenhede; $s = 10$ eenhede (**Wenk:** Wat is ABCD?)

54. $b = 120°$; $a = 60°$; $x = 50°$; $y = 100°$; $z = 30°$

55. (a) 40 mm^2 (b) 4 mm (c) 12,5 mm

2154 TechMaths Afr G10 LB.indb 415 2015/11/25 4:14 PM

56. linkerkantste driehoek: 12 eenhede; 16 eenhede; 20 eenhede; regterkantste driehoek: 5 eenhede; 12 eenhede; 13 eenhede
58. (a) $p = 1{,}73$ eenhede (b) $w = 1{,}41$ eenhede (c) $\theta = 90°$
    (d) $x = 5$ eenhede (e) $z = 18{,}6$ eenhede
59. (a) $x = 20$ eenhede (b) $\angle BAC = 450$ (c) 296 vierkante eenhede (d) omtrek = 76,28 eenhede
60. **Wenk:** △IJK
61. (e) 1:1; 1:2; 2:1
    (f) SR = SP = 8,09 eenhede; OS = 5,88 eenhede; PQ = 11,8 eenhede
62. **Wenk:** die drie denkbeeldige driehoeke

KONSOLIDERINGSOEFENINGE

1. [HHS]
3. $x = 50°$
4. $x = 108°$; $y = 90°$
5. gebruik △BEF en △BDC om te wys dat BF = FG; gebruik 'n ander paar soortgelyke △e om te wys dat FG = GC
6. vind twee uitdrukkings in x en y; los gelyktydig op; $x = 18°$ en $y = 72°$
7. $c = 4$ eenhede
8. (a) twee moontlike antwoorde: 13,5 m of 24 m
   (b) twee moontlike antwoorde gebaseer op (a): 22,5 m of 30 m
   (c) twee moontlike antwoorde gebaseer op (b): 2 160 m^2 of 2 880 m^2
9. $1{,}85 \times 10^5$ m
10. 7,42 m
11. 2,06 m
12. (a) wys 'n paar ooreenstemmende hoeke wat gelyk is
    (b) IJ = 0,666 eenhede; BI = 1,104

HOOFSTUK 9 ANALITIESE MEETKUNDE ANTWOORDE

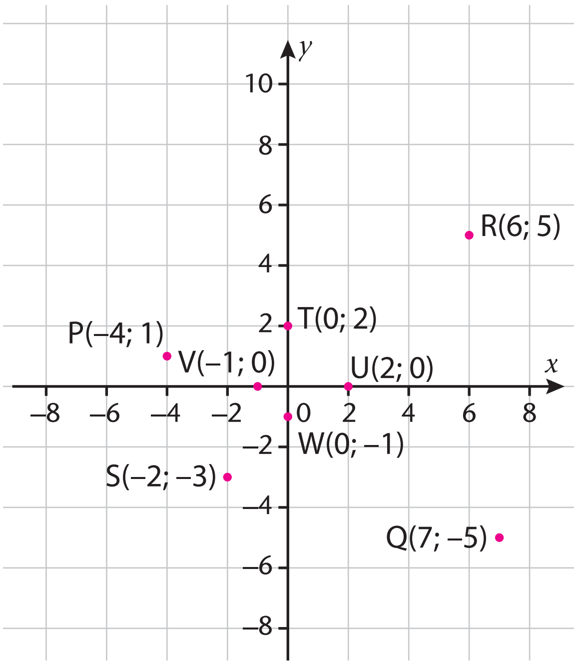
OEFENINGE

1 (a) 3 (b) 4

2 Die x-koördinate dui aan hoe ver van die oorsprong die punt op die horisontale as is.
Die y-koördinate dui aan hoe ver op of af die punt langs die vertikale as is.

3 B(2; 0), C(–2; –2), D(0; –4), E(0; 5), F(–1; 0), G(3; –3), H(0; 0), I(1; 3) J(–2; 4)

4



5 (a) 6 eenhede (b) 4 eenhede
(c) 3 eenhede (d) 20 eenhede

6 (a) 4 eenhede (b) 3 eenhede
(c) 13 eenhede (d) 50 eenhede

7 (a) 5 eenhede (b) 13 eenhede
(c) 10 eenhede (d) $\sqrt{164}$ eenhede

8 (a) $d = \sqrt{50}$ eenhede (b) $\sqrt{5}$ eenhede
(c) $\sqrt{234}$ eenhede (d) $\sqrt{185}$ eenhede

9 (a) $\sqrt{5}$ eenhede (b) $\sqrt{20}$
(c) $\sqrt{200}$ (d) $\sqrt{8}$

10 (a) $\sqrt{20}$ eenhede; $\sqrt{20}$ eenhede; $\sqrt{40}$ eenhede
(b) Ja, som van die kwadrate van twee sye van die driehoek is gelyk aan die kwadraat van die derde sy van 'n driehoek.

11 (a) $\sqrt{32}$ eenhede; 8 eenhede; $\sqrt{32}$ eenhede
$\therefore$ gelykbenig & reghoekig
(b) $\sqrt{13}$; $\sqrt{10}$ eenhede; $\sqrt{5}$ eenhede
$\therefore$ ongelykbenige driehoek
(c) $\sqrt{26}$ eenhede; $\sqrt{8}$ eenhede; $\sqrt{18}$ eenhede
$\therefore$ reghoekige driehoek

12 Bewys met twee sye wat gelyk is, EF = DF

13 (a) bewys dat alle sye gelyk is
(b) bewys dat teenoorgestelde sye gelyk is

14 (a) (0; 6) (b) $\left(3; -1\frac{1}{2}\right)$
(c) (8; 0) (d) (5; 2)
(e) (6; 0) (f) (4; –2)

15 (a) (0; 6) (b) $\left(3; -\frac{3}{2}\right)$
(c) (8; 0) (d) (8; 2)
(e) (6; 0) (f) (4; – 2)

16 (a) (– 4; 5) (b) $\left(\frac{3}{2}; -\frac{5}{2}\right)$
(c) $\left(7; \frac{3}{2}\right)$ (d) $\left(\frac{9}{2}; \frac{7}{2}\right)$
(e) $\left(\frac{11}{2}; 1\right)$ (f) (4; 0)

17 (a) (0; 5) (b) $\left(-\frac{3}{2}; 2\right)$
(c) (0; 0) (d) $\left(5; \frac{1}{2}\right)$

18 (a) C(–3; –3) (b) G(7; 1)
(c) F(10; –10) (d) A(–3; –1)

20 (a) $m_{CD} = \frac{8}{5}$ (b) $m_{AB} = 2$
(c) $m_{EF} = -1$ (d) $m_{GH} = \frac{1}{4}$

21 (a) $m_{AB} = -\frac{1}{3}$ (b) $m_{CD} = 1$
(c) $m_{EF} = \frac{5}{3}$ (d) $m_{GH} = -1$

22 (a) nie parallel (b) nie parallel
(c) nie parallel (d) parallel
(e) nie parallel (f) parallel

25 (a) $m = -\frac{1}{10}$ (b) $m = \frac{1}{10}$
(c) $m = -\frac{4}{3}$ (d) $m = \frac{2}{3}$
(e) $m = 1$ (f) m = ongedefinieer
(g) $m = 0$

26 (a) $m_{AC} = 1$ $m_{BD} = -1$

(b) $m_{AC} \times m_{BD} = -1$ $\therefore$ Hulle is loodreg tot mekaar

(c) Vierkant, Vlieër of Ruit. Diagonale is loodreg

28 Trapesium

29 (a) $y = x$ (b) $y = 0$

(c) $x = 0$ (d) $y = 2x$

(e) $y = \frac{1}{2}x$ (f) $y = -\frac{10}{7}x + \frac{12}{7}$

KONSOLIDERINGSOEFENING

1 (a) $\sqrt{113}$ (b) $\left(\frac{1}{2}; 0\right)$ (c) $-\frac{8}{7}$

2 (a) $d_{AB} = \sqrt{50}$ $d_{AC} = \sqrt{50}$ $d_{BC} = 10$

(b) Gelykbenig (c) (6; 6)

(d) $\mathrm{m}_{AM} = -\frac{4}{3}$

3 (a) $d_{ST} = \sqrt{63}$; $d_{TQ} = \sqrt{68}$; $d_{QR} = \sqrt{63}$; $d_{RS} = \sqrt{68}$

(b) $m_{SR} = 4$; $m_{TQ} = 4$; $m_{ST} = \frac{2}{7}$; $m_{QR} = \frac{2}{7}$

(c) $M_{SR} = (6; 3)$; $M_{TQ} = (-1; 1)$; $M_{ST} = \left(\frac{3}{2}; -2\right)$; $M_{QR} = \left(\frac{7}{2}; 6\right)$

(d) Parallellogram

4 (a), (b), (c), (d) en (e) het almal positewe gradiënte en (f) het 'n negatiewe gradiënt

5 (a) $k = 10$ (b) $k = 5$

6 $d = 7$ en $c = -7$

7 B(17; –7)

HOOFSTUK 10 SIRKELS, HOEKE, EN HOEKBEWEGING ANTWOORDE

OEFENINGE

1. (b)

Sirkel	Radius (cm)	deursnee	omtrek	$\frac{\text{omtrek}}{\text{diameter}}$
A	3	6	18,86	3,1433
B	4	8	25,14	3,1425
C	5	10	31,43	3,1430
D	6	12	37,71	3,1425
E	7	14	44	3,1429
F	8	16	50,29	3,1431
G	9	18	56,57	3,1428

(d) Gemiddelde waarde $\approx$ 3,14 (e) Nee

2. (a) $\pi = \frac{c}{d}$ of $\pi = \frac{c}{2r}$.
(b) (i) 3,14 (ii) 3,14 (iii) 3,14 (iv) 3,14
(c) Soortgelyk

3. (a) 188,40 cm (b) 18,84 cm (c) 314 m (d) 4 710 mm

4.

	Aantal gelyke sektore	Hoek van elke sektor
(a)	2	180°
(b)	4	90°
(c)	5	72°
(d)	6	60°
(e)	9	40°
(f)	12	30°
(g)	20	18°
(h)	30	12°
(i)	40	9°
(j)	90	4°
(k)	120	3°
(l)	360	1°

5. (a)

Woorde	Hoeveelheid omwentelinge	Hoeveelheid grade
Geen draai	0	0
Kwart draai	$\frac{1}{4}$	90
Halwe draai	$\frac{1}{2}$	180
Drie-kwart draai	$\frac{3}{4}$	270
Volle draai	1	360
Twaalfde draai	$\frac{1}{12}$	30
Agtste draai	$\frac{1}{8}$	45
Sesde draai	$\frac{1}{6}$	60
Vyfde draai	$\frac{1}{5}$	72

6. (a) 120°32'2" (b) 97°34'5" (c) 33°14'2" (d) 40°59' (e) 238°7’23” (f) 3031303°

(g) 107°30' (h) 342°3'

7. (a) 100,192° (b) 90,017° (c) 204,483° (d) 28,246° (e) 302,396°

8. (a) 120°32'2,4" (b) 97°34'4,8" (c) 33°14'2,4" (d) 40°59'13,2" (e) 238°7'22,8" (f) 3031303°0'0"
(g) 107°30'0" (h) 342°3'0"

9. (a) 100,192° (b) 90,017° (c) 204,483° (d) 28,246° (e) 302,396°

10.

Sirkel	**radius**	**omtrek**	$\frac{\textbf{radius}}{\textbf{omtrek}}$	**boog lengte**	$\frac{\textbf{boog lengte}}{\textbf{radius}}$
Rooi	1cm	6,29	0,159	0,8	0,80
Blou	2cm	12,57	0,159	1,6	0,80
Groen	3cm	18,86	0,159	2,4	0,80

11. (a) 2 rad (b) 6 rad (c) 2,5 rad (d) 4 rad (e) 1 rad

12 (a) 315° (b) 135° (c) 2° (d) 720° (e) 360° (f) 180°
(g) 135° (h) 110° (i) 90° (j) 108° (k) 48° (l) 216°
(m) 126° (n) 20° (o) 195°

13. (a) $\frac{1}{6}\pi$ rad (b) $\frac{5}{6}\pi$ rad (c) $\frac{31}{18}\pi$ rad (d) $\frac{7}{12}\pi$ rad (e) $\frac{1}{4}\pi$ rad (f) π rad
(g) $\frac{11}{6}\pi$ rad (h) $\frac{1}{15}\pi$ rad (i) $\frac{1}{3}\pi$ rad (j) $\frac{7}{6}\pi$ rad (k) $\frac{23}{12}\pi$ rad (l) $\frac{13}{30}\pi$ rad
(m) $\frac{5}{12}\pi$ rad (n) $\frac{5}{4}\pi$ rad (o) $\frac{157}{180}\pi$ rad (p) $\frac{47}{90}\pi$ rad (q) $\frac{2}{3}\pi$ rad (r) $\frac{4}{3}\pi$ rad
(s) 0 rad (t) $\frac{131}{180}\pi$ rad

14.

Grade meting	0°	1°	57,29°
Radiale meting	0 rad	$\frac{\pi}{180}$	1 rad

15.

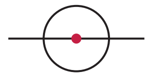
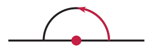
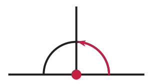
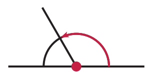
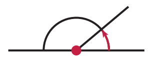
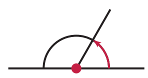
Veelvoude van 30° en $\frac{\pi}{6}$		**Veelvoude van 45° en $\frac{\pi}{4}$**		**Veelvoude van 60° en $\frac{\pi}{3}$**		**Veelvoude van 90° en $\frac{\pi}{2}$**	
grade	**radiale**	**grade**	**radiale**	**grade**	**radiale**	**grade**	**radiale**
30°	$\frac{1}{6}\pi$ rad	45°	$\frac{1}{4}\pi$ rad	60°	$\frac{1}{3}\pi$ rad	90°	$\frac{1}{2}\pi$ rad
60°	$\frac{1}{3}\pi$ rad	90°	$\frac{1}{2}\pi$ rad	120°	$\frac{2}{3}\pi$ rad	180°	π rad
90°	$\frac{1}{2}\pi$ rad	135°	$\frac{3}{4}\pi$ rad	180°	π rad	270°	$\frac{3}{2}\pi$ rad
120°	$\frac{2}{3}\pi$ rad	180°	π rad	240°	$\frac{4}{3}\pi$ rad	360°	2π rad
150°	$\frac{5}{6}\pi$ rad	225°	$\frac{5}{4}\pi$ rad	300°	$\frac{5}{3}\pi$ rad		
180°	π rad	270°	$\frac{3}{2}\pi$ rad	360°	2π rad		
210°	$\frac{7}{6}\pi$ rad	315°	$\frac{7}{4}\pi$ rad				
240°	$\frac{4}{3}\pi$ rad	360°	2π rad				
270°	$\frac{3}{2}\pi$ rad						
300°	$\frac{5}{3}\pi$ rad						
330°	$\frac{11}{6}\pi$ rad						
360°	2π rad						

16. (a) 345°° (b) 135°° (c) 225°° (d) 130°°

2154 TechMaths Afr G10 LB.indb 420 2015/11/25 4:14 PM

	(e)	255°°	(f)	90°°	(g)	220°°	(h)	120°°	(i)	30°°	
17	(a)	$\frac{2+\sqrt{2}}{2}$	(b)	0	(c)	$-\frac{1}{2}$	(d)	$\frac{2+\sqrt{2}}{2}$	(e)	-1	
18	(a)	1,57 rad	(b)	$\frac{1}{2}\pi$	(c)	$\frac{3}{2}\pi$	(d)	$-\frac{1}{4}\pi$			

19.

Omwenteling	Grade	Radiale	Rowwe skets
1	360	2π	
$\frac{1}{2}$	180°	π	
$\frac{4}{45}$	32°	$\frac{8\pi}{45}$	
$\frac{1}{4}$	90°	$\frac{1\pi}{2}$	
$\frac{1}{3}$	120°	$\frac{2\pi}{3}$	
$\frac{1}{12}$	30°	$\frac{1\pi}{6}$	
$\frac{1}{9}$	40°	$\frac{2\pi}{9}$	
$\frac{1}{6}$	60°	$\frac{1\pi}{3}$	

20.	(a)	$\frac{10}{9}\pi$	(b)	18,72 cm	(c)	$\frac{20}{9}\pi$	(d)	7,33 m	(e)	17,25 cm	(f)	0,21 m
	(g)	(i) 23,56 cm			(ii)	50,27 cm						

KONSOLIDERINGSOEFENINGE

1.	(a)	251,20 cm	(b)	1,256 km	(c)	3 821,66 m						
2.	(a)	89°39'80"	(b)	126°15'	(c)	256°1'12"						
	(d)	50°7'22,8"	(e)	330°15'21,6"	(f)	111°6'36"						
3	(a)	25,38°	(b)	70,09°	(c)	150,93°						
	(d)	323,25°	(e)	5,51°	(f)	254,99°						
4.	(a)	3 rad	(b)	6 rad	(c)	2 rad						
	(d)	3 rad	(e)	7 rad	(f)	1,14 rad						
5	(a)	450°	(b)	240°	(c)	4°	(d)	$\left(\frac{270}{7}\right)^{\circ}$	(e)	900°	(f)	250°
6	(a)	$\frac{13}{45}\pi$ rad	(b)	$\frac{1}{15}\pi$ rad	(c)	$\frac{79}{90}\pi$ rad	(d)	$\frac{65}{36}\pi$ rad	(e)	$\frac{7}{60}\pi$ rad	(f)	$\frac{22}{15}\pi$ rad
7	(a)	570°	(b)	774°	(c)	1 305°	(d)	106,5°°	(e)	532,80°	(f)	48°
8	(a)	4,27 rad	(b)	27,04 cm	(c)	1,82 rad	(d)	25,22 m	(e)	23 cm	(f)	0,55 m
	(g)	(i) 41,23 cm			(ii)	87,96 cm						

2154 TechMaths Afr G10 LB.indb 421 2015/11/25 4:14 PM

HOOFSTUK 11 FINANSIES EN GROEI ANTWOORDE

OEFENINGE

1.

Indien jy terug betaal op	n, aantal maande wat dit jou neem om my terug te betaal	$A - P$, die totale bedrag rente wat jy my skuld (tot die naaste sent)	A, die totale bedrag wat jy my skuld (tot die naaste sent)
1 Maart 2015	0	R0	R12 500
1 April 2015	1	R218,75	R12 718,75
1 Mei 2015	2	R437,50	R12 937,50
1 Junie 2015	3	R656,25	R13 156,25
1 Julie 2015	4	R875	R13 375
1 Augustus 2015	5	R1 093,75	R13 593,75
1 September 2015	6	R1 312,50	R13 812,50
1 Oktober 2015	7	R1 531,25	R14 031,25
1 November 2015	8	R1 750	R14 250
1 Desember 2015	9	R1 968,75	R14 468,75
1 Januarie 2016	10	R2 187,50	R14 687,50
1 Februarie 2016	11	R2 406,25	R14 906,25
1 Maart 2016	12	R2 625	R15 125

(a) Dit neem toe deur elke keer $P \times i =$ R218,75 by te voeg

(b) $1{,}75 \times n$ % in elke geval

(c) Maak seker dat die lyn skale gekies word om die verspreiding van punte te maksimiseer

Liniêre grafiek

Die punte moet streng gesproke nie verbind word nie, aangesien die nuwe A vir 'n maand bereken word op die eerste dag van elke maand en vir 'n hele maand hou ('n trap-grafiek sou meer geskik wees, maar is onnodig op hierdie vlak).

(d) Party (vele) sal sukkel om te sien dat A 'n liniêre funksie is van n: $A = (ip)\,n + P$ waar die gradiënt iP is en die A-afsnit (die y-afsnit) P is

(e) Vreemd, want die oomblik wat Mimi die geld na Modiba se rekening oordra, sal hy reeds die eerste maand se rente, saam met die oorspronklike bedrag skuld; deur $n = 0$ in die formule te stel, set egter die aanvanklike waarde P uit, daar is dus wiskundige sin om $n = 0$ in die formule in te sluit.

2154 TechMaths Afr G10 LB.indb 422 2015/11/25 4:14 PM

2. (a)

Aantal maande totdat Modiba vir Mimi betaal	1	2	3	4	5	…	n
Vermenigvuldigingsfaktor in algebraïese vorm	$1 + \frac{1,75}{100}$	$1 + 2 \times \frac{1,75}{100}$	$1 + 3 \times \frac{1,75}{100}$	$1 + 4 \times \frac{1,75}{100}$	$1 + 5 \times \frac{1,75}{100}$	…	$1 + n \times \frac{1,75}{100}$
Vermenigvuldigingsfaktor in desimale vorm	1,017 5	1,035	1,052 5	1,07	1,0875	…	

(b) Die getalpatroon van vermenigvuldigingsfaktore neem toe met 0,175 in elke geval, dit veroorsaak dus 'n konstante sprong in A vir elke sprong van 1 in n.

3. R97 500 (effektiewe rente is 5 × 6% = 30% gegewe 'n vermenigvuldigingsfaktor van 1,3
4. 1,25%
5. (a) R5 035,71 (b) R4 583,92
6. 2 jaar en 5 maande
7. (a) R162,50
   (b) R812,50; neem tyd met die feit dat $n = 30 \div 6 = 5$ tydperke van ses maande
8. Soos i toeneem, neem die gradiënt (wat gelyk is aan Pi) toe; daar is 'n verbinding met die afdeling oor funksies en hoe verskillende waardes van m die grafiek affekteer
9. Soos in 8, maar nou beide op die A-afsnit = P en die gradiënt = iP neem toe soos P toeneem
10. (a) 1 + 0,017 5 = 1,017 5
    (b) A neem toe met 'n vermenigvuldigingsfaktor van 1,017 5 elke maand.

Kolomme is omgeruil omdat daar geen eenvoudige manier is om die rente-deel van die belegging te bereken nie (nie soos in eenvoudige rente waar daar 'n additiewe term is nie), dus A - P kan slegs direk bereken word deur eers A te bereken.

As jy my terug betaal op	***n* – aantal maande wat jy neem om my terug te betaal**	***A* – die totale bedrag wat jy my skuld (tot die naaste sent)**	***A* – *P* – die totale rente wat jy my skuld (tot die naaste sent)**
1 Maart 2015	0	R12 500	R0
1 April 2015	1	R12 718,75	R218,75
1 Mei 2015	2	R12 941,33	R441,33
1 Junie 2015	3	R13 167,80	R667,80
1 Julie 2015	4	R13 398,24	R898,23
1 Augustus 2015	5	R13 632,71	R1 132,71
1 September 2015	6	R13 871,28	R1 371,28
1 Oktober 2015	7	R14 114,03	R1 614,03
1 November 2015	8	R14 361,02	R1 861,02
1 Desember 2015	9	R14 612,34	R2 112,34
1 Januarie 2016	10	R14 868,06	R2 368,06
1 Februarie 2016	11	R15 128,25	R2 628,25
1 Maart 2016	12	R15 392,99	R2 892,99

(c) *Verskuldig aan my na 3 maande* – R12 500 $(1 + 0,75)^3$
Verskuldig aan my na 4 maande – R12 500 $(1 + 0,75)^4$

Verskuldig aan my na n-maande – R12 500 $(1 + 0{,}75)^n$

Tydlyne is 'n belangrike organiseringshulpmiddel wanneer jy met tyd-waardes werk

(d) Word groter met 'n faktor van $(1 + i)^n$ elke maand;

(e) Bereken $\frac{100 \times (A - P)}{P}$ in elk van die drie gevalle; indien jy sukkel, herinner jouself daaraan dat jy die persentasie toename reeds bereken het en dat dit nie veel verskillend is nie.

(f) Behoort die bekende eksponensiële kurwe te kry; alhoewel die grafiek eksponensieel lyk, is dit nie noodwendig eksponensieel nie; die enigste manier om seker te wees, is om te toets hoe die uitset waardes verander soos wat die inset waardes verander

(g) A is 'n eksponensiële funksie van n; koppel P aan die koëffisiënt, $(1 + i)$ aan die basis, b in die afdeling van funksies en grafieke.

(h) Maak wiskundig sin omdat $(1 + i)^0 = 1$, dus, om $n = 0$ in te sluit, laat die formule die aanvanklike waarde uitset.

11. R720 122
12. Die waarde van A in vier jaar se tyd moet $0{,}10 \times 600\,000$ = R60 000 wees; P = R34 300
13. Vierkantswortel moet geneem word; $r = 13\%$
14. R5 338 687

    Die laaste vraag is 'n waarde-vraag. Moes hy die geld spandeer het of moes hy dit belê het vir aftrede? Hopenlik sal dit die kwessie uitlig oor hoe, gegewe genoeg tyd, 'n relatiewe klein bedrag geld met 'n aansienlike waarde kan toeneem onder saamgestelde rente; deur so vroeg as moontlik te begin spaar is belangrik.
15. $A = 2P$ vir verdubbeling; van die formule $1{,}065n = 2$. 'n Numeriese soektog gee $n = 11$.

    Die wysheid van haar besluit hang van haar motiewe af; kuns is nie net 'n tipe belegging nie, maar dit is ook iets mooi; sy kon dalk 'n laer rente gekry het as wat sy sou kry, sou sy die geld belê het, maar ten minste het sy iets wat waarde tot haar lewe voeg (die punt hier is nie om net in rykdom te belê nie, maar in lewe); beklemtoon dat ander aankope soos 'n motor of die nuutste rekenaar, nie in waarde toeneem nie, maar waarde verloor die oomblik wat jy dit aankoop; jy moet verstaan wat 'n belegging is en wat nie is nie
16.

	1	2	3	4	5
(a)	R600	R720	R864	R1 036,80	R1 244,16
(b)	R1 200	R1 440	1 728	R2 073,60	R2 488,32
(c)	R1 800	R2 160	R2 592	R3 110,40	R3 732,48

Wisseling van P is dieselfde as wisseling van a (koppel aan werk oor funksies en grafieke).

17.

	1	2	3	4	5
(a)	R1 100	R1 210	R1 331	R1 464,10	R1 610,51
(b)	R1 200	R1 440	R1 728	R2 073,60	R2 488,32
(c)	R1 300	R1 690	R2 197	R2 856,10	R3 712,93

Toenemende i veroorsaak toename in basis.

18. (a) R12 260 (b) 12,0%
    (c) Hy het R12 260 meer vir die motorfiets betaal as die kontant bedrag; dit is redelik baie, maar nie so erg soos in die voorbeeld waar die yskas amper twee maal soveel gekos het nie. Die enigste manier om seker te wees is om na verskeie winkels te gaan en uit te vind wat hulle bied (dit is belangrik om jou huiswerk te doen voordat jy in enige finansiële ooreenkoms betrokke raak).
19. (a) R5 245, 65
    (b) R502, 86
    (c) 52,51%
20. R470
21. (a) 75
    (b) R340 000
    (c) 6,07%
    (d) Sy is afgetree en het heel moontlik reeds haar pensioen; om elke maand ’n ekstra R7 500 te verdien is baie welkom, maar sy gaan egter belasting moet betaal op die ekstra inkomste; indien sy die woonstel verkoop, sou sy geen belasting hoef te betaal op die R560 000 nie (indien dit haar enigste eiendom was).
    (e) Heel moontlik ’n goeie transaksie; sou hulle besluit dat hulle nie van die woonstel hou nie en vroeg uittrek, het hulle nie meer geld spandeer as tevore nie; hulle huur by hulle vorige woonstel sou elke jaar gestyg het (soveel as 10% per jaar), waar Tannie Kitty nie haar huur gaan opskuif nie. Dit beteken dat soos wat tyd verby gaan, word Tannie Kitty se woonstel baie beter waarde vir geld en op die einde sal dit hulle eiendom wees; die huidige rentekoerse vir huislenings is omtrent 10%, en dit is dus baie beter om die woonstel so te koop as deur ’n bank.
22. R4 756
23. R22,20
24. R18,69
25. (a) 6,96%
    (b) Sy het R97 300 aan haar ouers betaal, so nee, sy het nie.
26. (a) Die waarde sal wees:
    R560 000 × 1,02 × 1,07 × 1,005 × 1,04 × 1,043 × 1,038 × 1,08 × 1,095 × 1,11 × 1,062
    = R560 000 × 1,721 672
    = R964 136
    (b) Ja, aangesien hulle effektief R560 000 + R340 000 = R900 000 vir die woonstel betaal het en dat dit meer werd is na die tien jaar wat hulle daaraan betaal het.
27. 4,56%
28. (a)

Maand en jaar	Koste per 100g
Januarie 2008	R7,98
Januarie 2010	R9,97
Januarie 2013	R11,94
Januarie 2015	R14,33

    (b) 11,78% (c) 6,19%
29. (a) 120 × 10 × 11,54 = R13 848, so ja, net genoeg (met R152 of $13,17 nog oor)
    (b) R520, maar heel moontlik meer om veilig te wees
    (c) Die skielike daling in waarde van die Rand is slegte geluk, maar om nie reserwe fondse vir 'n noodgeval te hê nie, is swak beplanning
30. (a) R9 666 667
    (b) R1 208 333

    Kan jy verduidelik waarom vertragings op groot projekte veroorsaak dat kostes sneeubal? Projekte wat op skedule bly neig om binne begroting te bly (wat gewoonlik noodfondse insluit)

2154 TechMaths Afr G10 LB.indb 425 2015/11/25 4:14 PM

31. (a) Swakker in vergelyking met albei; ZAR1 koop minder Dollar en minder Yen
    (b) Sept 2010: JPY1 = $\frac{0,14}{11,8}$ = USD 0,0119

    Des 2014: JY1 = $\frac{0,0869}{10,3}$ = USD 0,00844

    Dus swakker omdat JPY1 minder Dollar koop as in 2010
    (c) so x = Y29 631
    (d) Koste in USD in 2010: so USD 142,37
    Daarom % profyt = $\frac{100 \times (250 - 142,37)}{142,37}$ = 75%
    (e) Bereken koste in ZAR: ZAR1016,95
    En verkoopsprys: ZAR2876,87
    % profyt = 182%
    (f) Beide! 'n Goeie sakevrou omdat die USD en JPY relatief stabiel is in vergelyking met die Rand, so sy het die boek teen lae koste gekoop en teen 'n hoër prys verkoop. Gelukkig omdat die Rand redelik waarde verloor het, so die swak wisselkoers het haar profyt in ZAR gemaak, baie meer as haar profyt in USD of JPY (niemand kan voorspel hoe wisselkoerse verander nie, daarom is dit pure geluk indien dit in jou guns draai).
    (g) SARS sal jou belas op enige boek wat die land binnekom;

    Wanneer jy versamelstukke koop en verkoop (gewoonlik is geen belasting betrokke nie), sal SARS gereeld aanneem dat jy 'n besigheid het en jou belas (besigheidsbelasting is gewoonlik hoër as persoonlike belasting). Albei van hierdie sal die Rand profyt persentasie verlaag.

KONSOLIDERINGSOEFENINGE

1. (a) Andrew
   (b) Andrew (net-net)
   (c) Glenton

   Watter een is beter? Dit hang af van hoe lank die belegging gehou word. Andrew sin is beter tot en met omtrent 8 jaar, maar iewers tussen 8 en 12 jaar sal Glenton beter doen (saamgestelde rente sal altyd wen indien jy dit genoeg tyd gee om op te hoop, omdat dit eksponensieel van aard is).
2. Cassandra sin na die eerste jaar (wanneer hulle dieselfde opgehoopte waarde het)
3. (a) 337,20 VEF
   (b) 1 USD = 11,81; ZAR = 9,71; BWP = 6,37; VEF
   (c) 12 tafels.
   (d) Venezuela
4. (a) 4 maande se uitgawes.
   (b) R17 599,97
   (c) 303 maande se uitgawes.
5. Kleinhandelaar A.
6. R11 725
7. R10 470,33
8. 8,78%
9. R21 100
10. (a) R36 000
    (b) R11 000
    (c) R750
    (d) R5 500
11. 3 weke
12. R12 029,04
13. (a) 9,92%
    (b) R10,39
14. (a) R99 600
    (b) R13 944
    (c) R16 932
    (d) R130 476
15. (a) R19,99
    (b) R27,11
16. (a) £ 817 000
    (b) R10 071,43
17. (a) 8 517 160 191 mense
    (b) 9 062 958 159 mense